

Manipular, representar y describir figuras planas

DAVID BARBA URIACH
CECILIA CALVO PESCE

El@s tienen
la palabra

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

Continuando haciendo propuestas en este sentido, en esta ocasión tratamos el trabajo con geometría plana. Ya tocamos este tema de manera tangencial en otras dos entregas anteriores dedicada a la geometría, pero en ambos casos lo hicimos en relación a los objetos tridimensionales y sus diferentes representaciones planas (*Suma*, n.º 71 y n.º 75).

Hemos decidido hablar de este tema manteniéndonos algo alejados de las actividades de medida que habitualmente ocupan la mayor parte del tiempo de aula dedicado a la geometría plana: cálculo de áreas, de perímetros, medición de ángulos, etc. Éstas son actividades que ya comentamos en la octava entrega de esta sección (*Suma*, n.º 77).

Las actividades que comentaremos en esta entrega proponen el trabajo con materiales manipulativos y

la representación de figuras planas como punto de partida para hablar sobre esas figuras, para describirlas y clasificarlas.

Manipular

Tal como comentamos en la introducción, creemos que el trabajo con materiales manipulativos, además de ser indispensable para generar aprendizajes geométricos, es un excelente punto de partida para promover discusiones en el aula en la línea que siempre defendemos en las entregas de *Ell@s tienen la palabra*. Hemos elegido tres materiales de fácil acceso para ilustrar con ejemplos el tipo de actividades que creemos que deberían tener lugar en las clases que dedicamos a la geometría en Primaria.

Barras de Meccano

El estudio de las propiedades de figuras «articuladas» es una de las señas de identidad de las propuestas de geometría dinámica realizadas por Emma Castelnuovo en la década de 1960. Si bien el material inicial para construir esos polígonos articulados eran simples barras del popular juego del Meccano, Castelnuovo diseñó un material de plástico que acom-

pañó de algunas piezas extra que aumentan enormemente las posibilidades didácticas del material. Tal como se puede ver en la imagen 1 las nuevas piezas incluyen ángulos rígidos y gomas (que pueden servir para marcar las diagonales cuando las barras juegan el papel de los lados de un polígono o los lados cuando las barras juegan el papel de las diagonales¹).

Estos agregados permiten, por ejemplo, estudiar los cuadriláteros que tienen diagonales iguales que se cortan en su punto medio: se cogen dos barras de la misma longitud, se unen por su punto medio y se mueven hasta que el alumno «descubre» que siempre tenemos entre manos un rectángulo y de aquí podemos construir una definición alternativa para esta familia de cuadriláteros.

Entre muchos ejemplos de actividades para proponer a los alumnos con este material² destacamos una propuesta para trabajar la clasificación de triángulos en un ambiente de resolución de problemas:

Con barras de 3, 4 y 5 cm, ¿cuántos triángulos diferentes puedes obtener?

Como se ve en la imagen 2, pueden obtenerse diez triángulos diferentes. Pero la actividad no tiene porqué acabar aquí. Podemos proponer una reflexión sobre el pensamiento sistemático:

¿Cómo has pensado para encontrar todas las soluciones?

¿Cómo has evitado dar una misma solución dos veces?

O podemos proponer preguntas que pongan en juego la clasificación de triángulos según los lados o según los ángulos. Por ejemplo:

¿Cuántos de los triángulos encontrados son isósceles?

¿Alguno de los triángulos encontrados es rectángulo?

