suma+ 80
Artículos
Noviembre 2015
pp. 67-76

Concepciones y significados en una tarea matemática escolar

Luis Rico Romero
Juan Francisco Ruiz Hidalgo
José Antonio Fernández Plaza
Elena Castro Rodríguez
Enrique Martín Fernández
Miguel Vílchez Marín

En este artículo presentamos las concepciones que emergen en un grupo de escolares de Educación Primaria cuando se les propone trabajar sobre las potencias de un número a través del cubo de Rubik. Analizamos los diversos significados que manifiestan los alumnos en sus respuestas y revisamos el conocimiento didáctico expresado por su maestra. Nos basamos en la noción de significado de un concepto matemático escolar establecido por la terna: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos o modos de uso. Los significados identificados en las respuestas de los estudiantes muestran la estructura multiplicativa pero consideran sentidos diferentes a los esperados.

Palabras clave: nvestigación didáctica, Aritmética, Potencias de un número, Sentidos y modos de uso, Primaria.

conceptions and meanings in a school mathematical task

In this paper we describe mathematical conceptions emerged from a Primary school children group when they are required to work on numerical powers through a cube of Rubik. We analyze several meanings that the students express in their answers. We base on the notion of the meaning of a school mathematical concept, established by three components: conceptual structure, representational systems and senses or modes of use. The meanings in the responses of the students show a multiplicative structure, but they consider different senses than expected.

Key words: Educational Research, Arithmetic, Numerical powers, sense and uses, Primary Education.

A comienzos de 2015, en un viaje de trabajo, tuve oportunidad de visitar un centro escolar de Educación Primaria y presenciar una sesión de clase de matemáticas en un grupo mixto, con 35 alumnos de 6.º curso (11-12 años). La clase duró 45 minutos.

La profesora era una maestra con experiencia, conocimiento de sus alumnos; desarrolló un tema de trabajo previamente elegido y planificado por ella.

Mi interés en la visita era observar la metodología y el ritmo usual seguido por un grupo natural de alumnos, que permitiera recoger los conocimientos matemáticos manifestados por ellos, para identificar sus concepciones e interpretar sus significados.

La tarea escolar propuesta fue «repaso de potencias» y el material seleccionado fue un cubo de Rubik de $3 \times 3 \times 3$. La pregunta, a la que tenían que responder los estudiantes, consistía en expresar mediante notación de potencias cuántos «cubitos unidad» componen el cubo completo.

Ante la sorpresa de la maestra ninguna de las respuestas fue 3^3, es más, ninguna de ellas incluía al número 3. La reacción de la docente fue recordar a los estudiantes la notación de las potencias y escribir ella misma la respuesta correcta, pero los estudiantes no se mostraron conformes.

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2015 y aceptado en agosto de 2015

Para proporcionar una explicación de este caso, realizamos un análisis didáctico de la sesión de trabajo con la tarea propuesta. Este análisis tiene dos propósitos. Por un lado, interpretar los significados de las respuestas de los alumnos y, por otro, conjeturar el conocimiento didáctico de la maestra sobre el contenido tratado en la tarea.

Nos apoyamos en la noción de significado de un concepto matemático escolar establecido mediante su estructura conceptual, sus representaciones y su sentido (Rico, 2012). Para ello, tras revisar el significado del concepto de potencia, analizamos las respuestas de los estudiantes en términos de esas tres componentes. Las respuestas de los estudiantes manifestaron su concepción sobre qué entienden por potencia de un número. Los significados expresados fueron inadecuados ya que, si bien se observaron concepciones basadas en la estructura multiplicativa, los sentidos que identificaron fueron inapropiados Así, consideraron relaciones de cantidades diferentes a las de la magnitud volumen, como son relaciones entre cantidades de superficie o de longitud; como consecuencia los estudiantes emplearon números y representaciones inadecuadas.

Finalmente reflexionamos en torno al conocimiento didáctico manifestado por la profesora sobre el significado del concepto estudiado, el cual debe orientar su enseñanza del estudiante.

