



# Seminario federal: Recursos manipulativos y tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

ESPERANZA CANALEJAS COUCEIRO  
JUANA M.<sup>a</sup> NAVAS PLEGUEZUELOS

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y la Organización de Estados Iberoamericanos, consideraron oportuna la organización de un Seminario sobre «Recursos manipulativos y tecnológicos para la Enseñanza y el aprendizaje de la geometría» que se celebró en Badajoz del 8 al 10 de abril de 2016. La Sociedad Extremeña de Educación Matemática, «Ventura Reyes Prosper», fue la encargada de la organización del mismo.

Además de analizar el carácter fundamental de la educación matemática como objetivo docente y en particular la educación geométrica de los futuros ciudadanos, los participantes del seminario reflexionaron sobre el papel que se le otorga en los nuevos currículos a la geometría y abordaron el uso de los recursos digitales, manipulativos y artísticos tanto como elementos motivadores como elementos de cambio de metodología en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

La visión que tienen los profesionales de la matemática y de la educación matemática, miembros de la FESPM, sobre los distintos aspectos abordados en el seminario es lo que pretende transmitir este documento, elaborado por Esperanza Canalejas Couceiro y Juana M.<sup>a</sup> Navas Pleguezuelos. En el mismo, se hacen recomenda-

ciones para las administraciones educativas, para el profesorado y para otros estamentos sociales involucrados en la educación. Las personas participantes en este seminario hicieron propuestas de actuación futura a los órganos de gobierno de la Federación con respecto a los recursos manipulativos y digitales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

## Las conferencias del seminario

### *Geometría interactiva en el aula de matemáticas*

La conferencia inaugural corrió a cargo de Javier Cayetano Rodríguez y trató el tema de *Geometría interactiva en el aula de matemáticas*. Empezó su exposición con una breve descripción del programa GeoGebra, y a continuación mostró y analizó un nutrido abanico de actividades diseñadas por él mismo con este software de geometría interactiva. La elaboración de este tipo de materiales, como nos comentó, aunque obliga a invertir bastante tiempo, al final se acaba obteniendo un buen repositorio que además puede ser compartido. Estas propuestas incorporadas en el aula

permiten el estudio de los distintos elementos del currículo de la asignatura de Matemáticas teniendo a la geometría como eje transversal.

Al tiempo que analizaba distintas actividades, iba aportando argumentos que ponían de manifiesto las ventajas del uso de GeoGebra:

- Capta la atención del alumnado por la plasticidad y movimiento que se le puede dar a las figuras.
- Facilita el elemento sorpresa con su correspondiente reflexión al observar cómo cambia toda una construcción con el simple movimiento de un punto.
- Permite visualizar, observar patrones, descubrir variaciones y valorar errores atendiendo siempre a la diversidad del alumnado.
- Posibilita la exposición de contenidos teóricos e incluso demostraciones.
- Potencia la creatividad y permite la realización de diseños artísticos sin olvidar los

fundamentos geométricos que en ellos subyacen.

- Acerca el mundo físico e interactúa con él cuando se emplean construcciones realizadas sobre relieve real.

Finalizó su exposición con el ofrecimiento de compartir a través de la FESPM su repositorio de materiales.

### *Tareas ricas también en geometría*

La segunda de las conferencias, de título *Tareas ricas también en geometría* fue ofrecida por Cecilia Calvo Pesce. Inició su intervención proponiendo que el trabajo en geometría se realizase a partir de la selección de una serie de actividades que jueguen el papel de las piezas de un puzzle, de forma que puedan ser intercambiadas sin seguir un itinerario estricto y que puedan ser recurrentes. Al tiempo, estas actividades, deben poder enriquecerse, en las diferentes etapas de la enseñanza obligatoria. Este concepto lo definió como «tareas ricas», y las fue ilustrando con variados ejemplos visuales al tiempo que aportaba información sobre páginas web en las que poder encontrarlas.