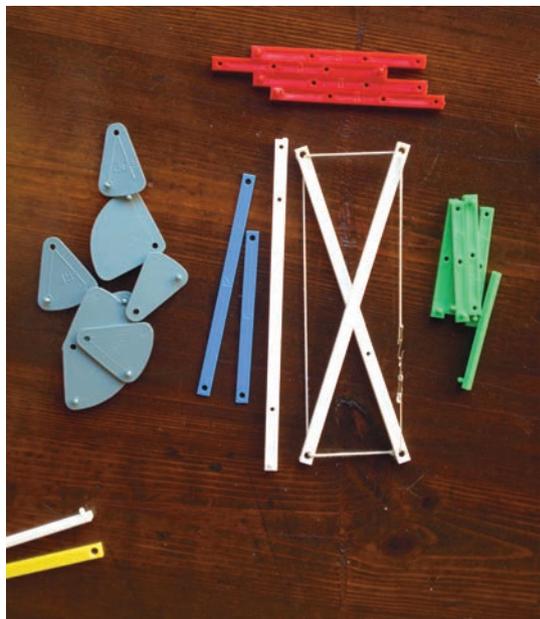


Imagen 1

Sí además de las barras de 3, 4 y 5 cm disponemos de barras de 6 cm la cantidad de triángulos diferentes que podemos construir aumenta a 19 y entre ellos encontraremos de todos los tipos posibles. Contando que las longitudes de sus lados son enteras: hay un triángulo rectángulo, cuatro obtusángulos (dos isósceles y dos escalenos) y catorce acutángulos (uno escaleno y entre los trece isósceles: cuatro son equiláteros).

Un material que permite realizar actividades similares a las realizadas con las barras de Meccano son simples palillos. Una de estas actividades la propone el Proyecto NRICH³: ¿cuántos triángulos se pueden hacer usando 7 palillos? Con esta cantidad de palillos se pueden «construir» dos triángulos, ambos isósceles: uno acutángulo y uno obtusángulo pero vemos muy interesante extender esta pregunta a otras cantidades de palillos. Por ejemplo:

Usando 11 palillos se pueden «construir» cuatro triángulos: tres isósceles (dos acutángulos y el otro obtusángulo) y uno escaleno (acutángulo).

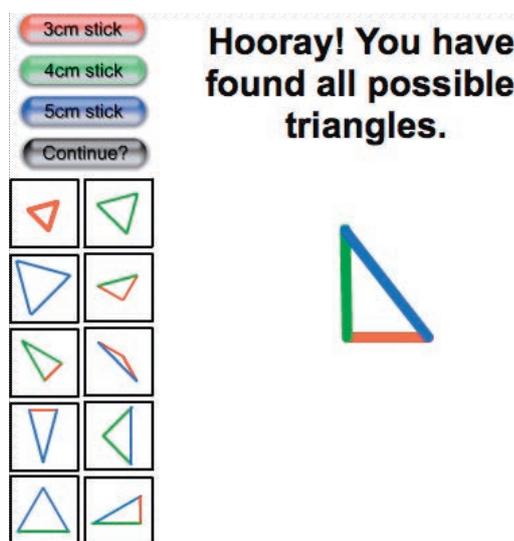


Imagen 2. Applet <<http://nrich.maths.org/2342>> que recrea la tarea de construcción de triángulos cuyos lados miden 3, 4 o 5 cm

Usando 12 palillos se pueden «construir» tres triángulos: dos isósceles (uno de ellos equilátero y los dos acutángulos) y el otro escaleno (rectángulo).

Geoplanos

Construir todos los cuadriláteros posibles sobre un Geoplano de nueve puntos es, seguramente, una de las actividades más conocidas cuando se habla de materiales manipulativos y figuras planas. La primera referencia que tenemos de esta actividad es el artículo escrito por María Ringon Grandesso de la Escuela Elemental de Cartigliano, en la revista «L'insegnamento de la Matematica i delle scienze integrate», vol 2, n.º 3, traducido al catalán por Francesc Esteva para la revista *L'Escaire* en diciembre de 1979⁴. La manera en que está propuesta allí la actividad está impregnada de la manera de trabajar propia de aquella época:

—La búsqueda de todos los cuadriláteros en el geoplano de 9 puntos es solamente una actividad de una serie de 13 tareas. En la línea del descubrimiento dirigido, la ejecución de cada una de estas tareas jugaba el papel de una pieza de un puzzle que en su conjunto asegurarían el objetivo de enseñanza propuesto.