Instrucción. Tarea y desarrollo de la sesión

Sesión de trabajo en el aula

La maestra me dio la bienvenida y me presentó a los escolares. Después pidió que formasen grupos de trabajo de 5 alumnos y transmitió unas normas generales de actuación.

La tarea escolar propuesta por la maestra, elegida de la programación oficial, fue «repaso de potencias». El material seleccionado fue un cubo de Rubik de $3 \times 3 \times 3$ (figura 1). La maestra comprobó que cada grupo de estudiantes tenía, al menos, uno de estos cubos.

La maestra comentó a sus alumnos cómo los cuadrados de colores del cubo articulado muestran caras externas de los cubos elementales —«cubos unidad»— que, supuestamente, componen el cubo completo. En algún caso identificó un mismo «cubo unidad» señalando varias de sus caras. A continuación concretó la tarea que tenían que realizar, para ello solicitó a los estudiantes «expresar mediante notación de potencias cuántos cubos unidad componen el cubo de Rubik completo».

Uno de los grupos disponía de un cubo cuyas piezas no estaban articuladas, lo cual les permitió observar su interior (figura 2), circunstancia que no tuvo en cuenta la maestra y que supuso una ruptura con el modelo ideal del cubo $3 \times 3 \times 3$. Este

Figura 1. Cubo de Rubik

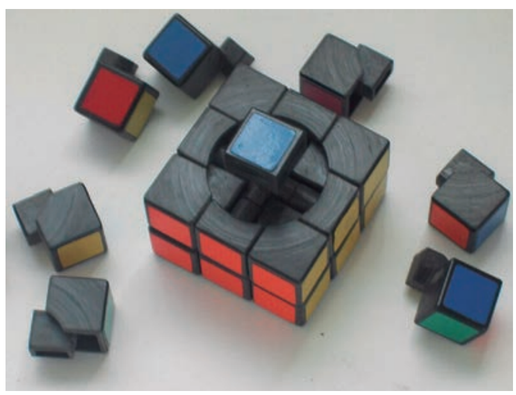

Figura 2. Cubo de Rubik desarticulado

dado desarticulado mostraba que no existe un cubo central y cuestionó que las restantes piezas fueran «cubos», ya que únicamente reflejaban caras externas.

Trabajo de los escolares

Los alumnos emplearon cierto tiempo en realizar la tarea, mostrando que no estaban familiarizados con ella. Observaron las caras del cubo, sus aristas, los cuadraditos que las componen y las aristas de estos, e hicieron diversos recuentos. En esta actividad participaron todos los alumnos, se comunicaron entre ellos e intercambiaron ideas con total libertad. Algunos grupos encontraron y dieron una respuesta común, mientras que otros expresaron respuestas distintas, sin destacar sus desacuerdos o discrepancias.

Repuestas de los escolares

Una vez discutidas las soluciones entre los distintos grupos, alcanzado o no un acuerdo, la maestra pidió a los alumnos que escribiesen sus respuestas en la pizarra. Los alumnos fueron saliendo a la pizarra y escribieron distintas soluciones.

Las contestaciones proporcionadas en primer lugar, fueron variantes de combinaciones de los números 6 y 9 (figura 3).

Estas repuestas sorprendieron a la maestra, quien pidió a los alumnos nuevas expresiones, recordando que la cuestión propuesta requería escribir con potencias el total de los cubos unidad que había en el cubo de Rubik, y que debían identificar por sus caras externas coloreadas.

$$9^6 \qquad 6^9$$
$$9_6 \qquad 6_9$$

Figura 3. resultados con los datos 9 y 6

Varios alumnos no supieron encontrar otra expresión distinta y se reafirmaron en la que habían dado previamente, mientras que algunos aportaron otras nuevas y escribieron combinaciones de los números 4 y 9 (figura 4).

$$9^4 \qquad 4^9$$
$$9_4 \qquad 4_9$$

Figura 4. resultados con los datos 9 y 4

Intervención de la maestra

Ante esta nueva respuesta, la maestra volvió a repetir las indicaciones iniciales, recordando que el cubo mayor tenía 3 plantas de cubos unidad, cada una de las cuales se formaba por 3 filas de esos cubitos con 3 cubitos, a su vez, en cada fila. Numéricamente el total de cubos unidad se expresa, pues, mediante el producto de tres veces la cifra 3 (*treses*), cuya escritura como potencia emplea la cifra 3 dos veces (figura 5).