A continuación enumeró los aspectos centrales que, considera, deben ser trabajados en geometría para ser incluidos en las tareas:

- Plano y espacio.
- Figuras estáticas y transformaciones que se les pueden aplicar.
- Medida de figuras aunque no como objetivo prioritario.
- Manipulación y construcción de figuras.
- Definiciones y propiedades de figuras, fundamentalmente para facilitar la comunicación matemática.

La parte central de su conferencia consistió en analizar y matizar las características que debe poseer toda tarea rica:

- Tiene un inicio accesible para todos los alumnos.
- Hace hablar.
- Tiene un elemento de sorpresa, no es una tarea tipo ficha.



Figura 1. Empieza el seminario



Figura 2. Javier Cayetano Rodríguez



Figura 3. Cecilia Calvo Pesce

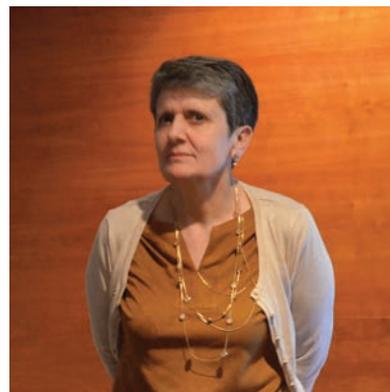


Figura 5. Pilar García Agra



Figura 4. Escuchando a Cecilia



Figura 6. En la conferencia

- Permite que el alumnado descubra hechos matemáticos.
- Es abierta y, por ello, no es fácil de conseguir.
- Tiene objetivos que van más allá de la práctica de un procedimiento matemático.
- Y..., ¡siempre se puede compartir!

Cerró su intervención recordando que el uso de material manipulativo y virtual es una fuente inagotable de tareas ricas.

### *Miradas matemáticas*

La conferencia de Pilar García Agra versó sobre *Miradas matemáticas*. Introdujo el tema con frases célebres de Hardy y de Pessoa que permiten poner de manifiesto al tiempo la belleza de las matemáticas y la dificultad de muchas personas para la observación de esa belleza.

Continuó planteando dos cuestiones:

- ¿Dónde tenemos matemáticas?
- ¿Descubren nuestros alumnos la belleza de la matemática?

Las respuestas a esas preguntas fueron las distintas miradas matemáticas que propuso Pilar, acompañadas siempre de actividades asociadas que permiten observar al alumnado la belleza de la matemática en esas miradas.

Las diversas miradas matemáticas hicieron un largo recorrido, desde números con nombre propio:  $\pi$ ,  $e$  y  $fi$ , pasando por secuencias de Fibonacci en diferentes contextos hasta un abundante surtido de ideas para observar la proporción áurea y los fractales, utilizando tanto el mundo clásico como el mundo actual.

Las variadas actividades que expuso proponían desde la simple búsqueda de elementos geométricos, con su correspondiente descripción, hasta la realización de geometrificaciones en pintura y escultura sin dejar de lado el análisis y la

reflexión del empleo que se da en la actualidad a la geometría en el mundo de la moda, publicidad, elementos decorativos, complementos, mobiliario urbano, etc.

También señaló la gran aportación que suponen los paseos matemáticos por nuestras ciudades y pueblos para descubrir la belleza de la matemática.

Concluyó su intervención recordando que el mundo audiovisual es una rica fuente de recursos de hermosas miradas matemáticas y mostró, destacándolo, el que nos presenta Cristóbal Vila en <etereaestudios.com>.

## Grupos de trabajo del seminario

El seminario se organizó en torno a tres temas, cada uno de los cuales se trató en sendos grupos de trabajo, que fueron los siguientes:

### *Grupo I. Análisis del papel de la geometría en los currículos actuales.*

*El arte como recurso en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.*

*Coordinado por Pilar García Agra*

La Geometría es la rama de las matemáticas que mejor permite su manipulación y su interacción con lo cotidiano y lo artístico, por ello se debería aprender desde sus inicios manipulando e interaccionando. El grupo centró su trabajo en el análisis de cuatro puntos que consideró fundamentales.