—El proceso para la ejecución de esta tarea en concreto está pensado para ser realizado de manera individual y siguiendo unas pautas muy detalladas. Hay dibujados 16 geoplanos para que el alumno dibuje en cada uno de ellos una de las 16 soluciones posibles y aparecen agrupados para que el alumno vaya dibujando en ellos según las pautas dadas: primero los 4 cuadriláteros no convexos, después los 3 cuadrados, después otros 3 paralelogramos, después 3 cuadriláteros que solo tienen una pareja de lados paralelos y por último, 3 cuadriláteros que no tienen ninguna pareja de lados paralelos.

Hoy en día la actividad de búsqueda de todos los cuadriláteros posibles en el geoplano de 9 puntos continúa siendo perfectamente válida, pero la manera en que la propondríamos sería completamente diferente: mucho más abierta (sin información previa de cuántos cuadriláteros deberán encontrar ni de qué formas), para realizarla en pequeños grupos

y dando mucha importancia a la instancia de puesta en común del trabajo de los grupos. En esta puesta en común:

- cuando un grupo mostrase alguno de los cuadriláteros que ha encontrado, los otros grupos identificarían ese cuadrilátero entre sus soluciones, a pesar que pueda estar representado en otra posición
- utilizaríamos el vocabulario geométrico para describir y comparar los cuadriláteros encontrados por cada grupo o para sugerirles soluciones que aún no hayan encontrado
- discutiríamos cómo se han organizado para no repetir soluciones y para no perder ninguna.

Hay muchas actividades tan ricas como ésta que podemos proponer a nuestros alumnos en relación al uso de geoplanos. Pueden ser llevadas a cabo con geoplanos que tengamos en el aula, con geoplanos virtuales como los que se pueden encontrar en el blog *AppletsPuntMat*⁵ o con geoplanos dibujados sobre el papel. De todas maneras, creemos que la combinación de estos soportes es la mejor experiencia que podemos ofrecer a nuestros alumnos: los geoplanos manipulativos para experimentar, los de papel para que los alumnos vayan registrando sus soluciones y los virtuales para

exponerlas en el momento de hacer la discusión grupal.

En la entrada del blog del Puntmat «Geoplanos y pensamiento exhaustivo»⁶ se analizan unos cuantos ejemplos de propuestas que involucran el uso de geoplanos. En la octava entrega de *Ell@s tienen la palabra* se analizó la tarea de encontrar todos los triángulos en un geoplano de 16 puntos y se agregaba la demanda de calcular las áreas de cada uno de ellos, pero si no queremos entrar en el ámbito de la Medida se podría pedir que clasifiquen los triángulos encontrados.

No todas las actividades tienen que ser formuladas bajo la consigna de encontrar la totalidad de las soluciones, en la imagen 3 podemos ver una reformulación de la actividad de búsqueda de los diecisiete triángulos rectángulos que se pueden encontrar en un geoplano de 25 puntos.

Una variante interesante de las actividades sobre el geoplano es el trabajo sobre el plano dotado de un sistema de coordenadas. En este campo podemos proponer