Los alumnos no cuestionaron la explicación de la maestra pero tampoco corrigieron sus respuestas previas. El grupo de alumnos que disponía de un cubo desmontado trató de contar el total de cubitos observando su interior, sin coincidir con la interpretación hecha por la maestra, ya que muchas de las piezas no eran cubitos unidad.

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

Figura 5. Resultados expresados con *treses* y como potencia

Significado de la potencia de un número

Estudio didáctico de la tarea

La tarea trabaja sobre el concepto matemático de potencia enésima de un número. Nos proponemos con esta tarea estudiar el significado atribuido por los escolares a la noción de potencia de un número y, también, el conocimiento que moviliza la maestra para enseñar esta noción y mejorar su aprendizaje por los escolares.

El análisis didáctico que realizamos de esta tarea escolar tiene dos propósitos:

1. En primer lugar, identificar e interpretar las concepciones movilizadas por los escolares sobre la potencia enésima de un número.
2. En segundo lugar, revisar el conocimiento didáctico de la maestra sobre estos contenidos y su contribución a la construcción del concepto escolar de potencia.

Sobre el significado de un concepto matemático escolar

Para este análisis seguimos el marco conceptual sobre significado de un concepto matemático escolar constituido por la terna semántica estructura conceptual, sistemas de representación y sentido (Rico, 2012).

Para estudiar el significado de un contenido matemático hemos de entender y dominar aquella estructura conceptual en que consiste su referencia. Igualmente, hemos de conocer los signos y reglas con que se representan. Finalmente, la comunicación de un concepto o estructura matemática tiene lugar en una situación concreta, desde un contexto que lo dota de sentido (Rico, 2015).

Estructura conceptual de las potencias en educación Primaria

El concepto de potencia enésima de un número se introduce en Primaria como extensión de la notación multiplicativa, con base en destrezas y rutinas algorítmicas precisas. Las potencias denotan y relacionan números multiplicativamente, son parte de los naturales, de su estructura multiplicativa.

El conjunto de los naturales, sus expresiones factorizadas, la relación de divisibilidad y sus propiedades constituyen la referencia del concepto de potencia, es decir, la estructura que valida la veracidad o falsedad de los enunciados en que intervienen potencias en los niveles que consideramos.

Sistemas de representación y concepto de potencias

La notación de una potencia enésima es unívoca respecto a sus dos componentes: base y exponente. La figura 6 muestra un ejemplo del producto de factores iguales un número determinado *n* de veces. La figura muestra la expresión de dicho producto como potencia, que distingue entre la base, *b,* primer número con mayor tamaño tipográfico, y el exponente, *n,* segundo número a la derecha, de menor tamaño tipográfico y un poco elevado respecto de la base.

El currículo de matemáticas introduce esta notación del concepto de potencia en el último ciclo de Primaria y luego lo continúa en Secundaria.

Aún cuando esta notación parece simplificar la complejidad que encierra, el concepto de potencia enésima de un número no es sencillo como muestra su antigüedad y su evolución a lo largo de la historia (Cajori, 1974). Esta tarea evidencia que dicha complejidad no se reduce a un simple dominio algorítmico.

$$b \times \overset{n \text{ veces}}{\ldots} \times b = b^n$$

Figura 6. Representación usual de una potencia

Sentidos del concepto de potencia

Estos sentidos atañen a usos, contextos y situaciones de números naturales que se relacionan multiplicativamente. Los sentidos numéricos específicos del concepto de potencia se presentan cuando predominan las relaciones multiplicativas entre números o cuando se requiere de las correspondientes propiedades de su estructura. El Sistema Decimal de Numeración (SDN) constituye un ejemplo familiar de uso matemático basado en la noción de potencia.