### **Punto de partida: Decretos, editoriales, tradición y formación**

- El profesor es el responsable del desarrollo del currículum y debe conocerlo para tomar decisiones sobre su implementación, esto es: selección de contenidos, secuenciación y temporalización, decisión sobre el uso o no del libro de texto, etc.
- Los libros de texto no tienen que pasar un examen previo de las instituciones corres-

pondientes, por cuyo motivo es probable que no se adapten al currículo.

- El profesorado debe ser consciente que los contenidos, objetivos y estándares de evaluación son prescriptivos, pero no necesariamente en el orden en que aparecen en los currículos.
- Los futuros maestros y profesores deberían recibir algún tipo de formación en didáctica de las matemáticas en las distintas carreras. Es prioritaria una formación inicial, pero también una formación continua que posibilite la innovación así como un seguimiento de la misma.

## Diferentes aspectos de la geometría que se deben reflejar en la selección y diseño de las actividades

Más allá de una simple secuenciación de contenidos, hay que tener en cuenta el desarrollo de los siguientes aspectos de la geometría, ya descritos en la conferencia de Cecilia Calvo: figuras



Figura 7. Componentes del grupo I



Figura 8. Explicando las conclusiones del grupo I

planas y tridimensionales junto con las transformaciones que se les pueden aplicar, geometría estática y dinámica yendo más allá de la medida y el álgebra, manipular y construir con intencionalidad, sin olvidar la construcción de los objetos cotidianos, definiciones y propiedades, puesto que las propiedades se descubren y las definiciones se construyen.

### Metodología, resolución de problemas y recursos variados

- Los problemas deben ser un punto de partida en todas las actividades para construir los conceptos y no solo para aplicarlos. La resolución de problemas es el eje vertebrador de las matemáticas, y en particular de la geometría.
- Los recursos manipulativos y digitales deben ser un elemento fundamental en el diseño de las actividades, ya que debe haber un equilibrio entre materiales manipulativos, los no manipulativos y los tecnológicos.
- Es importante que el alumnado se sienta protagonista de las actividades, las cuales deben ser intencionadas.
- El profesor/a plantea buenas preguntas, dirige y acompaña las tareas y dinamiza su puesta en común, teniendo en cuenta la realidad del alumnado y el entorno del centro. Y por último reflexiona sobre el resultado de la actividad, para una posterior implementación.

### Geometría como nexo con la realidad, con los otros bloques de la matemática y con otras materias

- Geometría como una ayuda para comprender y describir el entorno, pero también para crear: arte, tecnología, arquitectura, diseño, etc.
- Como modelo para introducir, ampliar o visualizar otros contenidos matemáticos: numéricos, algebraicos, estadísticos y otros.
- Disposición a reconocer la presencia de la geometría en todas las otras materias.

### Grupo II. Recursos manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

*Coordinado por Silvia Margelí Voelp*

El grupo, después de debatir, de analizar muestras de materiales manipulativos y de puesta en común de experiencias, centró las conclusiones en tres aspectos:

#### Aspectos relacionados con la metodología

Se comienza hablando de materiales, pero, tal como dice Antón Aubanell, si se asocia un material a una actividad, se obtiene un recurso educativo. El material no puede ser tratado como un elemento independiente: debe ir unido a una actividad y, por consiguiente, a unos criterios metodológicos.

Es necesario seguir un proceso sistemático en la utilización de materiales: primero manipular, a continuación recoger datos y representar de forma gráfica lo manipulado y, por último, sacar conclusiones tanto orales como escritas que permitan inducir una generalización.