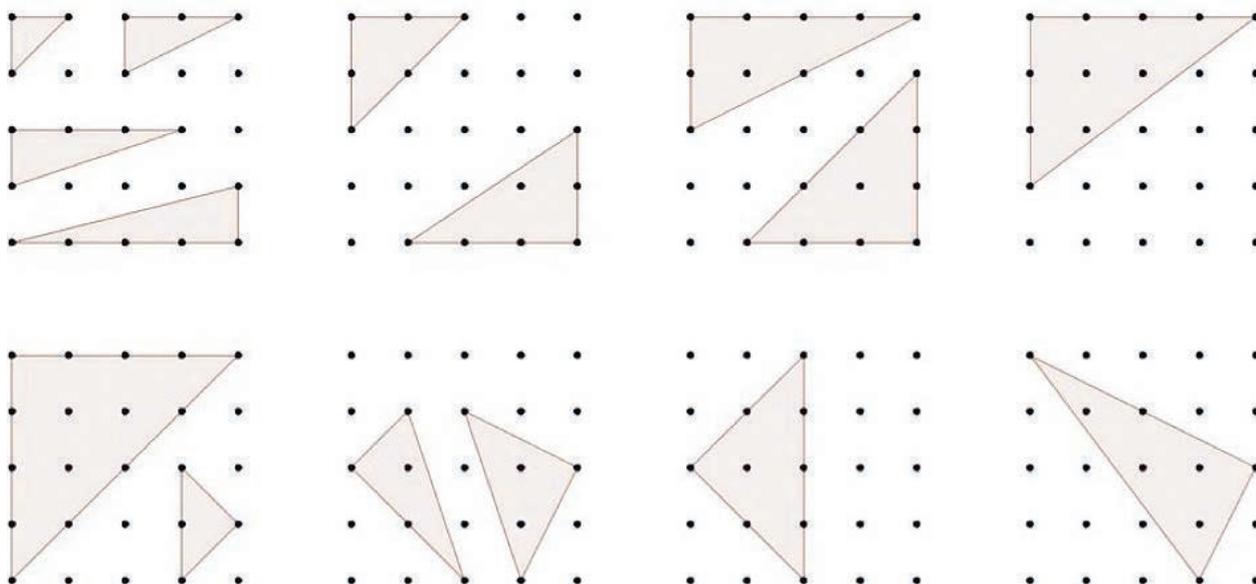


Imagen 3: ¿Qué triángulos rectángulos faltan?

tareas tales como dibujar los puntos de coordenadas (1,6) y (5,6) y todos los cuadrados que tienen esos puntos por vértices. Seguramente a la mayoría no les costará encontrar las dos soluciones que tienen sus lados paralelos a los ejes coordenados, pero siempre encontramos alumnos a los que se les resiste ver una tercera solución, que en este caso tiene las diagonales paralelas a tales ejes. Esta dificultad, que se exhibe más aún si los puntos iniciales en la tarea anterior son (2,7) y (6,5) (imagen 4), se relaciona con nuestra tendencia a presentar las figuras geométricas únicamente en posiciones muy determinadas y que podemos contrarrestar con

la propuesta de actividades cuyo objetivo principal es identificar tales figuras en posiciones atípicas⁷.

Tangrams

Bajo la denominación de Tangram incluimos aquí no sólo al clásico puzzle de siete piezas que aparece en la imagen 5, sino otros puzzles formados por la descomposición de una figura geométrica en otras más pequeñas y a partir de las cuales podemos proponer nuevas construcciones⁸.

Los Tangrams pueden ser tan simples como los de las imágenes 6 y 7, aunque dicha simplicidad no nos engañe, pues son riquísimas las actividades que con ellos podemos proponer.

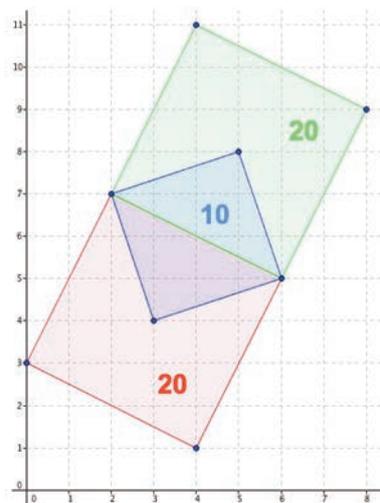
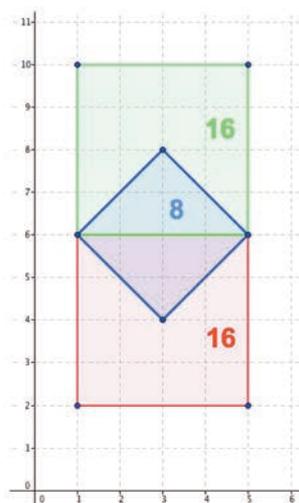