El Sistema Métrico Decimal (SMD) proporciona una nueva estructura basada en el SDN que aborda los contextos de medida. Las transformaciones entre cantidades según las distintas unidades de cada una de las magnitudes abordan multitud de situaciones que requieren de las potencias.

Las relaciones geométricas entre unidades de longitud, de superficie y de volumen, proporcionan otro sentido diferente para las potencias en el contexto de medida. En este caso no son solo los números los que se expresan multiplicativamente sino que las propias unidades se expresan como potencias, donde cada magnitud emplea unos símbolos diferenciados. Las notaciones u, u^2 y u^3 muestran las relaciones entre unidades de las respectivas magnitudes longitud, superficie y volumen, donde los exponentes tienen un uso —y un significado dimensional— diferente al que tienen los exponentes en la factorización de un número.

Relaciones entre cantidades de las magnitudes longitud, superficie y volumen

Con el contexto de medida surge una nueva estructura basada en un nuevo sistema de relaciones. Lo atrayente de este sistema de relaciones se muestra cuando tomamos una cantidad de longitud c para la unidad de medida u, ya que entonces la superficie del cuadrado que se forma a partir de ella tiene por medida el área c^2u^2, mientras que el cubo cuya arista sea la longitud inicial tiene por volumen c^3u^3. Cuando la relación entre una longitud y su unidad es c, la relación entre la superficie cuadrada y su unidad es c^2, y la relación entre el volumen derivado con el volumen unidad es c^3. El contexto que interpreta el paso de las unidades de longitud a las de superficie y a las de volumen, muestra que las cantidades que se derivan guardan entre sí relaciones numéricas que se expresan por potencias.

Los escolares ante la tarea

Significados parciales y noción de concepción

El significado que comunica un estudiante mediante sus repuestas o actuaciones ante tareas concretas se puede analizar, en los mismos términos que el significado de cualquier concepto matemático escolar. Tal análisis considera las componentes mencionadas: *estructura conceptual*, *sistemas de representación* y *sentidos*.

> Consideramos la noción de concepción para referirnos a aquellas «parcelas» de significado (significados parciales) que emergen de la respuesta de los estudiantes ante la demanda que plantean tareas particulares. Una concepción presenta una referencia, sistemas de representación y sentidos propios. El carácter subjetivo de esta respuesta la diferencia del concepto matemático correspondiente. (Fernández-Plaza, 2015)

Las concepciones detectadas en la experiencia que describimos muestran los significados que el grupo de estudiantes observados atribuyeron al concepto de tercera potencia.

Concepciones movilizadas por los alumnos

La diversidad de respuestas muestra la disparidad de concepciones en los escolares. Para interpretar las respuestas de los alumnos la maestra las agrupó en dos opciones, aquellas que utilizaron los datos numéricos 6 y 9 (figura 3) y aquellas otras que utilizaron los datos numéricos 4 y 9 (figura 4).

Consideramos en primer lugar las respuestas dadas por aquellos alumnos que escribieron las expresiones de la figura 3. En esta respuesta se aprecia una primera concepción: los alumnos interpretan como potencia la expresión de una relación multiplicativa, a la cual llamaremos «concepción multiplicativa» ya que, al responder a la petición de una potencia, buscan tal tipo de relación. Una segunda concepción se muestra con la representación de esa cantidad mediante una notación elegida para representar potencias. Las respuestas escritas indican que, dada una relación multiplicativa entre dos números, los escolares escribieron esa relación con una notación similar a la de una potencia, donde la posición de las cifras no está clara y admite diversas opciones: 9^6 o 6^9, o bien, con notación más cercana a la de un producto, 9_6 o 6_9 (figura 3). Las segundas notaciones parecen indicar cierta indecisión entre producto y potencia.