Las actividades que se propongan deben de cumplir la definición propuesta por Cecilia Calvo «tareas ricas», siendo conveniente una puesta en común final para compartir las diferentes estrategias empleadas al realizar las actividades propuestas.

Sin olvidar la importancia de darle a la geometría su espacio y su tiempo, e incluirla en el resto de los bloques de contenidos.



Figura 9. Componentes del grupo II

## Las ventajas del empleo de materiales manipulativos

Si bien se tiene clara la bondad del uso de los materiales en clase, a menudo se necesitan criterios claros que ayuden a argumentar esta propuesta. Para unas conclusiones finales se destacaron las siguientes:

- Ayuda a desarrollar la capacidad geométrica, ya que lo que los estudiantes aprenden, está intrínsecamente conectado a cómo se aprende.
- Facilita la resolución de problemas geométricos.
- Favorece la comunicación y la representación.
- Desarrolla el razonamiento manual, mental y verbal.
- Potencia la transversalidad de la geometría.
- Desarrolla la competencia social mediante la realización del trabajo en equipo.
- Trabaja la competencia de aprender a aprender, ya que promueve el esfuerzo, la perseverancia y la aceptación de una posible crítica razonada.
- Facilita la visión de las figuras en distintas posiciones de forma que se favorezca el enriquecimiento de la imagen mental de los conceptos, evitando los estereotipos.
- Ayuda a identificar, clasificar, estimar, indagar y comprobar.

## Dificultades para llevar a la práctica el empleo de materiales manipulativos

Si el uso de materiales supone tantos beneficios, ¿qué es lo que frena al profesorado? ¿Por qué no se usan de manera suficiente en todas las aulas de escuelas e institutos? Algunas respuestas podrían ser:

- Falta de implicación del profesorado. Supone mucha más planificación e implica trabajo en grupo.
- Duda ante los beneficios de la manipulación de materiales. ¿El hecho de manipular aporta realmente conocimiento matemático significativo al alumnado?
- Falta de ayuda por parte de la administración. Ratios cada vez más altas y normas ISO que pretenden homogeneizar.
- Insuficiente formación inicial y permanente del profesorado.
- Desconocimiento por parte del profesorado de los materiales que pueden ser empleados en el aula y del uso adecuado de ellos.

### *Grupo III. Recursos digitales en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.*

*Coordinado por Rubén Pérez Zamanillo*

En la enseñanza y aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria se observa que el bloque de Geometría, junto con el de Estadística y Probabilidad, son los que tienen menos peso en el currículo que finalmente se desarrolla en las aulas. Las razones son de variada índole, algunas hacen referencia a la secuenciación de los bloques en los currículos oficiales con su correspondiente falta de tiempo y otras, más profundas, tienen que ver con la formación del profesorado actual, que en general ha recibido una escasa formación en geometría y se siente más cómodo trabajando con números, álgebra y funciones.

Una posible solución al problema pasaría por cambiar el orden de los bloques de contenido, o por definir como principal un bloque en cada curso. También ayudaría el hecho de utilizar los contenidos de geometría como herramienta en



Figura 10. Explicando conclusiones del grupo II



Figura 11. Componentes del grupo III



Figura 12. Explicando las conclusiones del grupo III

otros bloques. A mayores una adecuada planificación y coordinación permitiría cubrir suficientemente todos los bloques de contenido.

Situada ya la geometría en el contexto adecuado, se hizo recopilación comentada de una selección de recursos en internet y se analizaron tres facetas:

### Ventajas del uso de las TIC en la enseñanza de la geometría

- Es un elemento motivador que permite desarrollar los contenidos de una forma más clara, completa y eficaz.
- Facilita que la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos de geometría no queden limitados a áreas y volúmenes.
- Ayuda a la introducción de metodologías más activas en el aula.

- La existencia de gran cantidad de software libre y de calidad.
- Es de fácil acceso y de hábito cotidiano entre los estudiantes.