Imagen 4

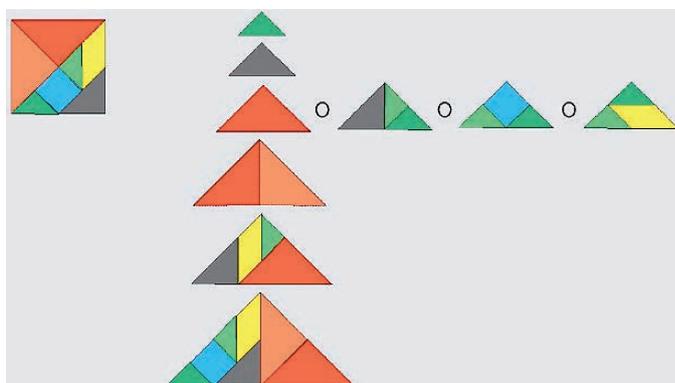


Imagen 5. Los seis triángulos diferentes que se pueden obtener con las piezas del Tangram clásico. Para el tercer triángulo se presentan tres alternativas para obtener esta misma figura utilizando otras piezas (lo que se podría haber hecho en otros casos⁹)

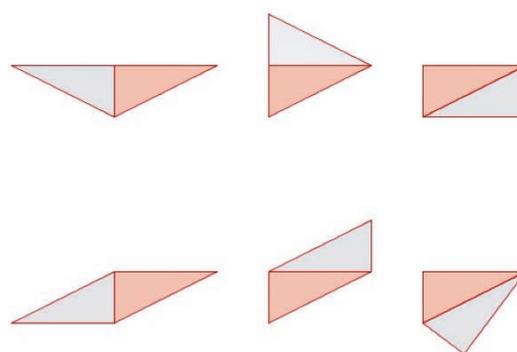


Imagen 6. Los seis polígonos diferentes que pueden obtenerse cuando el Tangram es un simple rectángulo dividido por una de sus diagonales (si el rectángulo inicial es cuadrado, las figuras posibles se reducen a tres)

Se puede plantear otro tipo de tareas cuando tenemos un Tangram dibujado en el que no tiene el mismo significado unir las piezas para formar nuevas figuras. En la imagen 8 vemos uno de los cuadriláteros que se obtiene pintando piezas sobre un Tangram dibujado.

Ante este tipo de situaciones interesa discutir qué cuadriláteros consideraremos: ¿únicamente los que tienen diferente forma o medida, o también los que a pesar de ser iguales se obtienen uniendo piezas diferentes del Tangram? Si nos decidimos por la primera opción, además del que aparece en la imagen 8 podríamos determinar otros ocho cuadriláteros; si nos decidimos por la segunda, habría otros doce.

... la manera de desarrollar este vocabulario no es que los alumnos aprendan listas de nombres con las que etiquetar figuras geométricas, sino que desde un inicio este vocabulario debe presentarse ligado a la necesidad de comunicar

un cuadrado sobre un papel blanco que sobre un papel cuadriculado. Y no es lo mismo dibujar un rectángulo sobre un papel, que hacer uno enorme en el patio de la escuela o que hacerlo con un software de geometría dinámica (por ejemplo, Geogebra) en que

la construcción debe ser realizada de tal manera que al «arrastrar» los vértices no pierda las características que lo hacen ser un rectángulo.

Para atender a esta variedad de características es fundamental que propongamos a los alumnos realizar representaciones en muy variados contextos, ofreciéndoles un espacio para discutir sobre la manera en que consiguieron la representación propuesta dependiendo de las herramientas y el soporte disponibles en ese momento.

Representar

Además de brindar oportunidades a nuestros alumnos para que manipulen debemos invitarlos a que representen figuras planas. Para ello debemos tener muy presente que la dificultad de una tarea y los conocimientos geométricos que esta tarea moviliza dependen de la herramienta que se utiliza en la representación. No es lo mismo construir un triángulo equilátero con regla y compás que hacerlo con regla graduada y semicírculo o que conseguir un triángulo equilátero plegando papel. No es lo mismo dibujar

Describir

Aunque vivimos en un mundo tridimensional donde encontramos infinidad de ejemplos de geometría espacial también hay elementos de geometría plana que podemos describir. En tales descripciones