La concreción en el cubo condicionó el sentido con el cual los alumnos interpretaron la relación propuesta por la tarea, como relación entre dos cantidades de la magnitud superficie —superficies unidad y superficie lateral total— que identificaron en el cubo. Esta interpretación del sentido proporcionó una concepción más precisa, que integró y resumió la referencia y la notación previas. Aquellos alumnos que manifestaron contar el total de cuadritos pequeños coloreados en el total de caras, expresaron esta cantidad manejando dos datos: total de caras, 6, por el total de cuadritos en cada cara, 9, o, recíprocamente. Estos alumnos identificaron con sus respuestas una referencia multiplicativa en la que buscaron relacionar dos números mediante su producto. Esta interpretación fue reiterada por varios de los alumnos, que la describieron y expresaron su conformidad con ella. Las respuestas las presentaron mediante notaciones inadecuadas, como en la figura 3.

Interpretación de las actuaciones de los estudiantes

La seguridad de los estudiantes para responder a la pregunta planteada ¿cuántos cubitos componen el cubo?, dando respuesta a otra cuestión diferente (¿cuántos cuadraditos se ven?) nos hace reflexionar. Se trata de una discontinuidad lógica que lleva a responder a una pregunta relativa a relaciones entre componentes (*cubitos*) de un todo (*cubo*), utilizando datos de relaciones entre algunas de sus partes (*cuadraditos/caras*). Como se ha indicado, algunas limitaciones del material parecen inducir esa interpretación; es llamativo que ninguno de los niños considere el valor 3 en las potencias escritas.

Las concepciones de los alumnos les llevaron a interpretar las potencias como un modo simple de expresar relaciones multiplicativas entre partes, que se identifican sobre un cubo y desconocen su singularidad y propiedades, más allá de la simple notación. Las respuestas de estos alumnos expresaron unas concepciones que mostraron capacidad y dominio para reconocer relaciones multiplicativas.

Si bien las primeras notaciones hicieron uso de la expresión de potencia y las segundas no, en ambos casos se observaron respuestas con un dominio deficiente de esa notación que los alumnos ponen de manifiesto al explicar cómo la interpretan. Contar el total de cuadraditos por cara y multiplicarlo por el número de caras proporcionó un sentido a la relación multiplicativa entre los números 6 y 9. Esa relación no responde a la tarea propuesta por la maestra: total de cubos unidad en el cubo grande; tampoco vincula el dato calculado con la notación de potencias. Esta concepción la denominamos «potencia como razón entre superficies en un cubo de Rubik».

Cuando se pidió a estos mismos alumnos que revisaran las respuestas anteriores surgieron nuevas respuestas como las que muestra la figura 4. En este caso la estructura conceptual permanece ya que continúa la relación multiplicativa y las representaciones reiteran las ideas antes consideradas. Varía el sentido, que proviene de contar el número de aristas en el total de cuadraditos de cada cara y expresar el total de aristas en una cara del cubo; como cada cuadrito tiene 4 aristas y en cada cara del cubo hay 9 cuadritos, dicho total de aristas viene dado por una de las expresiones de la figura 4. Esta concepción la denominamos «potencia como razón entre longitudes en un cubo de Rubik».

Concepciones de los estudiantes sobre las potencias con apoyo del cubo Rubik

Estructura conceptual y sentido son las componentes de significado que destacan en las concepciones expresadas en las respuestas. Para los estudiantes, la cuestión prioritaria ha consistido en encontrar una relación multiplicativa con sentido sobre el cubo de Rubik, para la cual han identificado diversas opciones, que son capaces de describir como distintas. Una vez establecida tal relación la notación con que la expresan ha sido, para ellos, secundaria. Estructura conceptual, representaciones y sentidos, conjuntamente, proporcionan diversos significados a las concepciones sobre relaciones multiplicativas en un cubo de Rubik y a su notación posterior.