### Dificultades y problemas en el uso de las TIC

- La deficiente dotación y los innumerables problemas de funcionamiento de los equipos y redes en muchos centros de enseñanza.
- La formación del profesorado, en general, más técnica que didáctica.
- La falta de coordinación y diversidad de criterios en los departamentos.
- El cambio del sistema clásico de evaluación.

### Recursos didácticos

Los recursos son importantes, pero lo es también el cómo se usan. Todo el profesorado es consciente de que un uso eficaz de las TIC necesita de un cambio en la metodología y es conveniente recordar que en geometría no todo se basa en GeoGebra y no todo lo que encontramos en internet o se reproduce con un ordenador es un recurso tecnológico.

Cualquier recurso tiene que estar integrado en el currículo y las actividades planteadas con estos recursos deben ser tareas ricas, tal como quedaron definidas en la segunda de las conferencias del seminario. Además es necesario tener claros los objetivos a conseguir y realizar una adecuada planificación de las actividades.



Figura 13. Antonio Molano despidiendo el seminario

## Conclusiones

Al final desde los diferentes grupos se elaboraron una serie de propuestas que se exponen a continuación, las dos primeras a nivel global y las siguientes dirigidas a los diferentes agentes:

En la Educación Primaria, los bloques de Geometría y Números deberían de trabajarse mezclados, mientras que en la Educación Secundaria sería bueno ir alternando el orden de los bloques en los distintos cursos, de forma que cada curso se iniciase con un bloque distinto.

Tomando como base el currículo oficial, el profesor con criterio será el que tome decisiones sobre una implementación que recoja los diferentes aspectos de la geometría a través de una metodología de resolución de problemas, que utilice recursos variados y permita a todos los alumnos conocer e intervenir en su entorno.

### a) Al profesorado

- Buscar el consenso entre los miembros del departamento tanto en la organización y secuenciación de los contenidos, posibilitando así el aprendizaje significativo, como en los usos de los recursos tecnológicos.
- Convencer a los compañeros de que detrás de los materiales hay matemática rigurosa. Recordar cómo ha sido la construcción del conocimiento matemático en general, y el geométrico en particular, a lo largo de la historia.



Figura 14. Los componentes del seminario

- Entender que el proceso de aprendizaje de los alumnos debe partir de la experimentación, la construcción de su propio conocimiento a partir de la experiencia que se les pueda aportar.
- Incorporar metodologías más activas en el aula.

### b) A las administraciones

- Potenciar y favorecer el trabajo en equipo ya que posibilita la gestión eficiente de los recursos, minimiza el esfuerzo y maximiza el rendimiento.
- Liberar al profesorado del mantenimiento de los equipos informáticos.
- Ofrecer al profesorado una formación que incida en el aprovechamiento didáctico de los recursos manipulativos y tecnológicos que incluya una fase práctica de aplicación en el aula.

### c) A la FESPM y las distintas sociedades que la integran

- Impulsar la realización de jornadas de compañeros de zona con actividades sencillas y asequibles, o de pequeños grupos de profesores que favorezcan el intercambio de experiencias.
- Impulsar la creación de un catálogo de actividades con materiales con sus recomendaciones de uso por temática y nivel.
- Seleccionar y divulgar, a través de las distintas Sociedades, las buenas prácticas en el uso de las TIC.
- Impulsar la creación de un sitio web que albergue un repositorio de materiales de una calidad contrastada para su uso en el aula, de forma que estuvieran catalogados por niveles y tipo de contenido desarrollado. Y, a ser posible, que incluyeran recomendaciones de empleo en las aulas.

ESPERANZA CANALEJAS COUCEIRO  
IES As Telleiras, Narón (A Coruña)  
<ecanalejas@gmail.com>

JUANA M.<sup>a</sup> NAVAS PLEGUEZUELOS  
IES Pedro Jiménez Montoya, Baza (Granada)  
<juaninavas@gmail.com>