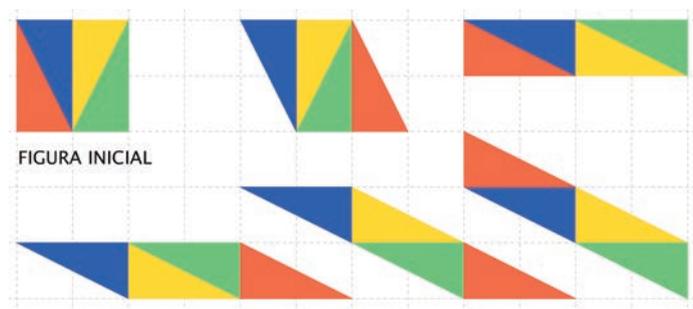


Imagen 7. Los seis paralelogramos que se pueden obtener cuando el Tangram es un cuadrado dividido en cuatro triángulos iguales¹⁰.

Hemos mantenido la cuadrícula para facilitar la comparación entre los diferentes cuadriláteros, cosa que en el aula se puede hacer manipulativamente, ya que los alumnos tienen las piezas entre sus manos.

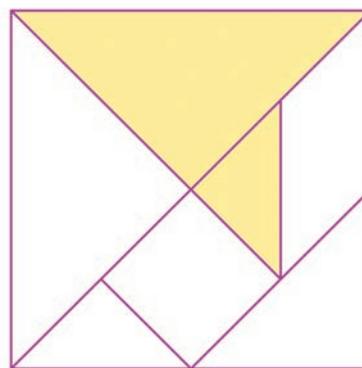


Imagen 8: El único cuadrilátero no convexo que se puede obtener pintando algunas de las piezas de este Tangram

los alumnos han de sentirse invitados a poner en juego el vocabulario que desarrollamos en las clases de geometría y se ha de valorar la riqueza y adecuación de este vocabulario. Pero creemos que la manera de desarrollar este vocabulario no es que los alumnos aprendan listas de nombres con las que etiquetar figuras geométricas sino que desde un inicio este vocabulario debe presentarse ligado a la necesidad de comunicar.

Por ejemplo, cuando los alumnos están buscando los cuadriláteros diferentes que se pueden pintar sobre un Tangram (imagen 8) y creen erróneamente que los tienen todos, les podemos preguntar ¿cuántos trapecios has encontrado? o ¿has encontrado más de un trapecio isósceles?. Es posible que no conozcan estos términos pero en este contexto les interesará preguntar a qué nos referimos para poder interpretar nuestra «pista».

Es importante que los alumnos entiendan que una misma figura se puede definir de maneras muy diferentes y que estas pueden ser perfectamente equivalentes. Por ejemplo, para definir los polígonos cóncavos como el de imagen 8 podemos recurrir a que una diagonal es exterior o a que la medida de uno de sus ángulos interiores es superior a 180 grados¹¹.

También es importante que los maestros no nos sintamos obligados a definir «formalmente» todo lo que nombramos en la clase. Términos como «polígono», «ángulo» o «recta» pueden ser tratados como conceptos primitivos que los alumnos incorporarán a partir de proporcionarles variados ejemplos y no ejemplos de ese concepto sin necesidad de presentarles un enunciado que no les aportará luz a su comprensión.

Describir una figura está muy relacionado con analizar sus propiedades, pero éstas no deberían ser dadas por el maestro, sino que deberían provenir del descubrimiento de regularidades entre los ejemplos que se tienen de ese tipo de figura

Creemos que las definiciones en sí mismas pueden ser el objetivo de una actividad de clase que puede plantearse de forma lúdica:

Tabú Geométrico. Un juego por equipos en que uno de los integrantes debe dar pistas a sus compañeros para que adivinen el nombre de una figura geométrica. Pero en esas pistas tiene prohibido el uso de determinadas palabras (por ejemplo, el reto puede ser que adivinen la palabra «rombo» sin que en las pistas puedan usarse las palabras «dados», «cuatro» y «iguales»).

Juego del Geoplano. Un juego en que cada jugador ha de transformar una figura que hay representada en el geoplano en otra que se le propone listando sus propiedades de tal manera que se premia la economía de cambios que realiza sobre la figura anterior¹².

Puede ser la propuesta de un applet como *Shape Sorter*¹³ en que los alumnos deben clasificar figuras según cumplan con una o dos propiedades de las que aparecen habitualmente en las definiciones de diferentes tipos de polígonos.