El material y la instrucción

Sobre la tarea

La tarea fue seleccionada por la maestra como ayuda para repasar con los escolares el concepto de potencia de un número. La aparente simplicidad de la tarea propuesta a un grupo de estudiantes de sexto de Primaria y el componente motivador dado por el cubo de Rubik, ocultaron una complejidad didáctica y conceptual que se percibió en el transcurso de la sesión de clase. Las respuestas de los escolares, sostenidas sobre varias interpretaciones parciales, guiaron el trabajo de la maestra.

Sobre el material y el contexto

El cubo de Rubik con el que trabajaron los alumnos no hizo surgir el sentido conjeturado, no contribuyó a identificar la relación entre cubos propuesta por la cuestión inicial. La aparente sencillez para el manejo del cubo, la familiaridad en su uso como juego por los escolares y su utilidad para visualizar transformaciones geométricas parece que lo dotan de cercanía; contextualizar una determinada noción en este material debiera hacerla más sencilla y asequible. Hemos visto que no es así. En primer lugar, las piezas que componen el cubo no son cubitos unidad sino partes de un mecanismo articulado cuyas piezas tiene distintas formas, que se visualizan en cuanto se desarticulan, información que la maestra parece ignorar (figura 2).

Por el contrario, las unidades de superficie sí están singularizadas con los distintos cuadritos de colores, se pueden ver en su totalidad, tocar, comparar y contar, lo cual permite responder a la pregunta ¿cuántos hay? Esto explica que el aparente error de los estudiantes no es tal el error sino una respuesta adaptada a la información disponible. Es más, incluso cuando la maestra no acepta como respuesta el conteo de las unidades de superficie, los alumnos encuentran más razonable contar longitudes, y cuentan las aristas posibles en el total de cuadritos de las caras del cubo, o las aristas de cada cara del cubo.

La relación numérica que la docente quiere obtener del material es solo un caso de los contextos y relaciones que subyacen. La pregunta se plantea sobre al menos tres tipos de relaciones: entre longitudes (aristas), entre superficies (cuadritos) y entre volúmenes (cubitos). Los alumnos pensaron en las otras relaciones, distintas de la pensada por la maestra. Mantener este material u otro similar para contextualizar esta clase de tareas requiere de manejo reflexivo y comunicación en el aula, que realice una discriminación sistemática entre cubos, cuadrados y segmentos.

Sobre la representación de las potencias

Los estudiantes conocen que la notación de la potencia enésima de un número expresa relaciones multiplicativas y que esa notación es diferente a la notación de una multiplicación. No obstante, expresaron multiplicaciones por medio de notaciones de potencias, como se ha indicado. Así, en las respuestas dadas por los estudiantes que se muestran en la figura 3 se observaron dos modos distintos de escribir el producto 9×6 y otros dos modos de expresar el producto 6×9. Igualmente, manteniendo los mismos códigos, en la figura 4 se muestran las notaciones de los productos 9×4 y 4×9.

Hay una disparidad entre el código de las potencias enésimas y la expresión de un producto de dos factores distintos que se tratan de acomodar al formato de esta notación. Su confusión muestra la falta de dominio de las destrezas básicas y de los términos y notaciones de las potencias. Cuando a los alumnos se les propone la expresión 3^3 como respuesta a la pregunta ninguno de ellos parece capaz de interpretarla.

Cuando en otro momento la maestra escribe $9^6 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$, tampoco parecen ver contradicción alguna entre esta expresión y el producto 9×6, al que se supone representa.

Llegados a este punto, los alumnos continuaron su trabajo con los compañeros sin que, aparentemente, superasen las concepciones insuficientes descritas, ni aportasen nuevas interpretaciones a la pregunta inicial. La sesión se cerró sin que los alumnos conectaran sus concepciones parciales con el concepto cuyo dominio se quería reforzar.