O puede ser una actividad de discusión sobre los enunciados de las definiciones que usamos: ¿por qué decimos que un triángulo es obtusángulo si tiene un ángulo obtuso pero no alcanza tener un ángulo agudo para ser acutángulo? ¿por qué podemos etiquetar cualquier cuadrado como «rombo» pero no podemos etiquetar cualquier rombo como «cuadrado»?

Es importante que cuando trabajamos en este bloque temático no perdamos las buenas costumbres de promover que sean los alumnos los que tengan la palabra. Describir una figura está muy relacionado con analizar sus propiedades pero éstas no deberían ser dadas por el maestro, sino que deberían provenir del descubrimiento de regularidades entre los ejemplos que se tienen de ese tipo de figura.

El uso de software de geometría dinámica amplía hasta el infinito el repertorio de ejemplos sobre un tipo de figuras y favorece por ello el descubrimiento de estas regularidades: las diagonales de un rombo

siempre son perpendiculares, los lados opuestos de un paralelogramo siempre miden lo mismo, en un triángulo la suma de las longitudes de los lados más pequeños es superior a la longitud del lado más largo, y muchas otras¹⁴.

Reflexión final

En esta entrega de *Ell@s tienen la palabra* hemos comentado actividades que creemos que pueden favorecer dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación y hemos acompañado estas actividades de sugerencias de preguntas que podemos formular para fomentar discusiones ricas

alrededor de la geometría plana. Hemos destacado el uso de materiales manipulativos, la representación con diversas herramientas y sobre diversos soportes y la descripción de figuras como aspectos fundamentales a tener en cuenta en la planificación de las clases que dedicaremos a geometría plana.

Para profundizar

BARBA, D., y C. CALVO (2015), «Treballant el bloc d'espai i forma a través d'activitats», *Perspectiva Escolar*, n.º 380, 20-26.

DAVID BARBA URIACH
Universitat Autònoma de Barcelona

CECILIA CALVO PESCE
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

- 1 Los lectores encontrarán más información sobre este material en:
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2014/05/les-barretes-i-emma-castelnuovo.html>>
- 2 En la entrada del blog del *Puntmat* pueden verse más ejemplos de uso de este material:
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2014/11/les-barretes-i-lemma-castelnuovo-2.html>>
- 3 *Seven Sticks*: <<http://nrich.maths.org/155>>
- 4 Véase este artículo en:
<<https://sites.google.com/site/espaijordiesteve2/lescaire.pdf>>
- 5 <<http://appletspuntmat.blogspot.com/2013/09/geoplans.html>>
- 6 <<http://puntmat.blogspot.com.es/2013/09/geoplans-i-pensament-exhaustiu.html>>
- 7 En este sentido, puede interesar a los lectores la entrada «Cuadrados torcidos» del blog del *PuntMat*:
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2015/03/quadrats-torts.html>>
- 8 Los lectores encontrarán algunos Tangrams virtuales en:
<<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/10/tangrams.html>>
- 9 Una actividad análoga a ésta pide todos los cuadrados que se pueden obtener con las piezas del Tangram: <<http://nrich.maths.org/1>>

- 10 Más información sobre este Tangram en *PuntMat*:
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/05/el-tangram-del-median.html>>
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/06/el-tangram-del-median-2na-part.html>>
- 11 Vale la pena mirar la propuesta que realizan en este sentido Joan Jareño y Sílvia Margelí en:
<<http://www.edu365.cat/primaria/muds/matematiques/concavitat/>>
- 12 Más información en:
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2011/11/joc-del-geopla-definicions-i-propietats.html>>
- 13 <<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2015/04/shape-sorter.html>>
- 14 En el post Geometría Animada del blog del *PuntMat* se puede encontrar información respecto a los films que utilizaba J. L. Nicolet hace más de 50 años con este mismo fin de invitar a los alumnos al descubrimiento de regularidades geométricas a partir de la animación de figuras:
<<http://puntmat.blogspot.com.es/2012/01/geometria-animada.html>>