Conocimiento de la maestra

Relaciones de comunicación en el aula

Para obtener una respuesta a la cuestión planteada, en primera opción los alumnos realizaron un conteo del total de cuadritos en cada una de las caras y consideraron como dato final el total de cuadritos en la superficie del cubo. Con menor convicción, en segunda opción, interpretaron las unidades como aristas, y contaron el total de aristas en los cuadritos unidad de una de las caras o de la cara del cubo.

La actuación de la maestra se resume en las figuras 5 y 6 que muestran la respuesta convencional a la pregunta planteada por ella. La maestra no interpreta que los alumnos no han entendido la pregunta, reiterando la respuesta formal. La maestra no considera ni valora la explicación de los alumnos. Se produce un fallo de comunicación con los escolares y la falta de consideración para sus propuestas hacen que las explicaciones de la maestra carezcan de sentido para ellos.

La incomunicación entre alumnos y maestra se ocasiona por que los alumnos generan concepciones distintas, insuficientes, que no son atendidas por la maestra.

La primera concepción inadecuada se muestra en la interpretación que los alumnos han hecho de la pregunta planteada. Parece claro que cuando la maestra pregunta por el número total de cubos unidad (cuerpos) en el cubo mayor, los estudiantes responden con el número total de cuadraditos (superficies), o bien con el número de aristas (longitudes) que se encuentran sobre las caras del cubo. No identifican los cubitos, que no son visibles, sino que singularizan y cuentan las unidades de superficie, o bien las de longitud, que si son visibles. Este conflicto, con una u otra variante, se observa en la totalidad de las respuestas y se fundamenta en los sentidos que proporciona el material a la relación solicitada.

El segundo conflicto de los alumnos que se identifica es por motivo de una interpretación inadecuada en la escritura de las potencias. Las notaciones que los alumnos han empleado no se atienen al convenio de escritura de potencias. Cuando se les pide que expresen el dato encontrado como una potencia, que para ellos consiste en el total de cuadritos en todas las caras del cubo, ese resultado viene dado por el producto 9×6, o bien 6×9. Al escribir esas operaciones con la notación de potencia fuerzan su respuesta con alguna de las expresiones de la figura 3. Tampoco las notaciones de la figura 4 expresan los productos 9×4 o 4×9, que fueron los datos que los estudiantes indicaron verbalmente. La maestra tampoco entendió que las expresiones escritas respondieran a algún criterio sobre el cual se pudiera razonar con los alumnos. Se limitó a obviarlas y reiterar la expresión estándar correcta.

Sobre el conocimiento didáctico de la maestra

La maestra pone de manifiesto en esta experiencia su conocimiento didáctico sobre el concepto de potencia enésima de un número. El conocimiento didáctico se establece desde el dominio de su significado junto con el conocimiento sobre el aprendizaje, sobre la enseñanza y sobre la evaluación de dicho contenido (Rico, 2015, 35). Parte del conocimiento didáctico de la maestra se muestra en el objetivo que plantea y en su capacidad de seleccionar actividades para sus alumnos, con las cuales centrará su trabajo, así como en sus propias actuaciones.

El conocimiento didáctico de la maestra debiera identificar los significados elaborados por los escolares para sus concepciones sobre el contenido matemático; ayudarles a entender, interpretar y coordinar sus argumentos; orientar e incentivarles en la superación de concepciones incompletas; apoyarles y reforzar sus oportunidades de aprendizaje; proponerles nuevas demandas cognitivas. Nada de eso se hizo, si bien la maestra hubiera podido abordar algunas de esas actividades mediante diálogo y participación.

Esta experiencia muestra que la reorientación de las concepciones de los escolares no se puede improvisar ya que requiere de tareas específicas que sinteticen un concepto más elaborado a partir de la integración de las concepciones y conocimientos parciales que expresan los alumnos. Ante la dificultad de inventar esta secuencia, la maestra opta por reiterar los datos básicos que integran el cubo de Rubik con el conocimiento «correcto» sobre potencias. Hay $3 \times 3 \times 3$ cubitos unidad que componen el cubo mayor y este producto se escribe con la notación 3^3.

Este ejemplo muestra lo lejos que puede encontrarse el conocimiento formal estándar de las concepciones significativas y parciales que tienen los escolares sobre un mismo concepto. Entender ese camino constituye parte importante del conocimiento didáctico del profesor, recorrerlo con los escolares requiere de un dominio técnico, hacerlo inteligible es trabajo de la práctica. El conocimiento didáctico fundamenta el significado del contenido matemático correspondiente y lo implementa.

Reflexión final

En el aprendizaje de conceptos matemáticos intervienen una serie de datos, relaciones y procedimientos difíciles de delimitar y acotar. Lo que un profesor conoce, así como su actuación en clase, tiene influencia determinante en lo que aprende el estudiante. Como se ha puesto de manifiesto en la sesión de clase descrita, el correcto conocimiento matemático de la maestra, por sí mismo, no pudo garantizar una instrucción efectiva. Las carencias en su conocimiento didáctico impidieron que los estudiantes pudieran superar las concepciones parciales emergentes.

Nos guiamos por la convicción de que el conocimiento didáctico del profesor es cauce y condición para que los alumnos puedan construir su propio conocimiento matemático. Hemos indicado aquellas intervenciones con que la maestra atendió a las concepciones expresadas por los escolares. Centramos así nuestra atención en sus carencias en el conocimiento didáctico que se infieren de sus actuaciones y de las concepciones erróneas no superadas por los alumnos.

En la práctica docente, el profesor puede abordar la planificación de la enseñanza de un contenido matemático

> poniendo en juego su conocimiento didáctico al seleccionar conceptos y procedimientos y formular tareas, secuenciarlas y proponer actividades. En esa planificación, el profesor necesita de comprensión y dominio del contenido para tomar decisiones sobre qué conceptos, procedimientos, representaciones y fenómenos considera relevantes; qué expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje considera que se deben lograr, abordar y diseñar, respectivamente; y qué tareas debe proponer a los estudiantes para que tengan oportunidad de lograr esas expectativas de aprendizaje y superar esas limitaciones. El conocimiento didáctico del contenido implica estos y otros aspectos de las decisiones que el profesor toma en su proceso de planificación. (Castro, Rico y Gómez, 2015)

De cuál conocimiento crítico debe disponer un profesor para incentivar que sus estudiantes aprendan es objeto de estudio para los investigadores. Para nosotros el conocimiento didáctico es esencial en el trabajo de los profesores, como este trabajo pone de manifiesto. Punto clave del conocimiento didáctico, que forma parte de la competencia profesional del profesor de matemáticas, radica en integrar las concepciones parciales de los estudiantes mediante definiciones personales, coherentes con significados formales avanzados.

Referencias bibliográficas

Cajori, F. (1974), *A History of Mathematical Notations, Vol. 1*, Open Court Pub. Com, La Salle, Illinois.

Castro, E., L. Rico y P. Gómez (2015), «La enseñanza inicial del concepto de fracción por maestros en formación», *Contextos Educativos,* n.º 18, 9-23.

Fernández-Plaza, J. A. (2015), *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto,* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada. <http://fqm193.ugr.es/~jafernandez/produccion-cientifica/tesis/>

Rico , L. (2012), «Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática», *Avances de Investigación en Educación Matemática,* n.º 1, 39-63, <http://www.aiem.es/index.php/aiem/index>.

— (2015), «Matemáticas escolares y conocimiento didáctico», en P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria,* Pirámide, Madrid, España, 21-40.

Luis Rico Romero
<lrico@ugr.es>

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
<jfruiz@ugr.es>

José Antonio Fernández Plaza
<joseanfplaza@ugr.es>

Elena Castro Rodríguez
<elenacastro@ugr.es>

Enrique Martín Fernández
<enrique_martin_f@hotmail.com >

Miguel Vílchez Marín
<mvm243@hotmail.com>

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada