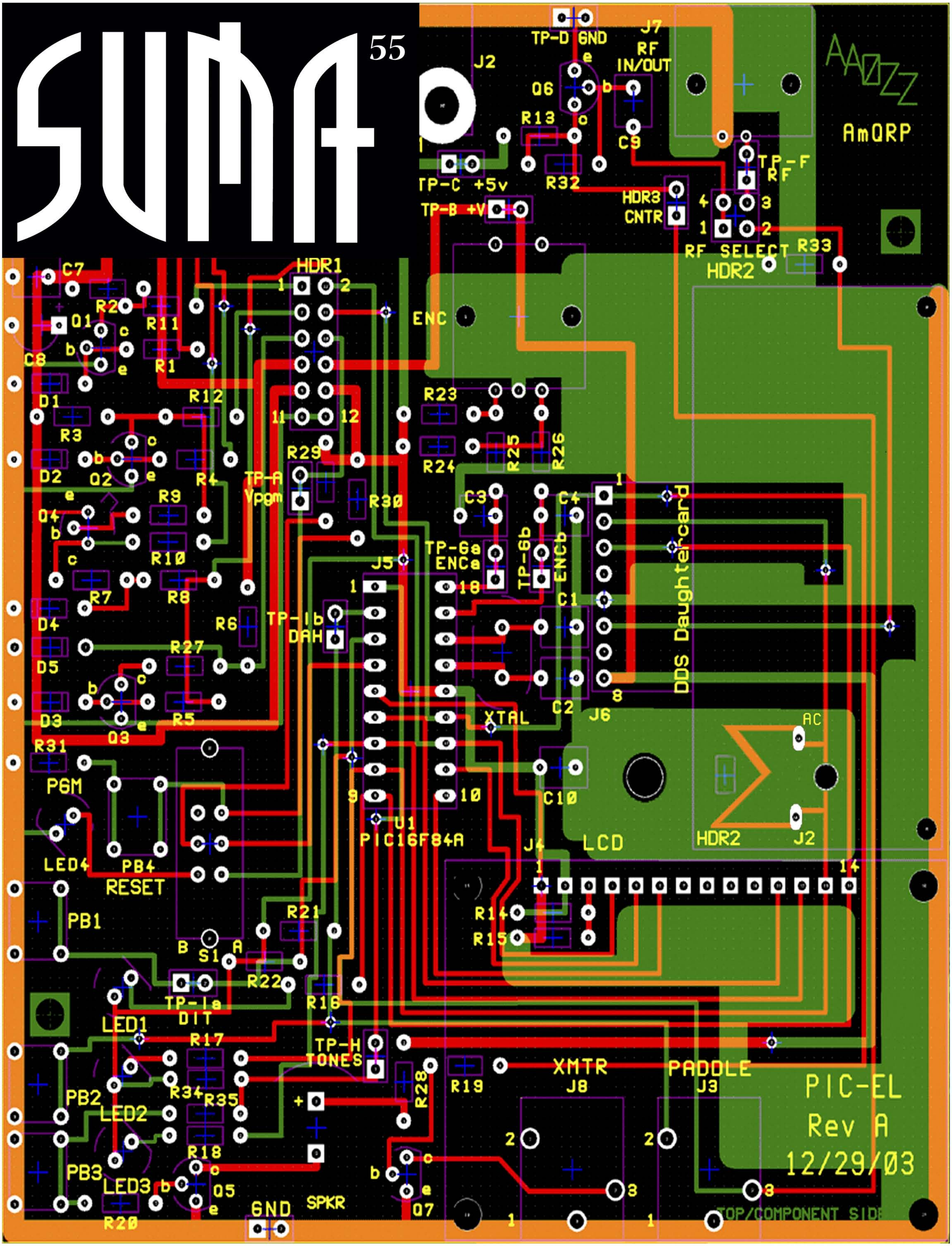
SUMA 55



MADRID · JUNIO 2007 · N.º 55 · ISSN 1130-488X

SUMA 55
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Junio 2007

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

artículos

poliedro

actividades de la FESPM

SUMA 55
Junio 2007

Editorial

Educación matemática y calidad

En 1981, en Barcelona, se celebraron las Primeras Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas que dos ediciones más tarde pasarían a ser conocidas por sus siglas JAEM.

Sevilla en 1982, Zaragoza en 1983 y Santa Cruz de Tenerife en 1984 fueron las etapas sucesivas de ese camino iniciado en Barcelona.

Tras un paréntseís de siete años, una vez constituida la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), las JAEM se reanudaron en el 1991 en Castellón de la Plana. Desde entonces, con periodicidad bienal y sin interrupciones, se han venido celebrando todos los años impares: Badajoz en 1993, Madrid en 1995, Salamanca en 1997, Lugo en 1999, de nuevo en Zaragoza en el 2001, en Canarias en 2003 y, la última edición, en Albacete en el 2005. Este año, las JAEM vuelven de nuevo a Andalucía y se celebrarán en Granada del 4 al 7 de julio. Estamos seguros de que también esta edición será un éxito y damos las gracias a los organizadores, de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales*, que hace sólo unos meses celebraba su XXV aniversario, por todo el trabajo que se están tomando para garantizar ese éxito.*

A lo largo de estos años el movimiento de renovación de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país ha sido liderado por la FESPM y sus manifestaciones se han encauzado a través de cuatro actividades fundamentalmente: Las JAEM, la publicación de la revista SUMA, las Olim-

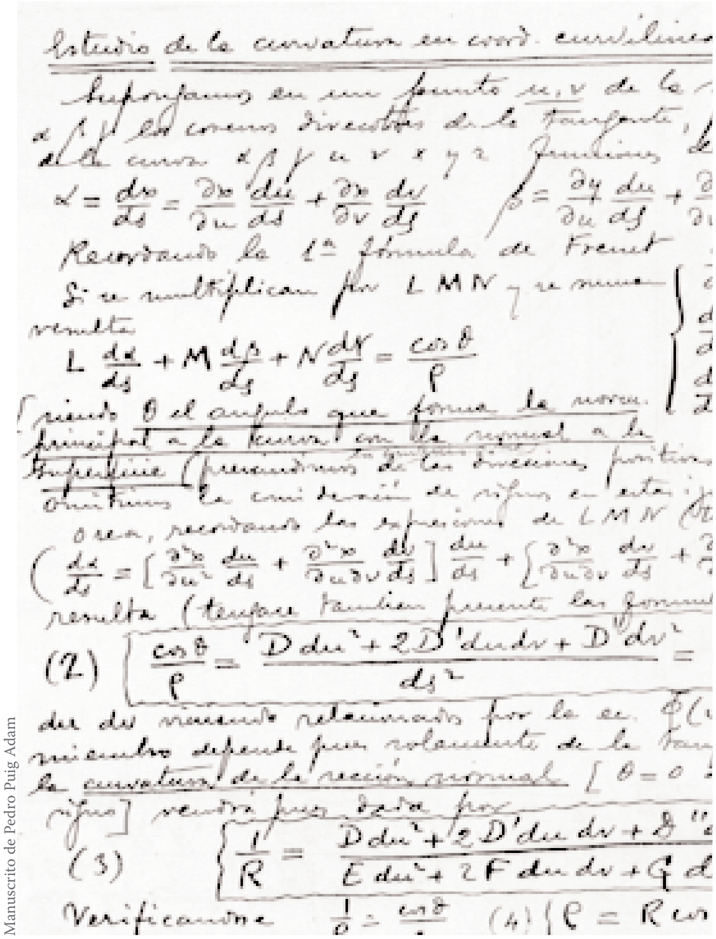
piadas Matemáticas y la celebración desde el 2000 del Día Escolar de las Matemáticas. Pero también a través del trabajo de sus más de cinco mil socios cada día en sus clases.

Los resultados de la educación matemática en nuestro país no son satisfactorios, pero no cabe duda de que sin nuestro trabajo cotidiano por cambiar las cosas hubieran sido mucho peores. Intentar que la calidad de la educación matemática mejore en España es tarea que corresponde –además de a las administraciones– a todos los profesores de los niveles educativos. Liderar los cambios necesarios, por razones que ya empiezan a ser históricas, nos corresponde a nosotros. Pongámonos a ello.

En Puente la Reina (Navarra), del domingo 24 al jueves 28 de junio próximos, tendrá lugar la XVIII Olimpiada Matemática Nacional para alumnos de segundo curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. También para este evento deseamos el mayor de los éxitos.

El 12 de mayo se celebró el octavo Día Escolar de las Matemáticas, coincidiendo con el aniversario del nacimiento de Pedro Puig Adam. El tema de este año ha sido Matemáticas y Educación para la Paz*. El servicio de publicaciones de la FESPM editó, como en ocasiones anteriores, un folleto con propuestas de actividades, que han llevado a cabo miles de alumnos de toda España en esas fechas.*

La celebración de este Día, iniciada en el año 2000, se ha ido consolidando poco a poco. Dos objetivos pueden añadirse ahora para futuras ediciones: deberíamos intentar un cierto reconocimiento oficial por parte de las administraciones educativas de esta celebración y, en segundo lugar, deberíamos hacer que la repercusión mediática de un evento como éste, que acerca a tantos alumnos a la matemática de una manera alternativa, sea más importante. Difundamos esta celebración, extendámosla cada año con actos en todos los centros educativos. Ésa también es una forma de mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. ■



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 55
Junio 2007, pp. 7-20

Los inicios de la teoría de la probabilidad

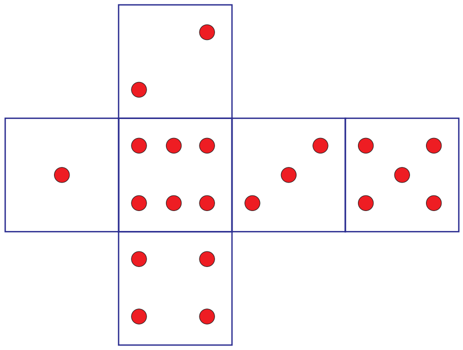
En el presente artículo se aborda, de una manera informal, los orígenes de la teoría del azar, presentándose algunos hitos y problemas históricamente relevantes. Su desarrollo abarca el periodo de tiempo que va desde los orígenes de nuestra civilización hasta finales del siglo XVIII. Por el escrito van desfilando grandes pensadores como: Galileo, Pascal, Fermat, Huygens, J. Bernoulli, Laplace y otros.

This article informally deals with the origins of probability theory, introducing some historically relevant milestones and problems. Its development spans the period from the origins of our civilization to the end of the 18th century. Great thinkers, such as: Galileo, Pascal, Huygens, J. Bernoulli, Laplace and some others pass through the document.

Los conceptos de azar y probabilidad son tan antiguos como la civilización misma. Hay que señalar que el sentido del término probabilidad es sumamente complejo debido al distinto uso que se hace de él, tanto en el lenguaje común como en el de las ciencias, incluyendo los campos de las matemáticas y la filosofía. El mismo concepto de probabilidad puede tener una doble vertiente, epistemológica y aleatoria, pero ambas aparecen sugeridas por un fenómeno muy antiguo: los juegos de azar.

¿Pero dónde comienzan los cálculos acerca del azar y dónde se conectan y funden con el concepto filosófico de azar?

Las pruebas más antiguas de utilización de juegos de azar aparecen en las culturas egipcia y griega. El sabio Herodoto ya nos deja constancia del modo que resolvieron en la antigua Libia una época de hambre que tuvo lugar alrededor del año 1.500 a.C.: jugaban durante todo el día sin parar, de manera que no pudieran sentir hambre, y al día siguiente comían y no jugaban, y de este modo pasaron cerca de 18 años. De igual manera existen pruebas de que unos mil ochocientos años a.C. se jugaba a un precioso juego llamado *perros y chacales*, que consta de un tablero en el que se colocaban unos punzones con cabeza de perro o de chacal según fuese el lanzamiento de unas tabas. También se sabe que hace más de 4.000 años en Irak fueron utilizados unos dados en forma cúbica, de cerámica, y con una ordenación de puntos algo distinta a la habitual; es el dado más antiguo encontrado hasta la fecha.



El destino se ríe de las probabilidades.
E. G. Bulwer-Lytton

Santiago Fernández Fernández
Asesor de Matemáticas del Berritzegune
Bilbao

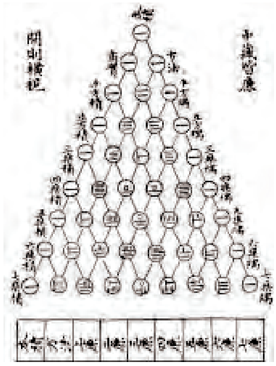
El mismo nombre de azar parece haber transitado desde Siria hasta Europa, y probablemente la flor de azahar, que aparece en la mayoría de los dados de la época, sea el origen de la palabra azar.

Los juegos de azar desde siempre han sido muy populares, y en épocas y ocasiones perseguidos. En Roma el juego alcanzó tal importancia e incidencia en la vida social que llegó a prohibirse en determinadas ocasiones y épocas del año. En las primeras épocas del Cristianismo determinados juegos de azar también fueron reprobados y censurados. El rey Luis XI de Francia, en 1255, también censura los juegos de azar y la fabricación de dados, e inclusive los pone al mismo nivel que la frecuentación de tabernas y la fornicación.

Curiosamente en algunas ocasiones el azar era asimilado a la voluntad de los dioses y en algunas ocasiones jugaba un papel decisorio, así: *Las vacantes importantes en la jerarquía sacerdotal eran adjudicadas por sorteo.*

En paralelo con el estudio de aspectos probabilísticos también son abordados poblemas de carácter combinatorio. Realizando un rápido recorrido por este tipo de situaciones combinatorias podemos decir que ya el famoso libro chino *I-Ching* nos proporciona, con sus combinaciones de triagramas místicos, uno de los ejemplos más antiguos. Entre los filósofos griegos también se encuentran consideraciones sobre distintos problemas que hoy se resolverían con el cálculo combinatorio, pero no hay constancia de que dispusieran de teoría alguna al respecto. El científico latino Boecio (siglo V) también describe con cierto detalle una regla para encontrar las combinaciones de n objetos tomados dos a dos. De igual modo, conviene citar que el astrónomo tudelano A. Ben Meir Ibn Ezra (siglo XI) y el judío catalán Levi Ben Gerson (sigloXIV), estudiaron con cierta profundidad reglas para el cálculo de variaciones y combinaciones, llegando a calcular números combinatorios, que por cierto ya eran conocidos por los científicos chinos en el siglo XIII como lo demuestra el grabado (columna siguiente) de la época.

Como curiosidad en el poema *De Vetula*, escrito por Richard de Fournival (1200-1250), se afirma, correctamente, que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles y calcula de manera exacta los diferentes valores para la suma de los tres dados. Aunque ahora puede parecer una cuestión trivial, en aquella época no lo era, y otros muchos autores erraron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación.



Grabado chino del siglo XIII en el que aparece el triángulo de números combinatorios

Los precursores

> *Es una verdad muy cierta que, cuando no esté a nuestro alcance determinar lo que es verdad, deberemos seguir lo que es más probable.*
> R. Descartes. Discurso del método

Parece claro que desde la antigüedad hasta el Renacimiento se juega sin interrupción a toda clase de juegos de azar (dados, tabas, astrágalos, cartas, etc.); los juegos y las apuestas son muy populares y no distinguen clases sociales. Curiosamente no hay apenas manuales sobre las reglas del juego, lo que hace suponer que la gente conocía las reglas por tradición oral.

Los primeros acercamientos serios a lo que más tarde se llamaría la Probabilidad, son debidos a grandes científicos y matemáticos italianos como: N. Tartaglia, G.F. Peverone, Galileo y G. Cardano. Una de las cuestiones, abordadas hasta la saciedad, es el llamado problema de la división o reparto. En el año 1494 Luca Pacioli (1445-1517) formula el problema de esta manera:

> Un grupo juega a la pelota de modo tal que necesita un total de 60 puntos para ganar el juego y cada gol vale 10 puntos. Las apuestas son de 10 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando se queda con 50 puntos y el otro con 20. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.

Es interesante acercarnos a los trabajos de estos científicos, de la lectura de sus escritos podemos extraer la idea que ellos manejaban de los conceptos relacionados con el mundo del azar. Por ejemplo, ante el problema del reparto, N. Tartaglia (1499-1559) razona del siguiente modo:

> Si suponemos que tenemos que llegar a 6 goles y A ya ha conseguido 5 y B ha conseguido 3, yo digo que el reparto más justo es de 2 a 1, puesto que A está 2 juegos por delante de B. Esto es 1/3 del total de juegos requeridos para ganar. Por lo tanto A debería tomar 1/3 de las apuestas. El remanente se divide equitativamente, dando a A una ventaja sobre B en la proporción 2 a 1.

El mismo Tartaglia no estaba muy conforme con sus razonamientos, reconociendo que:

> La resolución de tal pregunta debe ser judicial más que matemática, de modo que, cualquiera sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar.

Jerónimo Cardano. 1501-1576

Niccolò Fontana Tartaglia. 1499-1559

Galileo Galilei. 1564-1642

Fra Luca Pacioli. 1445-1517

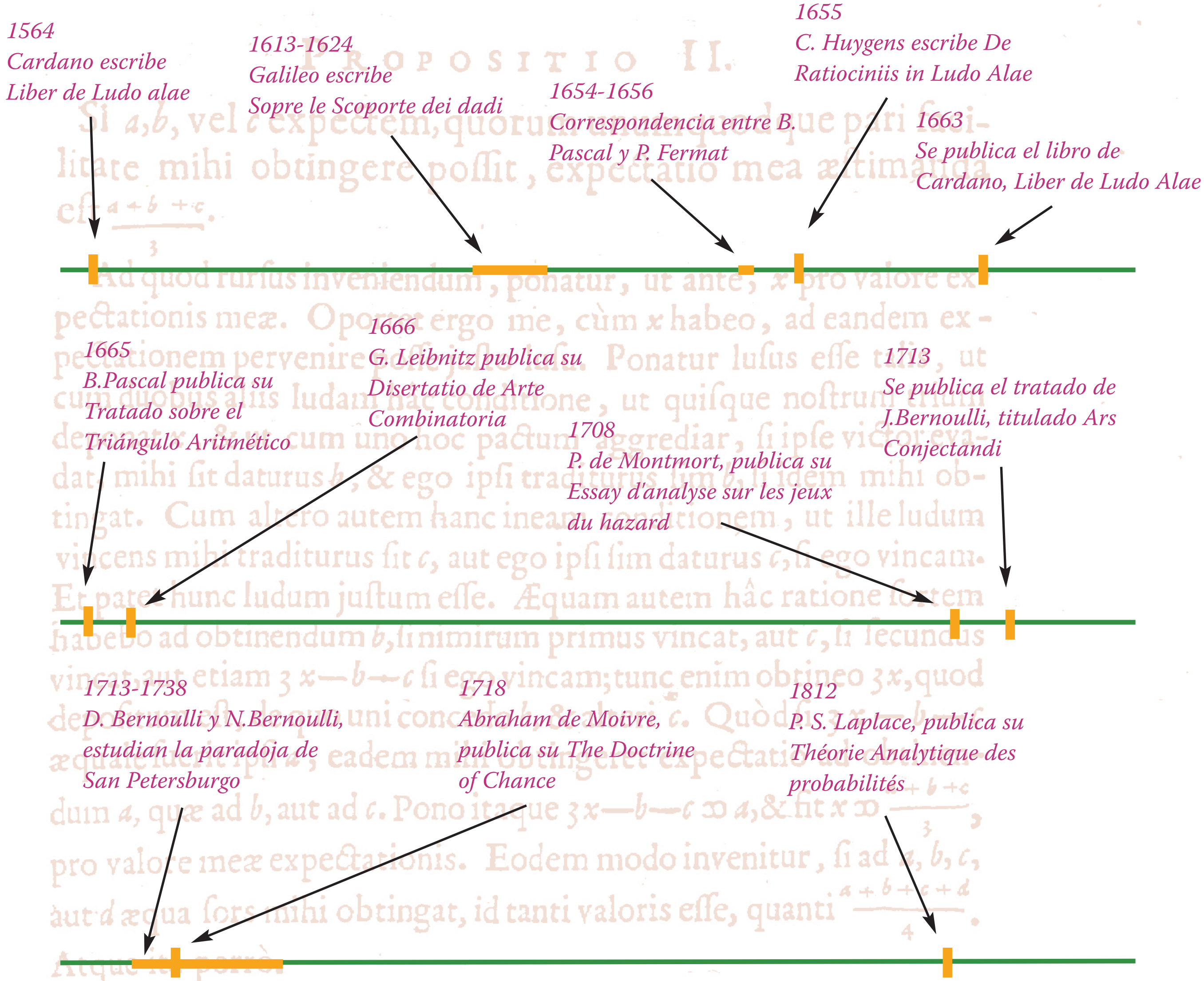
En 1558, G. F. Peverone resuelve este tipo de problemas de manera más correcta que Tartaglia. Su exposición está escrita en un pequeño tratado titulado Due brevi e facili trattati, el primo d'Arithmetica l'altro di Geometria. Presentamos una de las situaciones a título de ejemplo:

> Supongamos que A ganará mediante el siguiente juego y que apuesta una unidad. Si a B también le queda un sólo juego apostará, también una unidad. Esto es, el premio debería dividirse igualmente. Si a B le quedan dos juegos, debería pagar 2 unidades más para llegar a la posición en que le quede un solo juego. Por lo tanto el premio debería dividirse en la forma 3 a 1. Si a B le quedan tres juegos, deberían pagar dos veces más nuevamente,... y así hasta llegar al problema de Pacioli y sería 7 a 1 (en realidad Peverone, por un aparente desliz da la respuesta 6 a 1).

Con la aparición de la imprenta comienzan a emerger tratados poco precisos sobre los diferentes juegos de moda. Se le asigna a G. Cardano el primer tratado relacionado con el mundo del azar, su título: *Liber de Ludo Alae*, es un estudio medianamente organizado, cuyo objetivo es calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados, así como resolver problemas que hemos llamado de la división de lotes. Al carecer de una simbología adecuada recurre constantemente a ejemplos concretos. A lo largo de todo el tratado no utiliza los teoremas de unión e intersección sino que se sirve especialmente de dos métodos: recuento de las distintas posibilidades y el concepto de ganancia media. Su obra comienza, curiosamente, con una serie de consejos moralizantes sobre los peligros del juego.

En la resolución de los problemas planteados, Cardano trabajó con los conceptos de la definición clásica de la probabilidad, aunque no los definió explícitamente. En concreto, introdujo la idea de asignar una probabilidad p entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables, y

Línea de tiempo de los principales acontecimientos relacionados con la probabilidad



Los teoremas básicos de la probabilidad

Teorema de estabilidad de las medias (Graunt, hacia 1662)
Teorema de la suma (Bayes)
Teorema de la multiplicación e independencia de sucesos (De Moivre)
Teorema de Bayes (Bayes y Laplace)
Ley de los Grandes Números (J. Bernoulli, hacia 1700)
Teorema Central del Límite (De Moivre, hacia 1711)

esbozó de una forma rudimentaria lo que ahora se conoce como la *ley de los grandes números*, al afirmar que si la probabilidad de una suceso es *p*, después de un número grande de repeticiones *n,* lo más razonable es apostar a que ocurrirá alrededor de *np* veces. Sin embargo, Cardano no alcanzó a reconocer la importancia teórica de estos conceptos, ya que consideraba estas relaciones como meramente aritméticas, más que como una medida de la posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.

El libro de G. Cardano si bien fue escrito alrededor de 1.564 no fue impreso hasta el año 1.663, esto explica, que las ideas que están contenidas en el tratado permanecieran, en buena parte, desconocidas para la mayoría de los estudiosos hasta bastantes años después de su muerte.

Años más tarde el científico italiano Galileo Galilei volvió a estudiar y resolver algunos de los problemas ya planteados por Cardano. Galileo también escribió un tratado sobre este tema, aproximadamente entre 1613 y 1624, inicialmente se denominó *Sopre le Scoperte dei dadi* (Sobre los descubrimientos del dado), pero en las obras escogidas de Galileo, publicadas en 1718 aparece como *Consideratione sopra il Giuco dei Dadi*. Uno de los problemas estudiados por Galileo es el siguiente:

Al tirar un dado equilibrado, con igual probabilidad se obtienen 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos. En caso de tirar dos dados la suma de los puntos obtenidos está comprendida entre 2 y 12. Tanto el 9 como el 10, a partir de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 se pueden obtener de dos formas distintas: 9=3+6=4+5, y 10=4+6=5+5. En el problema con tres dados tanto el 9 como el 10 se obtienen de varias formas, que son las siguientes: suma 10 se obtiene en cualquiera de los sucesos {(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4) y (3,3,4)} mientras que los casos favorables de suma 9 son {(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4) y (3,3,3)}; en los dos casos hay 6 eventos favorables. ¿Cómo es posible entonces que al tirar muchas veces los tres dados me salga más veces la suma 10 que la 9?

Galileo, que tenía sentido de la probabilidad digno de un genio, realiza un cuidadoso análisis de todas las sumas de puntos que pueden obtenerse al lanzar tres dados, y muestra que de los 216 casos posibles, 27 son favorables a que la suma sea 10, y 25 a que la suma sea 9. Es notable su razonamiento, ya que la solución es análoga a la que actualmente se hace para resolver este tipo de problemas, lo que nos da motivos para pensar que el concepto de caras equiprobables de un dado correcto ya era conocido en el siglo XVI. Sin embargo, la principal contribución de Galileo a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos: los errores *sistemáticos*, debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores *aleatorios*, que varían impredeciblemente de una medida a otra. Esta clasificación sigue en vigor actualmente. Con estas ideas, Galileo no sólo contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad, sino que puso las bases para el nacimiento de la estadística.

En resumen, en la mayoría de los tratados de la época los problemas abordados son de dos tipos: problemas de recuento de posibilidades (combinatoria) y de juegos de azar en los que hay que repartir unas ganancias en un juego interrumpido antes de su conclusión. En esa época también fueron abordadas situaciones combinatorias, por una parte están ligadas a la resolución del problema de las partes y por otra asociados a la magia alquimista de los signos; de hecho, se suele mencionar al gran alquimista mallorquí R. Llull (siglo XIII) como el fundador de la teoría de combinaciones. Llull deseaba representar todos los elementos del universo mediante signos verdaderos y luego generando todas las combinaciones posibles de los mismos, producir verdaderos signos para todos los compuestos posibles.

Nacimiento de las primeras teorías probabilísticas

> *Si bien en los juegos de azar puro los resultados son inciertos la esperanza que un jugador tiene de perder o ganar posee sin embargo un valor determinado.*
>
> Ch. Huygens (1657): El cálculo en los juegos de azar

Como hemos visto fueron los científicos italianos los primeros en preocuparse por el estudio de la teoría de la probabilidad, pero el impulso fundamental en el desarrollo de esta teoría no se da en Italia, sino en Francia.

Conviene recordar que en la sociedad francesa del siglo XVII, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional.

La mayoría de los historiadores coinciden en atribuir a los trabajos de Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) las bases sobre las que posteriormente se asienta la moderna teoría de la probabilidad. Pascal se interesó por este tema a raíz de unas cuestiones que le había propuesto el caballero De Méré. La historia es más o menos la siguiente: durante cierto viaje, hacia el año 1652, camino de Poitou, el espiritual Pascal coincidió con el mundano A. Gombauld, señor de Baussay, y más conocido con el sobrenombre De Méré, tal caballero era considerado como un jugador profesional, apasionado por el juego de los dados y las cartas, además de ser un hombre ilustrado e inteligente. Resulta que en el fragor de la conversación éste le propuso una serie de problemas que rápidamente cautivaron la atención del joven Pascal. El primero de los problemas estaba enunciado en los siguientes términos:

Se lanzan *n* veces dos dados cúbicos. Calcular el número de veces que es preciso lanzar los dados para apostar con ventaja al suceso de obtención del seis en los dos dados.

Meré le hace saber a Pascal que para él dos respuestas son posibles: 24 y 25. La primera obtenida mediante una regla teórica y la segunda mediante su experiencia de jugador profesional. Posteriormente le plantea otro problema, que Pacioli y Cardano habían estudiado un siglo antes, conocido como el problema des partis o del reparto. El problema en cuestión era el siguiente:

Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?

Durante dos años Pascal ponderó las cuestiones y finalmente comunicó sus resultados al jurista francés Pierre Fermat.

En una de las primeras cartas de la extensa correspondencia matemática que mantuvieron a lo largo de dos años. Pascal narra a Fermat el encuentro con De Meré y le hace saber cómo ha resuelto el problema del reparto en la partida interrumpida:

He aquí aproximadamente cómo lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno ha puesto en el juego 32 monedas. Supongamos que el primero tenga dos y el otro una; ahora juegan una partida cuya suerte es que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 monedas; si el otro la gana, son dos partidas contra dos partidas, y por consiguiente, si quieren separarse, es preciso que retire cada uno lo que ha puesto, a saber, 32 monedas cada uno. Considerad, señor, que si gana el primero, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: *estoy seguro de tener 32 monedas, porque la pérdida misma me las da; pero para las otras 32, quizá las tendré yo, quizás las tendréis vos; el azar es igual repartamos, pues, estas 32 monedas, mitad por mitad, y me dais, además de éstos las 32 monedas que me corresponden con seguridad.* Tendrá, pues, 48 monedas y el otro 16.

La carta concluye con una frase muy conocida:

El caballero Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis, un gran defecto. Carta de Pascal a Fermat (20/7/1654).

Blaise Pascal. 1623-1662

Pierre Fermat. 1601-1665

Casi al unísono Fermat resolvió el problema por un método completamente distinto, lo cual fue para Pascal muy estimulante. *Ya ve*, escribió B. Pascal, *que la verdad es la misma en Toulouse que en París.*

El método de Pascal consistía en el empleo de la ecuación en diferencias con el fin de determinar las probabilidades sucesivas de los jugadores, pasando de los números más pequeños a los siguientes. Pero su método estaba restringido al caso de dos jugadores. Sin embargo el método de Fermat se podía extender a un número cualquiera de jugadores, estando basado en combinaciones. Después del intercambio de algunas cartas entre ellos, Pascal reconoció la generalidad del método de Fermat.

A lo largo de la correspondencia puede contemplarse, no sólo la evolución de los problemas sino la admiración creciente que Pascal siente por el ingenio de Fermat, como lo demuestra la siguiente carta:

> Señor,
>
> Su última carta me ha satisfecho a la perfección. Admiro su método para los lotes, tanto más porque lo comprendo bien; es enteramente suyo, no tiene nada en común con el mío, y llega fácilmente al mismo resultado. Nuestra comprensión se ha establecido.
>
> Pero Señor, si en esto he competido con Vd., deberá buscar en otra .parte quien le siga en sus intervenciones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho Vd. el honor de enviarme. Le confieso que esto me sobrepasa ampliamente; sólo soy capaz de admirarlas y le suplico humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlas. Todos nuestros amigos las vieron el sábado pasado y las apreciaron de todo corazón: no es fácil soportar la espera de cosas tan bellas y deseables. Piense pues en ello, si le place y esté vd. seguro de que soy, etc.
>
> Carta de Pascal a Fermat (27/10/1654)

A través de esta correspondencia había nacido una nueva ciencia, que tuvo la mala suerte de coincidir con los grandes descubrimientos de la matemática. Efectivamente, el siglo XVII puede considerarse el siglo de oro de las matemáticas: nacimiento y desarrollo del cálculo infinitesimal, teoría de la gravitación, desarrollo de la geometría analítica, etc.

Pascal también aplicó los razonamientos probabilísticos sobre la toma de decisiones a la teología y trató de demostrar la existencia de Dios. Dice Pascal:

> Vous avez deux choses à perdre: le vrai et le bien, et deux choses à engager: votre raison et votre volonté, votre connaissance et votre béatitude; et votre nature a deux choses à fuir: l'erreur et la misère. Votre raison n'est pas plus blessée, en choisissant l'un que l'autre, puisqu'il faut nécessairement choisir. Voilà un point vidé. Mais votre béatitude? Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout; si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez donc qu'il est, sans hésiter.
>
> Pensées, Blaise Pascal (1670)

Su argumento era el siguiente: Dios existe o no existe; si no existe, da igual creer en él que no creer; si existe, creer que no existe provoca la condenación eterna, mientras que creer trae la salvación. Como la salvación es preferible a la condenación (en términos probabilísticos, la ganancia es mayor), una persona razonable actuará como si Dios existiera, aunque crea que la probabilidad de que exista es pequeña. Este argumento se conoce como La apuesta de Pascal.

Años más tarde de la correspondencia establecida con Fermat, exactamente el año 1665, Pascal publica su Tratado sobre el Triángulo Aritmético, la más importante contribución realizada hasta entonces en el campo de la combinatoria. El libro comienza con la construcción de lo que se dio en llamar el triángulo de Pascal, aunque ya era conocido desde cinco siglos antes. Como sabemos el triángulo es de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

Pascal realiza un estudio pormenorizado de las propiedades de dichos números, ocupándose, especialmente, del cálculo y la disposición de los números (llamados números combinatorios) que componen el famoso triángulo. La más importante es, sin duda alguna, la obtención de una fórmula para obtener los números combinatorios. Es la siguiente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Identificando ese número como el número de combinaciones de k elementos en un conjunto de n elementos.

Finalmente Pascal aplicó todos estos resultados para producir una solución sistemática del problema del reparto de apuestas: si al jugador A le faltan r juegos para ganar y al jugador B le faltan s, las apuestas deberían dividirse de manera que al jugador *A* le correspondiera una parte proporcional al cociente entre

$$\sum_{k=1}^{s-1}\binom{n}{k} \quad \text{y} \quad 2^n, \text{donde } n = r + s - 1$$

Por esa misma época, el año 1655, el joven holandés Christian Huygens (1629-1695) entró en contacto con el círculo intelectual de Pascal, Fermat, Roberval, etc. El poder compartir de primera mano las inquietudes científicas de esos grandes pensadores fue crucial para su devenir intelectual, tanto es así que a su vuelta a Holanda comenzó a trabajar intensamente en problemas relativos al cálculo de probabilidades. De estas inquietudes intelectuales surgió un pequeño tratado, escrito en holandés: Van Rekeningh in Spelan van Geluk (el cálculo en los juegos de azar), posteriormente se hizo una versión latina De Ratiociniis in Ludo Aleae (1657).

Christian Huygens. 1629-1695

En 1656, C. Huygens envió su manuscrito a París con la esperanza de que Fermat o incluso Pascal pudieran llegar a estudiarlo y aprobar sus planteamientos. La respuesta tardó cuatro meses en llegar, pero la confirmación de su tabajo fue muy satisfactoria para Huygens. Más aún, Pascal le envió otro problema sobre el azar y Fermat le envió dos cuestiones, que junto con otros dos problemas diseñados por él mismo, fueron añadidos al final del libro y durante unos sesenta años constituyeron las pruebas estándar mediante las cuales se medía la habilidad del lector en la doctrina del azar; cabe citar que A. de Moivre, Jacques Bernoulli, Spinoza y Leibniz, entre otros, publicaron soluciones de algunos de estos problemas. Los cinco problemas en cuestión son los siguientes:

A y *B* juegan uno contra el otro, con dos dados, bajo la condicion de que *A* gana si obtiene 6 puntos, y *B* gana si obtiene 7 puntos. Le corresponde el primer tiro a *A*, los dos siguientes a *B*, los otros dos siguientes a *A*, y así sucesivamente, hasta que gane alguno de los dos jugadores. La pregunta es ¿Cuál es la probabilidad de *A* sobre *B*?

Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656, y resuelto por Huygens en carta a Carcavi el 6 de julio de 1656.

Tres jugadores *A*, *B* y *C*, teniendo 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras, juegan con la condición de que gana el primer jugador que obtiene (al extraer sin mirar) una ficha blanca y *A* extrae primero, luego *B*, luego *C*, luego *A* nuevamente y así sucesivamente. La pregunta es ¿Cuál es la proporción de la probabilidad de ganar de cada jugador con respecto de los otros?

Esta situación fue resuelta posteriormente por Huygens en 1665 (aparece en el Apéndice II).

A apuesta a *B* que de un mazo de 40 cartas, entre las cuales hay 10 de cada color, extraerá 4, de forma que obtenga una de cada color. En este caso se comprueba que la probabilidad de *A* sobre las de *B* son de 1000 contra 8139.

Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656; la respuesta sin prueba está en la carta a Carcavi del 6 de julio de 1656.

Como antes, los jugadores tienen 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras; *A* apuesta a *B* que escogiendo siete fichas sin mirar, obtendrá tres blancas. La pregunta es ¿Cuál es la probabilidad de *A* sobre *B*? (Huygens también considera el caso en que se apuesta a escoger tres o más fichas blancas).

Resuelto posteriormente por Huygens en 1665 (aparece en el Apéndice II).

Teniendo *A* y *B* cada uno doce fichas, juegan con tres dados, bajo la condición de que si se obtienen 11 puntos, *A* entrega una ficha a *B*, si se obtienen 14 puntos *B* entrega una a *A*, ganando el jugador que obtiene primero todas las fichas. Encontrar las probabilidad de *A* sobre las de *B*.

Este es el problema planteado por Pascal a Fermat y a través de Carcavi a Huygens en una carta del 28 de septiembre de 1656 que contiene las soluciones dadas por Pascal y Fermat. La solución de Huygens está en la carta a Carcavi del 12 de octrubre de 1656, y la demostración en una nota de 1676. Se conoce como el problema de la ruina del jugador.

Como curiosidad cabe señalar que en 1687 se publicó un libro anónimo en el que se resolvía el primero de los problemas y se esbozaba la solución del resto. Más tarde se comprobó que el autor de ese libro era el filósofo holandés de origen judeo-portugués Benito Spinoza.

DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ.

Etsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid

Vvv

El libro de Huygens contiene un total de 14 proposiciones formuladas de modo claro y conciso, posteriormente figuran los cinco problemas mencionados y un primer apéndice; más tardeen una nueva edición (1665), añadió un segundo apéndice en el que muestra las soluciones de algunos de los problemas planteados.

Las tres primeras proposiciones las dedica a manejar y explicar la noción de esperanza matemática, en las seis siguientes se preocupa por problemas de reparto, tanto para dos jugadores como para tres, mientras que en las últimas se preocupa por resolver problemas con dos, tres y más dados. El científico holandés definió, por primera vez, el concepto de esperanza matemática de una variable aleatoria con un número finito de valores. En uno de los párrafos de su libro se puede vislumbrar la importancia y transcendencia que él mismo da al cálculo de las probabilidades, escribe:

> El lector observará que nos ocupamos, no sólo de los juegos, sino, más bien, de los fundamentos de una teoría nueva, a la vez profunda e interesante (1657).

Es posible que la claridad en su exposición y una adecuada elección de problemas sea el motivo por el que, durante muchos años, se haya considerado al científico holandés como el primer teórico de la teoría del azar. Sin embargo, hoy sabemos que ese honor le corresponde por igual a la tríada: Pascal, Fermat y Huygens, los cuales sentaron las bases modernas de la teoría de la probabilidad, bases que fueron desarrolladas a lo largo del siglo XVIII.

Ya hemos comentado la importancia para el desarrollo de la combinatoria del trabajo de Pascal, pero no podemos olvidar las aportaciones del filósofo y matemático G. Leibnitz, quien publicó en 1.666 la primera monografía dedicada íntegramente a la combinatoria, con el título Disertatio de Arte Combinatoria. Su trabajo no está motivado desde la necesidad de resolver problemas de carácter probabilístico sino más bien el tratar de estudiar ideas complejas a través de ideas sencillas. El tratado de Leibnitz desarrolla algunas de las ideas de R. Llull, enunciadas cuatro siglos antes.

La probabilidad, una teoría consolidada

En paralelo a los juegos de azar se hicieron otros estudios relacionados con la probabilidad y cuyo objetivo no era el análisis de juegos. En esta línea, el comerciante inglés John Graunt (1620-1675) abordó, hacia 1662, problemas sobre demografía o *política aritmética*, como se la llamaba entonces. Graunt se propuso encontrar un método preciso para estimar la edad media de los habitantes de Londres mediante la edad de defunción; en su estudio se encuentra el concepto de 'frecuencia de un suceso', remarcando el cierto grado de aleatoriedad presente en las proporciones obtenidas.

Las ideas de Graunt fueron recogidas por William Petty (1623-1687), quien elaboró un análisis comparativo entre la mortalidad de Londres y la de París, basándose en los datos de los hospitales de caridad. También el astrónomo Edmund Halley (1656-1742), basándose en procedimientos similares presentó, en 1693, una tabla de mortalidad de la ciudad de Breslau (Alemania). En los trabajos de Halley ya se pueden encontrar las bases de los teoremas de la suma y la multiplicación de probabilidades y de la ley de los Grandes Números, aunque no los enunció explícitamente; sus trabajos tuvieron gran influencia en demografía y en los seguros.

Retomando las figuras de Pascal, Fermat y Huygens podemos señalar que los juegos de azar dejaron de ser meros pasatiempos para convertirse en auténticos retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento. Uno de estos genios fue Jacques Bernouilli (1654-1705) quien propuso a los matemáticos y filósofos de su época diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, cuyas soluciones ofreció después.

Conviene anotar que la mayoría de los descubrimientos matemáticos de la familia Bernoulli, en este campo, igual que pasa con los de Leibnitz se encuentran en la famosa revista Acta Eruditorum; pero J. Bernouilli escribió, además, una obra de una enorme trascendencia, *Ars Conjectandi*, que no fue publicada hasta el año 1713.

El tratado en cuestión está dividido en cuatro partes. La primera contiene una reimpresión y un comentario a la obra de Huygens, la segunda está dedicada a la teoría de las combinaciones y permutaciones, en ella se encuentra la primera demostración correcta del teorema binomial para exponentes naturales. La tercera parte consiste en la resolución de diversos problemas relativos a juegos de azar y la última es una aplicación de la teoría de la probabilidad a problemas de economía y moral.

Como apéndice al *Ars Conjectandi* nos encontramos con una larga memoria sobre series numéricas.

> *Se ve por este Ensayo que la teoría de las probabilidades, en el fondo, no es otra cosa que el buen sentido reducido a cálculo; ... veremos que no hay ciencia más digna de nuestras reflexiones y cuyos resultados sean más útiles.*
> P. S. de Laplace. Ensayo filosófico sobre las probabilidades

Este tratado ha tenido una enorme influencia, contiene importantes contribuciones a todos los dominios de la teoría de las probabilidades; se encuentra el célebre teorema de Bernouilli o ley de los grandes números, que a grandes rasgos se puede enunciar así:

Es muy poco probable que, si efectuamos un número suficientemente grande de experimentos, la frecuencia de un acontecimiento se aparte notablemente de su probabilidad.

Se considera el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad.

Jacques Bernouilli. 1654-1705

Básicamente el teorema establece que la frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en cierto número, que es precisamente la probabilidad, cuando el experimento se realiza muchas veces.
El origen de dicho teorema es posible que se encuentre en los trabajos de Graunt y Petty.

J. Bernoulli también se preocupó de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso aun siendo imposible contar los casos favorables, dice J. Bernoulli:

> Aquí hay otro camino disponible para alcanzar el resultado deseado. Lo que no se puede hallar a priori se puede obtener a posteriori, es decir, mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares…

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
clↃ ⅠↃcc xiii.

Este teorema recibirá con Laplace (1749-1827) su forma definitiva y cuya verificación experimental fue emprendida por G. L. de Buffon (1707-1788) y S. D. Poisson (1781-1840) mostrando su excepcional importancia en el terreno de las aplicaciones.

La obra de J. Bernoulli es fundamental por varios motivos, uno de ellos es que allí figura la primera definición clásica de probabilidad, seguramente muy influenciada por los trabajos de Graunt y Petty, que habían demostrado las ventajas de incluir en sus tablas no sólo los números absolutos, sino también las proporciones respecto del total.

Si hablamos de prioridades, debemos señalar que la primera contribución teórica relativa al campo de la probabilidad, correspondiente al siglo XVIII, es el “Essay d’analyse sur les jeux du hazard” (París, 1708) de P. Rémond de Montmort (1678-1719). Ya en el prefacio del libro el autor manifiesta conocer parte del trabajo de J. Bernoulli en el campo de la probabilidad, así como la veneración que siente por su autor y sus trabajos.

El escrito está dividido en cuatro partes, una primera dedicada a la combinatoria, la segunda dedicada a los juegos de cartas, la tercera trata de juegos con dados y la cuarta incluye la solución de varios problemas de azar y entre ellos los cinco propuestos por Huygens. El libro de Montmort tuvo un eco muy favorable y mereció elogios de muchos científicos de la época, entre los que cabe destacar a Leibnitz. El gran mérito de su trabajo es dar a conocer unas ideas, que los grandes científicos discutían, pero que nadie osaba publicar.

En este avance, a veces errático, y siempre difícil, de la teoría de la probabilidad, han surgido muchos escollos, unos de carácter estrictamente matemático y otros de índole filosófico. En esa línea tenemos que citar al matemático Daniel Bernoulli (1700-1782) quien hacia el año 1738 comenzó el estudio de un problema propuesto por

Nicolás Bernoulli veinticinco años antes, y que se hizo célebre con el nombre de *paradoja de San Petersburgo*. El enredo intelectual de esta paradoja viene de pensar que una vez definido matemáticamente el concepto de esperanza, la manera más razonable de tomar una decisión que involucrase probabilidades sería optar por aquélla que tuviese una mayor esperanza. Pero esta manera de pensar quedó desacreditada por medio de la célebre paradoja que nos ocupa. El estudio de la paradoja tuvo mucha importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad aplicada a los problemas relacionados con los seguros: pagar una gran cantidad al asegurado pero con una probabilidad muy pequeña de que eso ocurra.

Essay d'analyse sur les jeux du hazard. París, 1713, 2.ª ed.

Parece que no hay dudas en señalar al científico de origen francés Abraham de Moivre (1667-1754), refugiado en Londres, como el creador de una obra muy importante para el devenir de la teoría probabilística. Muchos historiadores le consideran el descubridor de la distribución normal. En el 1711 publicó en las Philosphical Transactions un estudio detallado sobre las denominadas leyes del azar, siete años después amplió su trabajo e incluyó en un nuevo tratado, The Doctrine of Chances(1718), numerosos problemas y aplicaciones sobre dados, juegos, anualidades de vida, etc. Este tratado contiene 26 problemas, además de unas observaciones introductorias que explican cómo la probabilidad es una medida. A pesar de que la mayoría de los problemas e ideas sobre la probabilidad expuestas por A. de Moivre ya figuraban en los tratados de J. Bernouilli y P. R. de Montmort, su libro tuvo un notable éxito, seguramente por la metodología empleada y el rigor en su exposición. Este libro es, sin duda, su obra principal. En él se estudian por primera vez y con cierta profundidad las funciones generatrices, el concepto de esperanza matemática, la probabilidad condicional y la independencia de sucesos, así como los problemas de probabilidad total y compuesta. Además demuestra el teorema central del límite, que lleva el nombre en su honor, y que posteriormente fue estudiado por Laplace, quien realizó un estudio más general y profundo. Es de notar que la teoría combinatoria elemental (cálculo del número de combinaciones y permutaciones) la deduce a partir de los principios de las probabilidades, al revés de como se acostumbra a presentar ahora.

En el año 1733, A. de Moivre publica en Londres un pequeño folleto titulado *Approximatio ad summan terminorum binomii in seriem expansi* en el que se incluía por vez primera la distribución normal, que con una cierta injusticia se ha llamado Curva de Gauss en lugar de Curva de Moivre.

Hay que señalar que el estudio de la distribución normal y la aproximación normal a la distribución binomial tuvo un considerable valor teórico y práctico en el desarrollo de la teoría de probabilidades. Uno de los grandes objetivos de A. de Moivre consistía en desarrollar para la teoría de las probabilidades métodos y notaciones generales, como si fuera un álgebra nueva.

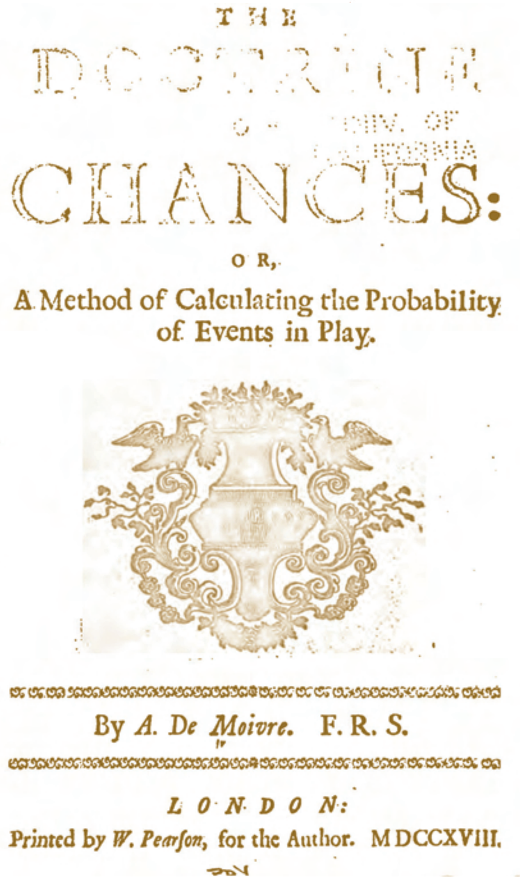
En esta pequeña historia no podemos olvidar las contribuciones de dos grandes personajes, Thomas Bayes (muerto en 1763) y G. L. de Buffon (1707-1788). El primero se enfrentó con éxito al importante problema de «la probabilidad inversa» (esto es, determinar la probabilidad de las causas por los efectos observados). Para ejemplificarlo supongamos la siguiente situación:

Tenemos dos cajas A y B que contienen bolas blancas y negras en la siguiente proporción: En A hay 6 bolas blancas y 4 negras. En B hay 4 bolas blancas y 6 negras. Una bola es sacada al azar de un caja y es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido sacada de la caja A?

Mientras Bufón realiza la primera intervención de la variable continua en las cuestiones de probabilidad, lo trata en un célebre problema que se conoce como el problema de la aguja de Bufón (1733). Este ejemplo de probabilidad geométrica señala la introducción del cálculo integral en las cuestiones de probabilidad. Esta línea de trabajo fue consolidada por Daniel Bernoulli, quien a partir del año 1760 consagró los métodos infinitesimales al cálculo de probabilidades, cuyo empleo fue generalizado por Lagrange, Laplace y Gauss.

Con el insigne matemático francés P. S. de Laplace (1749-1827) la teoría de la probabilidad adquiere rango de disciplina científica, cobrando un impulso que ha ido acrecentándose con el paso del tiempo. Con 63 años, Laplace publica, en 1812, un siglo después del escrito de J. Bernouilli, un gran tratado, titu-

A. de Moivre. 1667-1754



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability
of Events in Play.

By A. De Moivre. F. R. S.

LONDON:
Printed by W. Pearson, for the Author. MDCCXVIII.

En el fondo, la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números.

P. S. de Laplace. 1749-1827

Thomas Bayes. 1702-1763

G. L. de Buffon.1707-1788

lado *Théorie Analytique des probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades).

Además se ocupa de las probabilidades de las causas de los acontecimientos, siguiendo la línea de Bayes. Con ánimo de difundir sus ideas entre los lectores no especializados escribió, en 1814, una exposición introductoria a la probabilidad titulado *Essai philosophique des probabilités*. En este pequeño libro Laplace plasma una de sus famosas frases:

> En el fondo, la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números.

Corresponde a Laplace el mérito de haber descubierto y demostrado el papel desempeñado por la distribución normal en la teoría matemática de la probabilidad. Sus aportaciones en este campo discurren bajo dos vertientes, por un lado la creación de un método para lograr aproximaciones de una integral normal; por otra una demostración rigurosa de lo que ahora se denomina el teorema central del límite. La edición de *Théorie Analytique des probabilités* del año 1820 consta de dos libros y tres suplementos. El primero está dedicado al estudio de las funciones generatrices y a la teoría de la aproximación, mientras que el segundo consta de diez capítulos y desarrolla algunos aspectos de la teoría de la probabilidad, aplicando sus ideas a la resolución de numerosos problemas. El libro muestra la mano magistral de un analista consumado, lo que le permite abordar problemas mediante técnicas sofisticadas, como ocurre con la llamada Transformada de Laplace.

Las aportaciones realizadas por Laplace fueron tan importantes que prácticamente lo que quedaba por realizar eran labores de ordenación, precisión, rigor y crítica; labores que iniciaron ilustres matemáticos, contemporáneos suyos, como Legendre (1752-1833) y Gauss (1777-1855).

A finales del siglo XIX el mundo de la probabilidad y del azar estaba muy abonado y gracias a personajes como Borel (1871-1956), Pearson (1857-1936), Poincaré (1854-1912), Galton (1822-1911), Markov (1856-1922), Tchebycheff (1821-1894) y Kolmogoroff (1903-1987), esta ciencia se fue consolidando de una manera definitiva. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURSIN, J. L. (1958): *Las Estructuras del Azar*, Ediciones Martínez Roca, SA, Barcelona.

DE MORA CHASLES, M.S. (1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

GARCÍA CRUZ, J. A. (2000): *Historia de un problema: el reparto de una apuesta*, SUMA.

GUTIERREZ CABRIA, S. (1992): *Filosofía de la Probabilidad*, Ed. Tirant lo Blanch, Valencia.

HACKING, I. (1991): *La Domesticación del azar*, Ed. Gedisa, Barcelona.

HACKING, I. (1995): *El surgimiento de la probabilidad*, Ed. Gedisa, Barcelona.

LAPLACE, P. S. (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Ed. Alianza Editorial, Madrid.

SANTOS DEL CERRO, F. Y GARCÍA SECADES, M. (2004): *Historia de la probabilidad y la estadística(II)*, Ed. Delta, Madrid.

TATÓN R. Y OTROS. (1972): *Historia General de las Ciencias (tomo II)*, Ed. Destino, Barcelona.

TODHUNTER, I. (1949): *A History of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace*, Chelsea Publishing Company, New Cork.

En Internet:

Diversos recursos sobre probabilidad

http://mathworld.wolfram.com/topics/Probability.html

Historias e ideas sobre probabilidad

http://etext.lib.virginia.edu/cgi-local/DHI/dhi.cgi?id=dv3-74

Reseñas históricas sobre azar y probabilidad

http://www.mala.bc.ca/~johnstoi/darwin/sect4.htm

History of Science: Origins of Modern Probability Theory

http://www.mala.bc.ca/~johnstoi/darwin/sect4.htm

A short History of Probability and Statistics

http://www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/stathist.htm

Paradojas con el azar. Santiago Fernández

http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=66&Itemid=81

SUMA 55
Junio 2007, pp. 21-30

Investigación didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática

La adquisición del concepto de número no es fácil: por un lado, la Historia de la Matemática aporta a esa afirmación pruebas suficientes; por otro, las respuestas que obtenemos de los niños aportan datos que dejan al descubierto un importante vacío de comprensión. En este artículo se expresan las dificultades presentadas por los niños al utilizar la técnica de contar; se investigan procedimientos que eviten esas dificultades y se presentan actividades claras para la intervención educativa en la etapa de Educación Infantil.

The acquisition of the number concept is not easy: on the one hand, the History of Mathematics one contributes to this affirmation sufficient evidence; on the other, the answers that we obtain from the children contribute data that leave an important emptiness of understanding. In this article: the difficulties displayed by the children when using are expressed counting techniques; and the procedures used to overcome those difficulties are investigated. Finally, clear activities for educational intervention in the stage of Early Childhood Education are proposed.

Cuando se escucha al niño, nace constantemente la necesidad de contrastar *lo que haces* en función de *lo que obtienes con lo que haces*. En ocasiones existe una gran diferencia entre *lo que espera obtener el docente que está enseñando* y *lo que se obtiene del alumno que está aprendiendo*; diferencia entre lo que la enseñanza busca en el aprendizaje y lo que en el aprendizaje encuentra.

Existe una gran diferencia entre lo que espera obtener el docente que está enseñando y lo que se obtiene del alumno que está aprendiendo.

Me pregunto si la técnica de contar, aunque apoyada en válidos argumentos matemáticos, termina o no, de favorecer, por sí misma, la dinámica de relaciones que precisa una ortodoxa interpretación matemática del concepto de número cardinal[1]; tanto en su elaboración intelectual, en su aplicación a situaciones cotidianas, o en su correcta extensión aritmética dirigida hacia las operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación y división[2].

Mis hipótesis de trabajo en cualquier investigación llevada a cabo sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática han sido las siguientes:

- Que las respuestas que obtenemos no coincidan con las que esperamos no significa en modo alguno que el niño no razone, sino que existe discrepancia entre la enseñanza y el aprendizaje.
- El niño nunca responde por azar si no ha sido intimidado.
- El niño nunca quiere fallar o hacerlo mal si no ha sido irritado.
- Ni existe ni existirá método alguno de enseñanza superior a la capacidad de aprendizaje de la mente humana.

La metodología llevada a cabo se apoya en la investigación-acción. Se parte de una dificultad perfectamente identificada y definida (necesidad y justificación de la investigación), ofrecida habitualmente por un niño o grupo de niños. Se intenta dar respuesta de intervención educativa con unas líneas de

José Antonio Fernández Bravo
Centro de Enseñanza Superior Don Bosco

acción didáctica que eviten esa dificultad: investigación sobre el procedimiento (el problema de la investigación: ¿Qué procedimiento didáctico de intervención educativa puede evitar esa dificultad?). Empieza un estudio de reflexión fuerte en el que se hace uso de la lógica, la epistemología de la ciencia, y fundamentos y principios psicopedagógicos[3].

La dificultad observada

Escuchar al alumno es tener en cuenta su historia y esto plantea una nueva relación con el conocimiento matemático en tanto que esta escucha es incorporada significativamente al proceso de producción de conocimientos y de su enseñanza.

Se admite (Guyot, Cerizola y Giordano, 1993)[4] que

> la consecuencia inmediata de la aceptación de este hecho se vislumbra en las prácticas de transmisión del conocimiento, en cuanto romper con rígidas exigencias que poco tienen que ver con los procesos del pensamiento en su faz creativa o reproductiva.

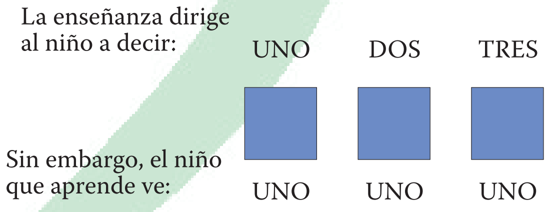
Escuchar al alumno es tener en cuenta su historia y esto plantea una nueva relación con el conocimiento matemático en tanto que esta escucha es incorporada significativamente al proceso de producción de conocimientos y de su enseñanza.

La observación de las respuestas que aportaban los niños y las niñas de Educación Infantil a preguntas de contenido numérico, nos dejaban en ocasiones con la boca abierta y, más que asombrarnos por lo que decían, nos aportaban esas expresiones una curiosidad por dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Por qué hacen lo que hacen? ¿Por qué dicen lo que dicen? No eran pocos los niños que no diferenciaban una cantidad de tres elementos de otra de cinco elementos[5]. Para ellos una y otra eran lo mismo, debido a que por contar entendían pararse en una palabra, que a modo de canción habían aprendido en orden, según la correspondencia biunívoca que, en cada caso, se establecía entre el sonido de los números naturales y todos y cada uno de esos distintos elementos que se tenían que contar. Si les preguntabas, por ejemplo: ¿Tiene tu compañero cinco orejas? pues haberlos había quienes decían que sí, e incluso te lo demostraban de la siguiente forma: señalaban a una de las orejas de su compañero al tiempo que decían *uno*, señalaban la otra al tiempo que decían *dos*, volvían a señalar la señalada anteriormente al tiempo que decían *tres*, volvían a señalar... una y otra, entonces, hasta llegar a decir *cinco*.

En otra ocasión, y ya sabiendo el niño expresar el cardinal de objetos mediante conteo, se les enseñó el número cero. Lo añadieron a la canción. Ese mismo niño que antes contaba tres objetos diciendo: *uno, dos, tres; hay tres*; ahora, contaba diciendo: *cero, uno, dos; hay dos*, y, sin ser consciente de la diferencia de expresión numérica ante la misma cantidad, se quedaba tan contento, pues nada en su mente podría suponer que eso, ahora, no era así[6]. Lo cierto es que al niño le daba igual, dos que tres. Pero el niño no cometía error alguno de razonamiento, pues infería correctamente de las condiciones establecidas:

- Primera premisa: Hay que atribuir a cada elemento un sonido.
- Segunda premisa: Ese sonido señala por correspondencia a cada elemento en un orden dado.
- Tercera premisa: El orden que ahora se ha de seguir es el siguiente: cero, uno, dos, tres, cuatro,...

Nuevamente observamos lo que hacen los niños cuando cuentan, dicen: *uno, dos, tres,...* al tiempo que señalan cada vez a un elemento; es decir, que a un elemento le llaman *uno*, a otro elemento le llaman *dos* (pero no deja de ser *uno*), a otro elemento le llaman *tres* (pero no deja de ser *uno*),...



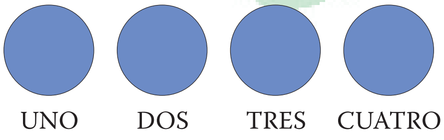
Sin excluir el contar como actividad matemática (Dehaene, 1992), nos dimos cuenta que una cosa era contar y otra muy distinta ofrecer actividades que favoreciesen la retención intelectual de una cantidad de elementos. Nos introdujimos en una investigación para estudiar actividades que favoreciesen la técnica de conteo sin desnaturalizar el procedimiento matemático. Es interesante la lectura del artículo: *El concepto de número en preescolar* (Contreras, 1989):

> Las palabras *uno, dos, tres, cuatro* son ejemplos de conocimiento social. Cada lengua posee un conjunto diferente de palabras para contar. Pero la idea de número subyacente pertenece al conocimiento lógico-matemático, que es universal. (Kamii, 1995:22).

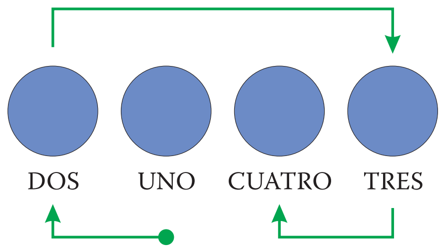
La técnica de contar como actividad matemática

Teniendo en cuenta las dificultades presentadas por los niños[7], descritas anteriormente, no fue difícil llegar a establecer unos pasos básicos para realizar con éxito la actividad de contar; únicamente utilizamos una reflexión lógica. Partimos, como técnica de análisis, del punto de llegada para desmenuzar los elementos básicos y esenciales a utilizar en el proceso, dándoles un orden lógico de aparición[8].

¿Qué es o qué se entiende por contar elementos? Contar es establecer una correspondencia entre el sonido de los números naturales, y en el orden en el que éstos aparecen, con todos y cada uno de esos distintos elementos. Si G es el grupo de elementos que hay que contar, éstos se darían por contados cuando se define una aplicación de N a G, siendo N el conjunto de los números naturales. Así, por ejemplo, si lo que tengo que contar son los elementos del siguiente grupo de círculos, simplemente haría corresponder, con cada uno, el sonido de los números naturales:



Dicho esto, parece que hemos terminado, pero no es del todo cierto. Contar tiene una consecuencia: *el último sonido pronunciado coincide con el cardinal*, en este caso, de círculos. Así, podemos decir entonces que hay cuatro círculos. Si es así y seguimos el orden de los números naturales, da igual por qué elemento empecemos:



Pero qué curioso debe ser esto para los ojos del niño, neófito en la materia, y teniendo que entender –¿quizás a la fuerza?– que a un círculo le hemos llamado uno, que a un círculo le hemos llamado dos; ¿cómo? ¡eso no puede estar bien! Un círculo es uno, no es dos, ni cuatro, –¡qué jaleo!– Ya, ya sé que el niño no entiende. Y que lo que tiene que entender es que cuando dice dos, es que hasta ahí, van dos; y cuando dice tres, es que hasta ahí, lleva tres elementos: Hay que ir acumulando.

Quizás haya que decir algo más sobre el contar y completar lo que hasta ahora se ha dicho con algo fundamental matemáticamente hablando. Lo que tenemos es una sucesión de círculos. Observamos que, de izquierda a derecha el primer elemento es uno, el segundo elemento es uno, el tercer elemento es uno y así sucesivamente. Luego lo que hasta ahora tenemos es una sucesión constante. La suma de los n primeros términos de esa sucesión definiría, entonces, el contar. El primer elemento de este sumatorio sería 1, el segundo elemento 2 y así sucesivamente: 3, 4, 5, 6,...

$$S_n = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$$

Siendo:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 1,\ a_5 = 1, \ldots, a_n = 1$$

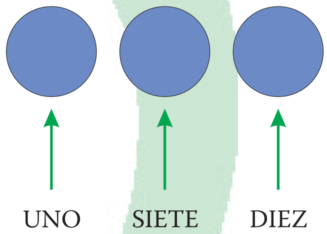
$$S_n = 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1$$

$$\sum S_n = 1,2,3,4,5,6,\ldots,n$$

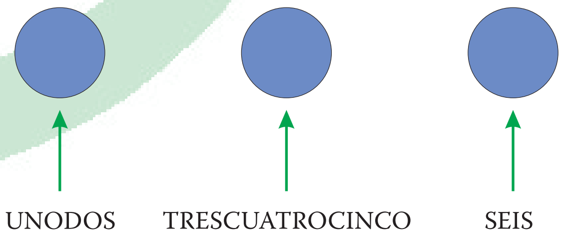
Contar es establecer una correspondencia entre el sonido de los números naturales, y en el orden en el que éstos aparecen, con todos y cada uno de esos distintos elementos.

Así que, según estos acontecimientos y sabiendo lo que se sabía, empezamos a trabajar después, como bien se ha visto, de escuchar al niño y a la Matemática. Pero todavía no habíamos escuchado todo lo que el niño tenía que decirnos, pues los había que al contar hacían lo siguiente:

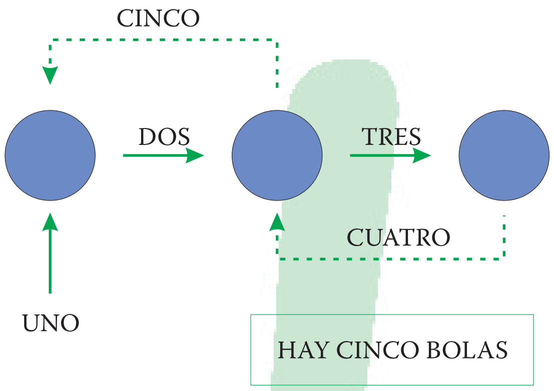
No recitaban en el orden adecuado.



Cuando contaban en el orden adecuado, no separaban correctamente los sonidos, estableciendo la correspondencia de forma incorrecta.



Cuando, en el mejor de los casos, contaban en orden y separaban los sonidos, nombraban varias veces un mismo elemento, confundiendo, en términos matemáticos la correspondencia biyectiva con la correspondencia sobreyectiva



No nombramos todas aquellas combinaciones que de estos errores descritos nos encontrábamos, o aquellos que eran poco habituales pero que no por ello dejaban de tener importancia. En cierta ocasión, un niño contó perfectamente tres pinturas, diciendo: uno, dos y tres. Inmediatamente después le dijimos que escribiera el número de pinturas, y escribió: 1, 2, 3. Nosotros esperábamos que escribiera sólo el número 3, pero él, sin embargo, escribió los tres números.

¡Qué lógica! pensé rápidamente: ha escrito los tres números que ha pronunciado. Quizás no sepa que el último sonido pronunciado coincide con el cardinal. Quizás haya que admitirlo como error científico, pero quizás no haya que considerarlo error de razonamiento[9].

Fases para el aprendizaje de la actividad de contar

Si lo que queremos es averiguar el cardinal de una cantidad de elementos a través de contar, y contar tiene como consecuencia que el último sonido pronunciado –y por acumulación– coincide con el cardinal, entonces tendremos que provocar actividades desde las que perciban la idea acumulativa, enseñando, antes que esto, a pronunciar ese *último sonido* respecto al orden establecido en los números naturales. Si para llegar a pronunciar ese *último sonido* tenemos que hacer corresponder los sonidos con los elementos, tendremos que enseñarles, antes de eso, a establecer correspondencias. Si esas correspondencias a las que nos referimos se establecen en orden entre los elementos y el sonido de los números naturales, tendremos que presentarles, antes que eso, la separación de los sonidos con los que establecer la correspondencia. Como no se puede separar algo que se desconoce, tendremos que enseñarles, antes que a separar algo, aquel algo que hay que separar. Así pues, descubrimos cuatro fases fundamentales que, en un orden dado, evitaban los errores descritos anteriormente:

Canción: Sonidos ordenados de los números naturales.

Separación: Independencia de los sonidos. Separar los sonidos ordenados de los números naturales, por referencia a cada número.

Correspondencia: Establecer una correspondencia biunívoca entre cada sonido y cada elemento.

Consecuencia: Identificar el cardinal de elementos en el último sonido pronunciado.

Canción

Les enseñaremos a modo de canción, y por convencionalismo, los sonidos que vamos a utilizar: uno dos tres cuatro cinco seis...

Haremos uso de retahílas, poemas, canciones populares... que sirvan para grabar en la memoria la secuencia de esos sonidos. Así, por ejemplo:

Uno, dos, tres,
Uno, dos, tres,
¡Me gusta contar
otra vez!

Uno, dos y tres
Pedro, Juan y José.
Lima, naranja y limón,
Rosa, clavel y botón.

También podemos inventar canciones que se adapten a situaciones de nuestra intervención educativa cotidiana, aunque gocen —creamos— de poca originalidad. Las asociaciones reiteradas tienen más influencia memorística a estas edades que el uso esporádico de canciones, por atractivas que éstas sean.

> *Si lo que queremos es averiguar el cardinal de una cantidad de elementos a través de contar, entonces tendremos que provocar actividades desde las que perciban la idea acumulativa.*

Separación

Les enseñaremos a separar los sonidos de la canción que ya se saben: uno, dos, tres, cuatro, cinco,... Entendiendo el niño que *uno* es un sonido, que *dos* es otro distinto, *tres* otro diferente; y así sucesivamente.

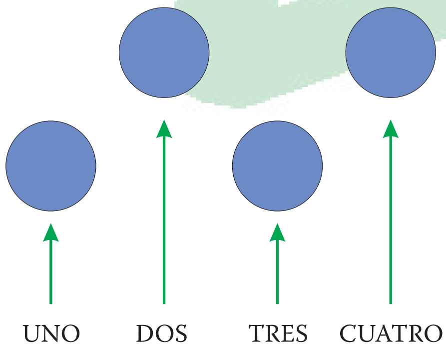
Podemos hacer uso de palmadas al tiempo que pronunciamos uno de esos sonidos. Así estableceremos una correspondencia entre sonido y palmada: Uno (palmada); dos (palmada); tres (palmada); cuatro (palmada)...

Otra actividad, podría consistir en utilizar papeles de distintos colores, enseñando un papel de un color distinto al tiempo que pronunciamos uno de esos sonidos. Así estableceremos una correspondencia entre color y sonido, por ejemplo: Uno (rojo); dos (amarillo); tres (verde)...

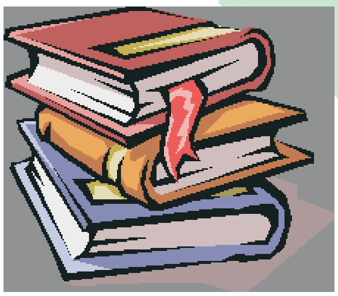
Podemos utilizar así cualquier actividad que ayude al niño a percibir la separación de todos y cada uno de esos sonidos que ya sabe pronunciar en orden, por la etapa anterior, dotándolos intuitivamente de independencia y unicidad.

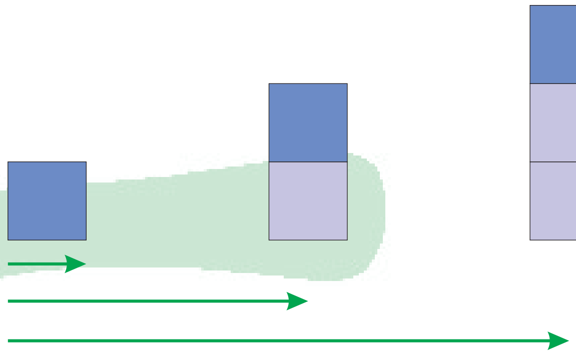
Correspondencia

Les enseñaremos a establecer una correspondencia biunívoca (uno-uno) entre los elementos a contar y los sonidos separados.



Pero no lo haremos horizontalmente, ya que de esta forma no provocamos una buena percepción intuitiva sobre la idea de acumulación, sino verticalmente con elementos que se puedan apilar. Las primeras actividades de conteo deben ser verticales: Diremos *uno* (al tiempo que ponemos el primero), *dos* (al tiempo que ponemos el segundo), *tres* (al tiempo que ponemos el tercero),...





Cuando decimos dos, el niño ve dos, y no uno; que es lo que vería si trabajásemos horizontalmente. Cuando decimos tres, el niño ve tres. También cuando decimos tres, el niño ve una torre más alta que cuando decimos dos, ayudando intuitivamente a la comparación de cantidades. De esta forma, también ayudamos al niño a saber cuándo se termina de establecer esa correspondencia (no hay más elementos que colocar), evitando así que el niño cuente más de una vez el mismo elemento.

Consecuencia

Como antes hemos dicho, contar es establecer una correspondencia entre el sonido de los números naturales, y en el orden en el que estos aparecen, con todos y cada uno de esos distintos elementos. Y esto es lo que hemos realizado en el apartado anterior. Y hemos colocado verticalmente para permitir que el niño perciba de una manera intuitiva la acumulación de elementos por el nombre que a cada uno le corresponde. Pero contar tiene una consecuencia: el último sonido pronunciado coincide con el cardinal de elementos, y este es el trabajo que ahora nos embarcamos.

Algunos de nosotros creemos que la respuesta del niño a la pregunta *¿Cuántos...?* es innata; nada más lejos de la realidad. La respuesta a la pregunta cuántos es convencional y consecuencia de varias definiciones y relaciones, por lo que es necesario enseñarle al niño a responder a esas preguntas. Podemos actuar siguiendo un protocolo que hasta ahora ha funcionado positivamente.

A partir de un número de elementos cualesquiera, que respeten siempre la adquisición de los pasos anteriores por parte del niño (no tiene sentido contar veinte elementos si el niño sólo ha trabajado los apartados anteriores hasta nueve), trabajaremos exactamente igual que en el punto tres colocándolos verticalmente. Así, por ejemplo, si tuviéramos tres libros, diríamos: uno, dos, tres (formando una torre de tres libros). Una vez pronunciado el último sonido (tres) le diremos al niño: *Entonces decimos que hay tres libros*, e inmediatamente después les preguntaremos: ¿Cuántos libros decimos que hay? (tres, responderán ellos). Repetiremos esto varias veces dejando también que sean ellos quienes construyan las diferentes torres para intervenir nosotros rápidamente a partir del último sonido pronunciado: *Entonces decimos que hay cinco cubos*, ¿Cuántos cubos decimos que hay? *Entonces decimos que hay...* ¿Cuántos... decimos que hay?

El niño llega a intuir que el último sonido pronunciado, y en el orden de los números naturales, es la respuesta pedida a la pregunta: ¿Cuántos...?

Del mismo modo actuaremos cuando el cardinal de elementos es uno. Les diremos: Entonces decimos que hay UNO libro; UNO carpeta; UNO... Esto puede parecer ridículo, *podríamos pensar*, porque en español se debería decir: UNA carpeta; UN libro, pero eso no es del todo cierto, debido a que el número es el número UNO y los números no tienen género. Si admitimos UNA carpeta, ¿por qué no admitimos OCHA mesas? No genera ningún problema que el niño oiga UNO carpeta y UNO libro. Posteriormente y por adaptación cultural a nuestra lengua, les diremos: Cuando nosotros decimos UNO carpeta, los mayores dicen *una carpeta*. Cuando nosotros decimos *UNO libro*, los *mayores* dicen *un libro*. De este modo, el niño no confundirá el determinante con el número y sabrá interpretar matemáticamente de forma correcta las expresiones: *una flor*, *un cuaderno*, una..., un..., con el número UNO.

— Contamos los libros: Uno, dos, tres, cuatro, cinco.
— Entonces, decimos que hay cinco libros.
— ¿Cuántos libros decimos que hay?
— Cinco.

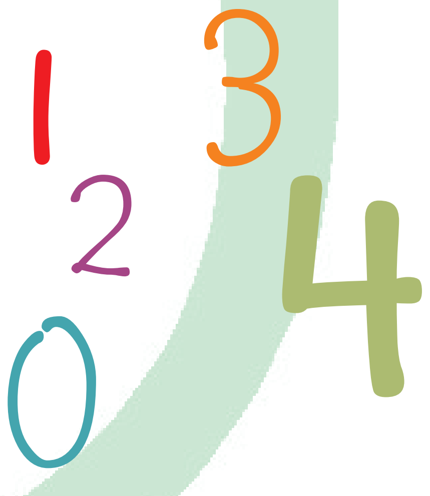
El niño llega a intuir que el último sonido pronunciado, y en el orden de los números naturales, es la respuesta pedida a la pregunta: ¿Cuántos...? Así, llegará un momento en el que sabrá qué hacer para responder directamente a nuestras preguntas sobre el cuántos: ¿Cuántos cubos hay? ¿cuántos ... hay? También el niño estará preparado para ejecutar correctamente una orden dada sobre una cantidad de elementos; así, por ejemplo, ahora se le podría pedir que nos enseñase: *dos cuadernos, cinco estuches,...*

El número cero

El concepto de número cero no debe introducirse nunca en primer lugar. Los niños deben percibirlo a estas edades como ausencia de elementos. Y nadie puede ser consciente de la ausencia de elementos si antes no ha sido consciente de su existencia. Así que podríamos proceder de formas similares a ésta: Se cuentan, por ejemplo, una cantidad de objetos que se sujetan encima de una mesa. Supongamos que el niño ha respondido correctamente a las preguntas: ¿Qué ves encima de la mesa? ¿Cuántos... hay encima de la mesa? y esas respuestas fueran: botes y tres, respectivamente. Ahora quitaremos todos los botes que hay encima de la mesa, y preguntaremos: ¿Ves ahora botes encima de la mesa? *No*, será la respuesta del niño. Nosotros nos expresaremos inmediatamente después de la siguiente forma: *Entonces decimos que ahora hay cero botes —cero— encima de la mesa, ¿Cuántos botes decimos que hay ahora encima de la mesa?* (CERO). Haremos este ejercicio con elementos de distintas clases y con diferentes cantidades, para que el niño entienda por *hay cero*, la ausencia total de esos elementos cuya propiedad numérica se ha identificado anteriormente o la negación de cantidad alguna, en magnitud cualquiera.

Identificación del número cardinal que representa una cantidad y viceversa

Una vez que el alumno responde correctamente a la pregunta cuántos, y asocia la respuesta con la cantidad de elementos que corresponde, les presentaremos el dibujo que representa esa cantidad para que su mente interprete ese símbolo matemáticamente, al que se le reconocerá a partir de ahora como número. Así, les diremos: UNO, se dibuja así: 1; DOS, se dibuja así: 2; CUATRO, se dibuja así: 4; CERO, se dibuja así: 0;... Evitando hacer alusión a cualquier ayuda que pueda desnaturalizar el concepto que tienen que intelectualizar.



El niño ya sabe el nombre numérico de una cantidad de elementos, mediante conteo. Ahora tendrá que asociar ese nombre numérico con la cantidad y el símbolo matemático que representa esa cantidad; sólo entonces se puede decir que hablamos de número. El número es una entidad intelectual, no se percibe en la realidad, se proyecta a la realidad.

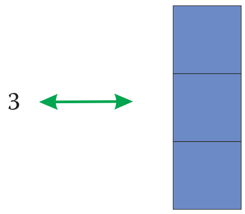
Para que esta asociación: nombre, cantidad y símbolo, tenga sentido para el niño y lo construya en su mente de una manera ortodoxa, matemáticamente hablando, es necesario que establezca una correspondencia perfecta entre lo convencional y lo intelectual.

La colocación vertical ayuda al niño a ver la acumulación de elementos y tras esa ayuda el niño tiene que saber contar cualquier cantidad de elementos en cualquier posición.

Actividad Uno: El niño distinguirá y reconocerá con su propio lenguaje las formas (1, 2, 4, 0, 3, 5,...) Obsérvese que no son números, sino dibujos que el niño debe identificar de forma libre[10].

Actividad dos: Una vez el niño sepa que el último sonido pronunciado coincide con el cardinal y responde a la pregunta ¿Cuántos? (Trabajo que hemos desarrollado en el apartado *Consecuencia*), le informaremos cómo se dibuja el nombre numérico que asocia correctamente a una cantidad.

— Contamos los libros.
— Uno, dos, tres.
— Entonces, decimos que hay tres libros.
— ¿Cuántos libros decimos que hay?
— Tres.
— Tres, se dibuja así: 3 (Ese es el dibujo del número tres)[11].



Los símbolos dieron lugar a la concepción de números tan grandes que nunca habrían podido ser descubiertos por observación directa o por enumeración. (Aleksandrov, 1994, pág.28).

UNO, se dibuja así: 1
DOS, se dibuja así: 2
TRES, se dibuja así: 3
CERO, se dibuja así: 0
CUATRO, se dibuja así: 4
[...]

Se realizarán actividades en las que el niño pueda buscar el número que le corresponde a una cantidad de elementos, por su cardinal; y actividades en las que el niño pueda encontrar la cantidad de elementos que representa un número cardinal[12].

Contar elementos en cualquier posición

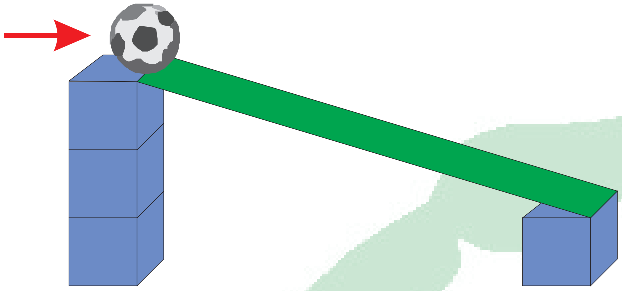
Si bien es cierto que la colocación vertical ayuda al niño a ver la acumulación de elementos, también es cierto que tras esa ayuda el niño tiene que saber contar cualquier cantidad de elementos en cualquier posición. Para enseñar esto utilizaremos el desafío y la provocación a partir de lo que saben. Una técnica consiste en pedir al niño que nos diga cuántos lapiceros hay (estos están por ejemplo encima de una mesa). El niño no los puede apilar en forma de torre, entonces esperaremos a ver qué se le ocurre para responder a nuestra pregunta (es importante que estos ejercicios se realicen después de dominar la técnica en posición vertical). Observaremos que muchos niños nombran: Uno, dos, tres, señalando cada vez a uno de ellos. Estos niños han intuido perfectamente que al que llaman dos es aquel que haría una cantidad de dos por acumulación y así sucesivamente. Jugaremos varias veces con elementos que no se puedan apilar hasta consolidar la técnica. Otros niños, sin embargo, se empeñarán en ponerlos en forma de torre, diciendo algo parecido a: *no se puede poner, no vale*,... Aceptaremos lo que nos digan, sin indicar ayuda alguna en absoluto.

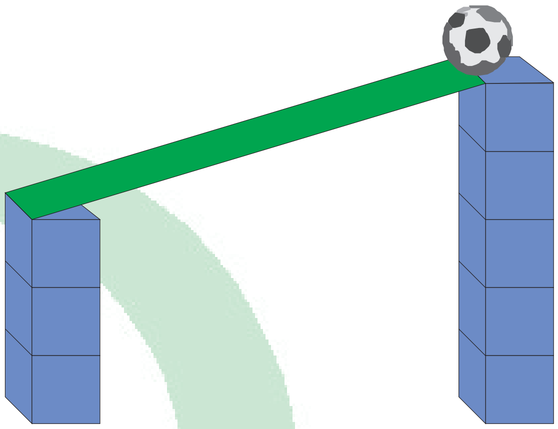
Otra técnica consistirá en utilizar elementos que se puedan posicionar verticalmente, pero que ahora no lo estén, y pedir a los niños que respondan a la pregunta: ¿Cuántos...?, sin utilizar las manos y teniendo éstas siempre detrás de ellos. Observaremos qué se les ocurre, estudiaremos el margen de error y acierto. También aceptaremos lo que nos digan sin indicar ayuda alguna en absoluto. Después de que el niño responda, será él quien lo coloque verticalmente para que le sirva de autocorrección.

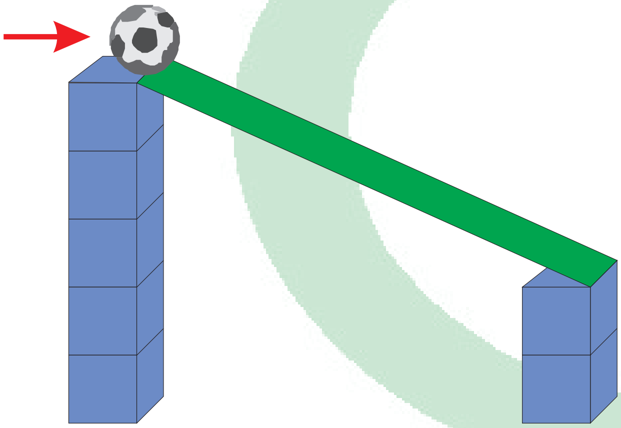
Otra técnica, más fácil que las anteriores, consiste en contar elementos que se puedan apilar verticalmente formando torres. Una vez los hayamos contado y sepamos cuántos hay, provocaremos intencionadamente el derrumbe de la torre, invitando al niño a responder a la pregunta: cuántos hay. Ocurrirá lo siguiente: Unos niños dirán el número que recuerdan y no contarán de nuevo; otros contarán construyendo de nuevo la torre; y otros señalarán cada elemento contando correctamente sin necesidad de apilar.

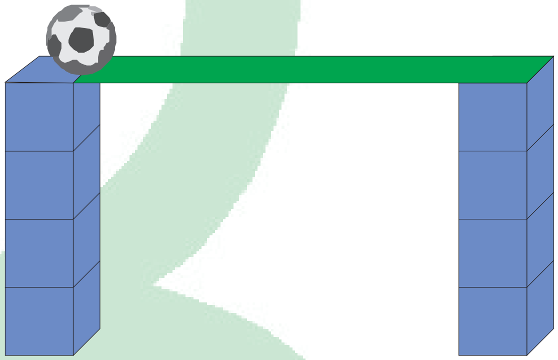
Ordenar

Llegados a este punto podemos comparar cantidades de elementos que se disponen verticalmente en dos torres. Tiene que aprender el niño: dónde hay más, dónde hay menos o cuándo en una torre hay tantos como en la otra.



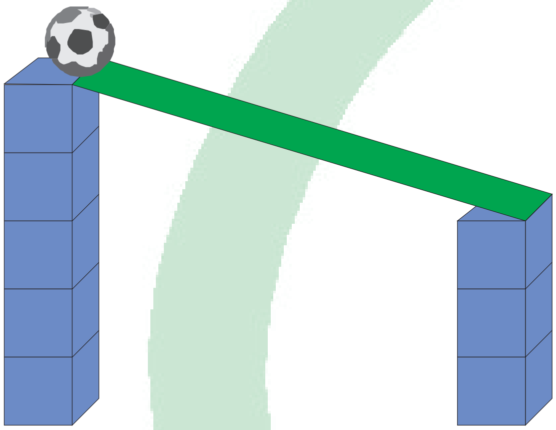


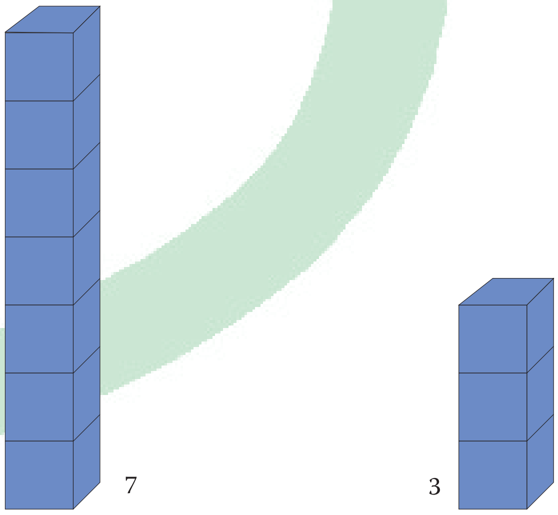




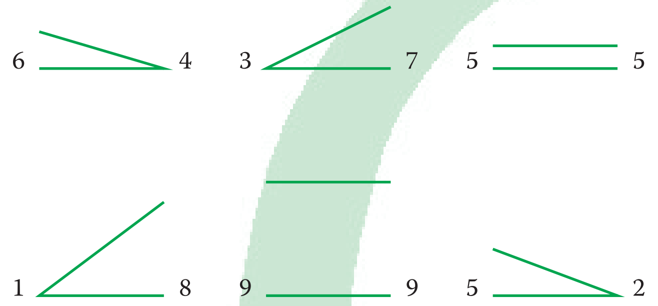
Jugaremos con una pelota y una rampa a modo de tobogán. Si sabemos dialogar con el niño mediante claros ejemplos y contraejemplos[13], rápidamente descubrirá los símbolos comparativos: mayor que, menor que o igual.

Si sabemos dialogar con el niño mediante claros ejemplos y contraejemplos, rápidamente descubrirá los símbolos comparativos: mayor que, menor que o igual.





El niño de Educación Infantil puede interpretar correctamente los signos *mayor que* y *menor que*, pero no por ello debemos obligarle a dibujarlos; acción difícil e innecesaria.



En general puede afirmarse que no hay cuestiones agotadas, sino hombres agotados en las cuestiones. (Ramón y Cajal, 1995, pág. 37).

Gráficos

Los siguientes gráficos muestran, en tantos por ciento, diferencias de los aciertos, al utilizar la técnica de contar para responder a la pregunta *cuántos*, entre los grupos experimental y control, de niños de tres, cuatro y cinco años de edad. Tanto el grupo experimental, como el grupo control es la suma de grupos experimentales y grupos de control utilizados durante tres cursos académicos diferentes y en diferentes centros educativos.

NOTAS

1 *El número, en efecto, juega en dos terrenos: lo parecido y lo diferente. Las cosas que quieren enumerarse son parecidas en tanto que son; son diferentes en tanto que no son lo mismo. [...] Para hacer cuatro bisontes es preciso no querer distinguirlos, y al mismo tiempo es necesario estar convencido de que cada uno de ellos no es uno de los otros.* (Denis Guedj, 1998, pp.14-15).

2 Whitehead, en un ensayo de 1912 *Mathematics and liberal Education*, publicado en Essays in Scienc ie and Philosophy, decía que *Las matemáticas (se refiere a la enseñanza de la matemática)...deben ser depuradas de todo elemento que sólo pueda justificarse de cara a estudios posteriores. No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio... La sola idea de aprender tiene un sentido muy extendido de aburrimiento. Yo lo atribuyo a que a los estudiantes se les enseñan muchas cosas simplemente en el aire, cosas que no tienen ninguna coherencia con los pensamientos que surgen naturalmente en cualquier persona que viva en este mundo moderno, independiente de que sea o no un intelectual.*

3 *Importa consignar que los descubrimientos más brillantes se han debido no al conocimiento de la lógica escrita, sino a esa lógica viva que el hombre posee en su espíritu* (Ramón y Cajal, 1995, pág. 27).

4 Proyecto de Investigación, n.º 4-1-8703. LAE. Universidad Nacional de San Luis (Argentina). Publicado en el artículo *Matemática e historia: una articulación para la enseñanza*. Enseñanza de las Ciencias, 1993, Número Extra (IV Congreso), p. 329.

5 La adquisición del concepto de número no es fácil: por un lado, la historia de la Matemática aporta a esa afirmación pruebas suficientes; por otro, las respuestas que obtenemos de los alumnos que entran en contacto con este tema ofrecen datos que dejan al descubierto importantes vacíos en su comprensión, subrayando esas dificultades propias de la adquisición del concepto.

6 *Todos los acontecimientos, incluso aquellos que por su insignificancia parecen no atenerse a las grandes leyes de la naturaleza, no son sino una secuencia tan necesaria como las revoluciones del sol. Al ignorar los lazos que los unen al sistema total del universo, se los ha hecho depender de causas finales o del azar, según que ocurrieran o se sucedieran con regularidad o sin orden aparente, pero estas causas imaginarias han ido siendo descartadas a medida que se han ido ampliando las fronteras de nuestro conocimiento, y desaparecen por completo ante la sana filosofía que no ve en ellas más que la expresión de nuestra ignorancia de las verdaderas causas* (Laplace, 1795, 1985, pág. 24).

7 *Preferible es la arrogancia al apocamiento; la osadía mide sus fuerzas y vence o es vencida, pero la modestia excesiva huye de la batalla y se condena a vergonzosa inacción* (Ramón y Cajal, 1995. pág. 31).

8 *Como han afirmado muchos pensadores y pedagogos, el descubrimiento no es fruto de ningún talento originariamente especial, sino del sentido común mejorado y robustecido por la educación técnica y por el hábito de meditar sobre los problemas científicos* (Ramón y Cajal, 1995, pp. 45-46).

9 *Aprendan ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente* (Puig Adam, 1956, pág. 8).

10 Evitaremos influir en la percepción libre del niño con canciones como: *El uno es un soldado..., el dos es un patito...* éstas pueden desnaturalizar el posterior concepto de número. Algún niño puede creer que dos es uno: por eso del patito; y nada más lejos de la realidad. Evítese, desde la enseñanza, todo eso de que si... el uno es un soldado, el cuatro una silla, el cero es una rosquilla, o cosas parecidas.

En estos momentos no estamos hablando de números, sino de formas, por lo que conviene que sea el niño el que nos diga lo que ve desde lo que su experiencia le ha preparado para ver. Para algunos niños la forma: 1, puede ser un *delgado*, *un palo*, etc.; para otros o los mismos, la forma: 2, puede ser *un torcido*, *una percha*, *un circuito*, *un dos* o *un patito*. Que se respete lo que él ha visto es muy distinto a que él tenga que respetar lo que nosotros queramos que vea. ¡Qué obsesión tiene la enseñanza en poner en la mente del niño los ojos del maestro! ¿Cómo vamos a educar así la observación?

11 MCCLOSKEY et al. (1985) proponen componentes separados para la comprensión y producción de números arábigos y palabras. Uno de los postulados fundamentales de este modelo es la comunicación entre los distintos módulos input y output mediada por representaciones internas abstractas.

12 *Entre los tres y cinco años, el niño aprende difícilmente los cinco o seis primeros números, si se considera que el conocimiento puramente verbal de la serie de los números no corresponde a una verdadera adquisición* (Mialaret, 1962, pág. 15).

13 Se pueden ver el en libro *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*, Grupo Mayéutica. Madrid, 2006.

- Muestra de Centros: Estratificada, por etapas, cronológica y no probabilística.
- Muestra de grupos: Probabilística (aleatoria simple).
- Muestra de alumnos: Coincide con la población de los grupos.

Tres años

Contar	Experimental N = 67	Control N = 63	Diferencia
Hasta 3	100	89	11
Hasta 5	100	82,5	17,5
Hasta 10	34,33	38,1	-3,77
Más de 10	16,4	20,6	-4,2

Cuatro años

Contar	Experimental N = 62	Control N = 69	Diferencia
Hasta 5	100	91,3	8,7
Hasta 10	100	85,5	14,5
Más de 10	80,1	69,6	10,5

Cinco años

Contar	Experimental N = 73	Control N = 69	Diferencia
Hasta 10	97,3	89,8	7,5
Hasta 20	97,3	86,9	10,4

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEKSANDROV y otros (1973): *La matemática. Su contenido, métodos y significado*, 3 Vols, Alianza, Madrid.

CONTRERAS GONZÁLEZ, L. C. (1989): "El concepto de número en preescolar", *SUMA* 3, 29-33.

BOYER, C. (1987): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.

CARR, W. y KEMMIS, S. (1988): *La investigación-acción en la formación del profesorado*, Martínez Roca, Barcelona.

DEHAENE, S. (1992): "Varieties of numerical abilities", *Cognition*, 44, 1-42.

DENIS GUEDJ (1998): *El imperio de las cifras y los números*, Ediciones B, Barcelona.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2005): *Enséñame a contar*, *Investigación didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática*, Grupo Mayéutica, Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2006): *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*, Grupo Mayéutica, Madrid.

GUYOT, CERIZOLA Y GIORDANO (1993): "Matemática e historia: una articulación para la enseñanza", *Enseñanza de las Ciencias*, 1993, Número Extra (IV Congreso).

KAMII, C. (1995): *El número en la educación preescolar*, ED. Visor, Madrid.

LAPLACE Ps. (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Alianza Editorial, Madrid.

LAWRENCE, E; T.R THEARKISTAN y N.S ISAACS (1968): *La comprensión del número y la educación progresiva del niño según Piaget*, Paidos, Barcelona.

MCCLOSKEY, M., CAMARAZZA, A. y BASILI, A. (1985): "Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia", *Brain and Cognition*, 4, 171-196.

MIALARET, G. (1962): *Pedagogía de la iniciación en el cálculo. Ed. Kapelusz*, Colección de pedagogía práctica, Buenos Aires.

NEWMAN, D.; GRIFFIN, P., y COLE, M. (1991): *La zona de construcción del conocimiento*, Morata, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1956): *Didáctica, Matemática, Eurística*, Institución de Enseñanza Laboral, Madrid.

RAKITOV, A. (1989): "Formas y métodos del conocimiento científico", *Fundamentos de Filosofía*, pp. 343-363, Progreso, Moscú.

RAMÓN Y CAJAL, S. (1995): *Reglas y consejos sobre investigación científica, Los tónicos de la voluntad*, Espasa Calpe, Colección Austral, Madrid.

WHITEHEAD A. N. (1912): "Mathematics and Liberal Education", *Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the Southeastern Part of England*, Volume I, Number 1 in A philosopher looks at science, (Philosophers Library) New York, 1965.

SUMA 55
Junio 2007, pp. 31-39

Las matemáticas son las greguerías de la razón

Las greguerías de Ramón Gómez de la Serna son frases en las que con grandes dosis de humor e ingenio se unen dos elementos del mundo que nos rodea acercándose a veces a la literatura del absurdo. Las matemáticas están presentes a nuestro alrededor y forma parte de nuestra vida cotidiana, por ello no es extraño que formen parte de nuestro lenguaje y por tanto de la literatura. En este artículo investigaremos qué matemáticas usamos normalmente en nuestro habla y haremos un repaso por las greguerías en las que pueden encontrarse referencias matemáticas.

Ramón Gómez de la Serna's 'greguerías' are sentences in which two elements of our social environment are joined together with a great deal of humour and wit. Sometimes they are close to literature of the absurd. Mathematics are always around us and they are part of our daily life, so they are also part of ur language and literature.
In this article we investigate what kind of maths we usually us in our conversations and we will walk through greguerías in which we can find mathematical clues.

El tema de la divulgación y popularización de las matemáticas no es nuevo en absoluto. Ya en el número 4 de la revista SUMA, aparecido en 1989, se editó un cuadernillo monográfico sobre este tema, donde se recogía un informe del encuentro organizado por el ICMI en Leeds, así como experiencias concretas realizadas en nuestro país, especialmente el documento elaborado por el grupo de trabajo organizado por la FESPM y que se celebró en Sierra Nevada con la asistencia de expertos de toda España.

Sin embargo, a raíz de la elección del año 2000 por la UNESCO como año internacional de las matemáticas, estas experiencias aumentaron exponencialmente. Hoy en día, una gran mayoría de profesores están convencidos de que las matemáticas no son patrimonio de los matemáticos, que conociendo su interés y su belleza, son conscientes de la importancia de hacer llegar las matemáticas a todos los estamentos de la sociedad. Por eso, es ahora más importante que nunca presentar las Matemáticas de forma agradable y amena, a ver si desterramos esa idea de que las matemáticas son el *coco* de los estudiantes, cuando, en realidad son algo maravilloso e interesante. Así, no es raro encontrarse matemáticas lúdicas y atractivas en los medios de comunicación, en los cómic, en cine, televisión, teatro, fotografías, etc.

Muchas páginas en Internet, tanto personales como de centros educativos o incluso institucionales, dedican un apartado a chistes, biografías, relatos de eventos, acertijos lógicos, etc.

> *Humorismo + Metáfora = Greguería*
> Ramón Gómez de la Serna

Una de las artes que sirven para divulgar las matemáticas es la literatura, que, además, permite atraer a un público que muchas veces es reacio a relacionarse con una materia que recuerdan con horror de sus años escolares. Podemos utilizar no sólo obras con referencias matemáticas, como por ejemplo, Planilandia de Edwin Abbot, Alicia de Lewis Carroll o Gulliver de Jonathan Swift o más recientes como El Teorema del Loro, El Diablo de los Números o el Tío Petrus y la Conjetura de Goldbach, ya que a partir del año 2000 han proliferado los libros relacionados con la materia. Incluso en escritos que no tratan estrictamente el tema matemático podemos encontrar palabras y conceptos matemátics. Por ejemplo, es posible encontrar en muchas páginas web un

José Muñoz Santonja
IES Macarena de Sevilla
Sevilla

apartado de poesía matemática donde se recogen referencias de Alberti, Celaya, Gloria Fuertes, Neruda[1], etc.

Hay un autor que me parece apasionante, Ramón Gómez de la Serna, que, sin embargo, no suele ser recogido en muchas de las páginas que he visitado.

Ramón Gómez de la Serna

El escritor Ramón Gómez de la Serna nació en Madrid (3 de Julio de 1888) y murió en Buenos Aires (12 de Enero de 1963). Publicó su primer libro con 15 años en 1904. A lo largo de su vida fue periodista, orador y colaborador en múltiples publicaciones de España y América Latina. Cultivó multitud de géneros literarios: humorismo, ensayo, crítica de arte, biografías,... y llegó a alcanzar tal notoriedad en su época que era conocido solamente por Ramón.

Perteneció a la Academia del Humor de París y recibió, entre otras, la Medalla de Oro de Madrid. Está considerado como introductor del futurismo a través de su revista Prometeo. Tuvo una gran influencia en muchos escritores de la época (los que serían la generación del 27), sobretodo como inspirador de la tertulia del Café del Pombo.

El motivo por el que más gente lo conoce es por ser el creador de las greguerías. Creó este género literario en 1910 y desde 1911 comenzó a publicarlas regularmente. Aunque en un principio causaron un poco de rechazo (incluso hubo suscriptores que dejaron de leer los medios donde las publicaba), enseguida fueron aceptadas y admiradas como ejemplo de ingenio. A lo largo de su vida escribió miles de estas frases que alcanzaron gran fama y promovió la aparición de imitadores, falsos imitadores y plagiadores.

La greguería, donde se roza la literatura del absurdo, pretende relacionar dos elementos de la vida cotidiana de una manera humorística y muchas veces crítica, llegando en ocasiones a conseguir un verdadero disparate. Según él mismo decía: *La greguería es para mí la flor de todo lo que queda, lo que vive, lo que resiste más al descubrimiento*: La greguería, algarabía o gritería confusa (en diccionarios antiguos era el griterío de los cerditos cuando van detrás de su madre) fue aceptada como vocablo en 1960 por la Real Academia Española con la siguiente definición:

> Greguería: agudeza o imagen en prosa que presenta una visión personal y sorprendente de algún aspecto de la realidad y que ha sido lanzada y así denominada caprichosamente hacia 1912 por el escritor Ramón Gómez de la Serna.

Las matemáticas y las greguerías

Dado que las matemáticas forman parte del mundo que nos rodea, era evidente que tenían que aparecer en unos retazos de vida cotidiana como son las greguerías. El objetivo de este artículo es bucear dentro de estas piezas humorísticas para encontrar las referencias matemáticas que puedan aparecer. He intentado ser lo más exhaustivo posible en mi búsqueda y seleccionar todo aquello que podía tener relación con la matemática en su obra, aunque siempre será imposible recoger todo lo que escribió en ese sentido por la gran cantidad de greguerías que Gómez de la Serna realizó a lo largo de la vida. Sólo en uno de los libros utilizados, el titulado *Total de greguerías* aparecen más de diez mil frases y a pesar de ello el libro es una selección del autor en donde había descartado multitud de sus creaciones.

Hemos pretendido mostrar las greguerías agrupándolas por bloques temáticos (cuando ha sido posible) y van acompañadas de dos tipos de imágenes. Por un lado, una serie de dibujos originales de Gómez de la Serna que en algunas ocasiones ilustran muy fácilmente la greguería. Por otro lado, una serie de fotografías. Estas fotos formaban parte de un panel presentado por el autor en el ICME 8 que se celebró en Sevilla en 1996, y con el que se pretendía mostrar imágenes que se ajustaran a las greguerías matemáticas, que en ese momento se seleccionaron.

Vamos a comenzar con un primer bloque en el que se hace referencia a los bloques temáticos que forman parte de la matemática.

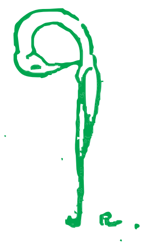
- Trigonometría es andar por el más difícil de los alambres y el más peligroso de los trapecios.
- Doña Álgebra: la gran directora de colegio.
- Estadística: en todo el mundo se pierden siete millones de alfileres al día.
- Geometría del espacio: estudiar caseríos a la luz de la luna.

- La Geometría se columpia en el trapecio.
- Caja de compases: los bisturíes de la Geometría, la Mecánica y la Arquitectura.
- Aquel editor sembró Trigonometría y le salieron diccionarios.

Si comenzamos con los números, hay una serie de definiciones muy curiosas. Gómez de la Serna tenía gran apego a las greguerías en las que hablaba de una letra, e indicaba alguna característica que en general tenía que ver con la forma de la letra, como por ejemplo: *La O es el bostezo del alfabeto*, *La U es la herradura del alfabeto*, *La K es una letra con bastón*. En ese mismo estilo tiene referencias a las cifras, como las siguientes:

- El 9 es la oreja de los números.
- El 4 tiene la nariz griega.

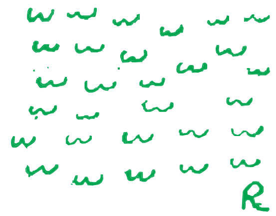
- El 5 es un número que baila.
- El 7 es el zapapico de los números.
- El 6 es el número langostino.
- El 5, cuatro soldados y un cabo.
- El 5 es un número patilludo.
- El 8 es el reloj de arena de los números.
- El 6 es el número que va a tener familia.
- El 8 tumbado parece las gafas de mi hermana.
- Siguiendo la formación espontánea de cifras en que incurre la Naturaleza, después de ver cómo la serpiente hace la L, encontramos en la silueta del marabú, cuando se rasca en el pecho con el pico, la verdadera figura del 9.



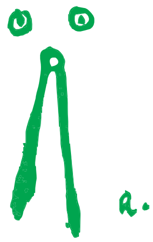
Aparte de lo anterior, son múltiples las greguerías donde se habla de cifras y números concretos, o de números en general:

- Los ceros son los huevos de los que salieron las demás cifras.
- El 11 son los dos hermanos que van al colegio.
- El 46 es un número matrimonial que se va dando un paseo conyugal.
- La hoja del almanaque nos consuela, porque su 7 o su 22 nos son conocidos de antiguo. ¡Qué susto si apareciese el día 35, 117 de nuestra vida!
- Las parejas de cisnes parecen que señalan siempre una misma cifra, el 22; pero a veces, cuando uno de ellos está entrando en el agua y el otro está en pie, a la orilla, señalan el 24.

- 888 cifra de simpáticos trillizos.
- 44444: números haciendo flexiones gimnásticas.
- Cucarichida: muchos treses muertos.



- En el cine es donde se es más cero a la izquierda de la mujer, aunque se esté sentado a su derecha.
- Hay unas horas, las seis y veinticinco y las cinco menos veinticinco, en que se presenta en el reloj la hora china, la hora de los bigotes de mandarín, hora de displacencia de bigotes caídos.



- Cuando el gran matemático iba a cortarse el pelo quedaba la peluquería llena de números que había que barrer.
- La Luna ilumina la cifra del almanaque de los cisnes.
- Hay pájaros que tiesos sobre una sola pata señalan en el paisaje las cuatro y pico.

- Cuando el sastre dicta nuestras medidas, hace nuestra síntesis biográfica: 22 - 51 - 12 - 35 - 67 - 7 …
- El niño grita: *¡No vale!... ¡Dos contra uno!*, y no sabe que toda la vida es eso: dos contra uno.
- El león es el cantante más ruidoso con cero discos vendidos.
- La D es un Cero partido por Dios.

En otras greguerías se hace referencia a característica visuales de las cifras y posibles modificaciones en otros elementos. Entre las siguientes hay algunas que son de seguidores de Gómez de la Serna:

- Los que ponen una rayita al 7 y lo convierten en F son los que retendrán la fortuna y sabrán ahorrar siempre.

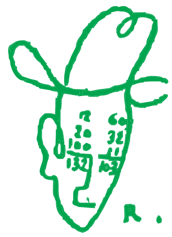
- El zoo es, según los animales que tenga, una z seguida de más o menos ceros: zoooooooo……
- La B es la conjunción del número 13. Soler y Pérez (Guatemala).
- Cruzaba las piernas en número 4. S. Abravel.
- La Z es el 7 que oye misa. Jacinto Miquelarena.

También se encuentran referencias a los números romanos:

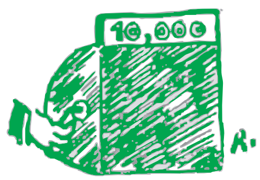
- Los números romanos van siempre a caballo.
- Los que fechan cualquier cosa con números romanos –MCMXXXV– son unos MMMEMOS.
- Los números romanos exigían inscripciones triunfales.

Veamos las referencias a operaciones aritméticas básicas:

- En suma lo que vale es la suma.
- Primavera = rosa + rosa + rosa + rosa.
- 0 + 0 = beso.
- Después de todo, las Mil y una noches duran unos dos años y pico, y a los niños se les entretiene con cuentos más tiempo aún.
- Cuando la bella mano femenina nos ofrece azúcar y su dueña nos pregunta: *¿Dos o tres?*, nosotros contestaríamos: ¡Los cinco!
- Cuando en la guerra oímos hablar de divisiones, se nos presentan los soldados en forma de esa operación aritmética, y el cociente final depende de cómo fueron divididas las divisiones. ¡Atroz cuando no dan sino 0000!
- Caballo: multiplicación de las venas de la cara por la intensidad de los ojos.
- Hay un modo de fruncir la frente en el que va preocupado por una cantidad, que se ve cómo va sumando in mente y las cejas son las rayitas entre los sumandos y el resultado.



- Los números son los mejores equilibristas del mundo: se suben unos encima de otros y no se caen.
- En la tormenta se ve al Profesor Supremo escribiendo y borrando cálculos eléctricos en la pizarra del cielo.
- La memoria es tan perfecta que tiene un cajoncito para las cuentas olvidadas.
- Al mirar el encendido recuadro de las máquinas registradoras esperamos ver cantidades fabulosas. Siempre sobran ceros, como si hubiésemos comprado la tienda.



- Elevador de trigo: el pan elevado al cubo.
- Los chinos escriben las letras de arriba abajo como si después fueran a sumar lo escrito.
- Era tan ostentoso, que ponía dos sellos de cinco en vez de uno de diez.

- Relojero exacto: A este reloj le falta un segundo cada trece minutos.
- Sábado: tres copas + una botella = un cadáver de señor calvo y dos prófugos.
- ¿Qué es eso de *elevado al cubo* cuando el cubo suele estar siempre abajo?
- Al reloj parado le queda el orgullo de que dos veces al día señala la hora que es.
- La M siempre se sentirá superior a la N. (Relación de orden).

También podemos encontrar fracciones y tantos por ciento:

- Los que beben pegados al mostrador del bar resultan divididos por el mismo común denominador.
- A la media botella de vino siempre le faltará la otra mitad.
- El que va a dar una limosna y después no la da, es un ahorrativo cien por cien.
- Hay un treinta por ciento de caracoles que se vengan de nosotros no estando en su cáscara cuando los buscamos en el guiso.
- El bufón quería ser trágico y cómico al mismo tiempo, y por eso se vestía la mitad de un color y la mitad de otro.
- Esta es una época en el que el 100 por 100 tiene un par de ceros más.
- Un busto en una hornacina es sólo un cuarto de inmortalidad.
- Medio mundo vive de ponerle inyecciones al otro medio.

En la parte de medida, se encuentran unidades de medida muy diferentes:

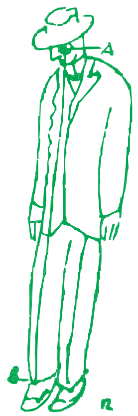
- La serpiente mide el bosque para saber cuántos metros tiene y decírselo al ángel de las estadísticas.
- Hay unos tozudos de la excursión a los que les basta colocarse en la cabeza un pañuelo con cuatro nudos para hacer veinte kilómetros bajo el sol.
- Longevidad es tener longaniza para ir tirando pasados los setenta años.
- El grillo mide por milímetros la noche.
- Elefante: miembro de la sociedad de los seiscientos kilos.

En la parte de Álgebra encontramos pocas referencias (como era de esperar) y la mayoría de las veces respecto a fórmulas o jugando con la incógnita x:

- ¿Por qué la x que más grabada está en nosotros es la de los fémures cruzados? Porque esa es la x más verdadera del misterio.
- Los amantes enlazados por la cintura componen la incógnita x del amor.
- El puente está hecho de XXX que son las incógnitas de si se caerá o no al pasar el tren.
- Vitamina: fórmulas matemáticas tomadas por la boca.
- Al ver el anuncio de *6 vueltas* en el aparato de feria nos ha parecido que la vida no es más que eso, *Equis vueltas*.

Vamos a ver la parte geométrica, que lógicamente es bastante más extensa. En ella podemos encontrar referencias a líneas de diverso tipo:

- Al calvo el peine le sirve para hacerse cosquillas paralelas.
- La verdadera perpendicular es la mirada que el del palco número 4 echa sobre el escote de la del palco principal número 4.
- Dios hizo el horizonte perfectamente horizontal, sin necesitar nivel de aire ni nivel de agua.
- No dará el mismo resultado una mujer de rayas horizontales que una de rayas verticales.
- La línea recta no es igual para todos: la del ladrón, por ejemplo, es la que va desde su mirada a la caja de caudales.
- El que mejor traza una perpendicular es el que se tira del balcón a la calle.
- El hombre pendiente de la raya del pantalón, rectilínea y perfecta, es un geómetra con mucho ojo que está disparando siempre la plomada de su mirada para ver si va bien o mal planchada la línea capital de su existencia.



- De la línea curva…, mejor es callar la definición.
- Era un niño tan sensible que cuando le preguntaba el profesor qué era una curva se ruborizaba.
- Los tornillos son clavos peinados con la raya al medio.

Otro tema recurrente es el de los ángulos:

- Hay horas geométricas y rectilíneas que marcan el ángulo de la rectitud.

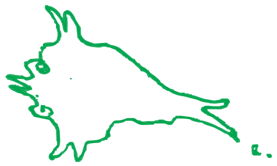
- Abrazo pasional: suma de los ángulos de cuatro brazos.
- Ángulo recto: el que hace al doblar la esquina el que persigue a una mujer.
- Cuando al irnos a levantar nos incorporamos en la cama hacemos el ángulo capitular del día.

Los polígonos también tienen cabida en las greguerías:

- El triángulo escaleno lo vemos con escalerilla propia para subir al vértice.
- El racimo es un triángulo pletórico y juguetón.
- Malo cuando el escote en ángulo se vuelve triángulo con la cinta negra al cuello.
- La guillotina es el triángulo fatal.
- Siempre resultará misterioso y medio teñido con tinta el hombre cuya barba y cuyo bigote componen un triángulo.

- El triángulo es el monóculo de Jehová.
- El que pone los puntos sobre las íes está en el trapecio de la puntuación.

- La raya, con su cuerpo aplastado y romboidal y su cola larga, es el pez cometa del mar.



La circunferencia y el círculo, así como otras curvas, también aparecen bastante:

- Las calvas son medias circunferencias.
- Hay un momento en que el reloj prepara el compás para trazar su circunferencia.

- La elipse es la curva que describe el panecillo que tira uno de los comensales a otro, en la cena fraternal.
- El ovalo es el círculo que adelgazó.
- El ruedo taurino es una circunferencia en la que el punto central, que es el torero, tiene derecho a desplazarse sin dejar de ser el centro del espectáculo.
- Solo la iluminada ventana oval de la buhardilla del palacio parece ser feliz.
- Con un círculo, un tupé, dos eñes y una zeta sale el clown más sintético.

- Ese semicírculo que hacemos sobre la arena del jardín, con nuestro bastón, mientras estamos sentados, es la justa medida de nuestro nicho.

- Dos especies diametralmente opuestas: viajeros de maletas blandas y viajeros de maletas duras.
- Hay dos tipos diametralmente opuestos: los que piden sopa siempre y los que no la toman nunca.
- Una media circunferencia es el ocaso geométrico.

Es curioso que incluso aparecen fórmulas relacionadas con los anteriores.

- πr^2 es también la fórmula del grillo.
- Al revés, R.I.P. resulta la fórmula matemática de la inmortalidad: P.I.R.

He encontrado dos curiosas referencias a la cuadratura del círculo, una de Ramón y otra de un seguidor:

- Ese marco que se ponen los árabes sobre el turbante es la cuadratura del cráneo.
- El tricornio de la Guardia Civil parece un intento plástico de resolver la cuadratura del círculo. Seral y Casas.

También se encuentran elementos de tres dimensiones.

- El que dice paralelepípedo parece tartamudo.
- Paralelepípedo es como queda el atropellado por todos los corredores de una carrera de bicicletas.
- Lo que más sorprende del tetraedro es que no tenga tres lados, sino cuatro. ¡Hay palabras engañosas!
- En la llama de un fósforo está la gran pirámide del fuego.
- Las pirámides tienen la forma que tienen porque fueron hechas a base de no caerse nunca.
- Las pirámides son los tupés del desierto.
- Las pirámides son las jorobas del desierto.
- Aquel trío o triángulo era un tetraedro por lo opulenta que era ella.
- En los cubos de piedra de los viejos puentes se refugia el tesoro de los siglos.
- El obelisco es como una pirámide que hubiese enflaquecido.
- La mayor ingenuidad del novel círculo literario es el nombramiento de tesorero.

A veces hay temas matemáticos que subyacen detrás de las greguerías. Por ejemplo los conceptos de simetría o giro aparecen en las siguientes:

- La W es la M haciendo la plancha.
- La q es la p que vuelve del paseo.
- En la noche de los vagones solitarios vamos con dos mujeres: la nuestra y la que se refleja en el cristal.
- Lo más difícil que hace un jinete es sostenerse en la imagen de su caballo reflejada en el agua.
- Cuando gira el espejo del armario gira el mundo con él.

Sólo he conseguido encontrar tres referencias a matemáticos y no precisamente de Pitágoras como podría suponerse, y además no relacionadas con las matemáticas.

- Conflicto de Arquímedes: no saber dónde echar el mucho hielo que nos han metido en el vaso.
- El nuevo Arquímedes dice: Dadme un calzador y pondré los zapatos al mundo.
- Descartes: el que se descartó de muchas ideas para quedarse sólo con las buenas.

Y para acabar una referencia al crecimiento y decrecimiento y otra al orden de factores:

- Si la tos está formada en espiral ascendente nos salvaremos, pero si es descendiente la cosa empeorará.
- Los que matan a una mujer y después se suicidan debían variar el sistema: suicidarse antes y matarla después.

Cómo aprovechar este material

Después de la amplia selección de frases ingeniosas, quiero indicar algunos aspectos en que se puede aprovechar toda esta información en el mundo educativo.

En primer lugar está el aspecto divulgativo. Somos firmes creyentes en que estamos obligados a hacer ver a nuestros alumnos que las matemáticas son consustanciales con el mundo que nos rodea, que podemos encontrarlas en cualquier lugar y no sólo restringidas a la pizarra y el libro de texto. Por ello, frases divertidas como las vistas pueden y deben ser incluidas en las páginas web de los centros (que en muchos casos han sustituido a las antiguas revistas editadas en los institutos y colegios). También pueden utilizarse para rellenar tablones culturales que existen en muchos centros para divulgar las matemáticas y otras disciplinas.

En muchas provincias, y también en muchos centros educativos, se celebran concursos de fotografía y matemáticas, de los que posteriormente se saca buen rendimiento educativo[2]. Ya hemos comentado que muchas de las greguerías tienen una clara idea visual asociada, por ello puede ser muy interesante que los alumnos creen fotografías matemáticas basadas en ellas. Basta hacer que seleccionen las que más les atraigan y un día, gracias a las máquinas digitales, dedicar una sesión a crear imágenes que las representen. Mi experiencia en los concursos de fotografías e imágenes matemáticas me confirma que los alumnos suelen ser tremendamente imaginativos a la hora de plasmar sus ideas.

Las greguerías no dejan de ser literatura y por ello pueden aprovecharse para aquellos centros (como el mío) que están inmersos en planes de lectura. En mi instituto todos los departamentos hemos entregado una lista de libros de literatura relacionados con nuestra materia y se han comprado para que los alumnos lo lean en el centro. La obra de Gómez de la Serna es tan atractiva que es interesante que vean que en ella aparece también la matemática cotidiana.

Otro aspecto es el puramente educativo y en este caso tenemos la ventaja de poder realizar actividades interdisciplinares con otros departamentos. Hace años me comentaba una profesora de Lengua que ellos utilizaban las greguerías como un material motivante y atractivo para estudiar las figuras retóricas. Otra posibilidad es seleccionar, para trabajar esos temas, aquellas frases que tengan contenido matemático. En el Anexo se puede encontrar una de las actividades que hemos realizado este último año entre los departamentos de Lengua y Matemáticas.

Desde el punto de vista matemático, como se puede ver en la actividad, es atractivo para los alumnos el crear ellos mismos greguerías. Lógicamente, los conceptos que vuelcan en sus invenciones están profundamente aprendidos. Como ejemplo añado algunas de las greguerías que han inventado mis alumnos en este último curso.

- El 8 es gordito y cabezón.
- El 7 es un perchero.
- El número 0 es un roscón de reyes (la actividad se realizó en las vacaciones de Navidad).
- El 9 es el número globo.
- El 0 siempre está bostezando.
- El 3 es una E al revés.
- El 4 es una silla al revés.

Pueden ayudarnos estas frases para saber si nuestros alumnos tienen captados determinados contenidos. La idea es explicitar qué concepto matemático aparece en las frases seleccionadas. Por ejemplo, si saben distinguir que la simetría que aparece en las dos siguientes greguerías una vez tiene un plano de simetría horizontal y otro vertical.

- La W es la M haciendo la plancha.
- La q es la p que vuelve del paseo.

En algunas de las greguerías aparecen errores matemáticos, algo que siempre se le puede pasar a una persona no experta en la materia. Los alumnos dominan el tema si saben reconocer esos errores y redactar la greguería correctamente. Para mí significó una desagradable sorpresa cuando al plantear el error que aparece en la greguería: *Lo que más sorprende del tetraedro es que no tenga tres lados, sino cuatro. ¡Hay palabras engañosas!* la mayoría de los alumnos de 4º de ESO que respondió, dijo que el error estaba en que el tetraedro *si tiene* tres lados. Lo que me confirmó que esos alumnos no tenían claro el concepto de tetraedro.

Para terminar

La idea que me ha llevado a escribir este artículo era presentar un género literario muy especial, en el que se puede encontrar matemáticas y que puede ser interesante, tanto para nuestros alumnos como para cualquier persona en general.

El fin último que debe guiarnos siempre es que nuestros alumnos no caigan en el convencimiento de que la matemática es algo estanco, que no tiene relación con nada más. Creo que presentar este tipo de relaciones sirve, por un lado para divulgar la matemática como una ciencia no necesariamente abstracta, y por otro lado, para relacionarla con el mundo que nos rodea. Si hablaran con mi mujer, verían cómo les diría que, según sus conocimientos, las matemáticas son algo absurdo que sólo servían para hacer tremendos castillitos o esa estúpida teoría de conjuntos, que nunca sirvió para nada. Lo curioso es que ella era muy buena estudiante y sacó muy buenas notas incluso en Física, pero no en Matemáticas, que se las habían hecho aborrecer. ¿Vamos a permitir que nuestros alumnos se aburran con esta maravillosa herramienta para conocer el mundo? Es obligación nuestra hacer que nuestros alumnos se sientan atraídos con nuestro producto, las Matemáticas, y si a ello se une la literatura, mejor que mejor.

Espero que hayan disfrutado ustedes del genio de Ramón Gómez de la Serna, si es así no se lo callen.

Anexo

Greguerías

El escritor Ramón Gómez de la Serna (Madrid 1888, Buenos Aires 1963) fue el creador de las greguerías, frases en las que con humor se mezcla el absurdo con elementos de la vida cotidiana. A continuación vas a trabajar con una serie de estas frases.

Realiza un análisis sintáctico e indica qué figura retórica (metáforas, hipérboles, símiles, elipsis, etc…) aparece en las siguientes greguerías.

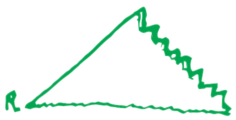
- El 4 tiene la nariz griega.
- La Luna ilumina la cifra del almanaque de los cisnes.
- Elevador de trigo: el pan elevado al cubo.
- El 8 tumbado parecen las gafas de mi hermana.
- Era tan ostentoso, que ponía dos sellos de cinco en vez de uno de diez.
- Hay un treinta por ciento de caracoles que se vengan de nosotros no estando en su cáscara cuando los buscamos en el guiso.
- ¿Qué es eso de *elevado al cubo* cuando el cubo suele estar siempre abajo?.
- De la línea curva…, mejor es callar la definición.

Entre las frases anteriores has visto relacionar algunos números con elementos cotidianos. Lee las siguientes y después intenta escribir una frase para buscar un símil entre algún número y algún objeto de la vida real.

- El 5 es el número que baila.
- El 6 es el número langostino.
- El 11 son los dos hermanos que van al colegio.
- 4444: números haciendo flexiones gimnásticas.

Indica los elementos matemáticos a los que se hace referencia en las siguientes greguerías y descríbelos:

- Al calvo el peine le sirve para hacerse cosquillas paralelas.



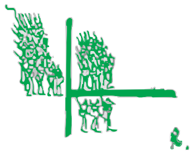
- Ángulo recto: el que hace al doblar la esquina el que persigue a una mujer.
- Una media circunferencia es el ocaso geométrico.
- Los números son los mejores equilibristas del mundo: se suben unos encima de otros y no se caen.
- El triángulo escaleno lo vemos con escalerilla propia para subir al vértice.

Explica qué sentido matemático tienen las siguientes frases:

- Después de todo, las *Mil y una noches* duran unos dos años y pico, y a los niños se les entretiene con cuentos más tiempo aún.
- La W es la M haciendo la plancha.

En las siguientes greguerías hay errores matemáticos, indica cuáles son:

- Lo que más sorprende del tetraedro es que no tenga tres lados, sino cuatro. ¡Hay palabras engañosas!
- Cuando en la guerra oímos hablar de divisiones, se nos presentan los soldados en forma de esa operación aritmética, y el cociente final depende de cómo fueron divididas las divisiones. ¡Atroz cuando no dan sino 0000!



NOTAS

1 Sobre el tema de la poesía y matemáticas se puede consultar el artículo publicado por José Muñoz, Carmen Castro y Mª Victoria Ponza en la revista SUMA, n.º 22 de junio de 1996 de título *¿Pueden las matemáticas rimar?*

2 Se puede consultar el artículo *Aprovechamiento didáctico de la actividad Fotografía y Matemáticas*, publicado en la revista SUMA, n.º 31, Junio 1999, escrito por Antonio Fernández-Aliseda, José Muñoz y Agueda Porras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GÓMEZ DE LA SERNA, R. (1962): *Total de greguerías. Aguilar*, Madrid. 2ª edición.

GÓMEZ DE LA SERNA, R. (2003): “Greguerías”, *El País*, Colección Clásicos del Siglo XX, n.º 15, Madrid.

En Internet

En la red de redes pueden encontrarse muchas referencias a Ramón o a sus creaciones, aunque las relacionadas con las matemáticas son escasas.

Una buena selección de greguerías (no matemáticas) agrupadas por materias puede encontrarse en:

http://www.geocities.com/greguerias/

Para consultar sobre la vida y obra de Ramón Gómez de la Serna una buena página es:

http://www.ramongomezdelaserna.net/

Hay otra página donde aparecen algunas frases ingeniosas de diferentes personajes a quien el autor de la página llama gregueristas (Woody Allen, Groucho Marx, Oscar Wilde,...):

http://usuarios.lycos.es/valdelacasa/greguerias.htm

Convocatoria del cargo de Secretaria o Secretario General

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), en la reunión celebrada en Madrid el día 14 de abril de 2007, ha decidido convocar la Secretaría General de la Federación en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a la *Secretaría General* cualquier socia o socio de una Sociedad Federada, con dos años de antigüedad al menos en tal condición. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste su condición de socio activo de una Sociedad Federada y su antigüedad.
- Una memoria de un máximo de tres folios, a doble espacio y por una cara, en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General

De acuerdo con lo establecido en el Estatuto de la FESPM, son funciones de la Secretaría General:

a) La coordinación general de todas las actividades de la FESPM.
b) Proponer a los órganos de Gobierno aquellas iniciativas que redunden en beneficio de la Educación Matemática y organizar la elaboración de estudios y trabajos que hayan sido aprobados por los mismos.
c) Elaborar la programación de actividades de la FESPM para su aprobación por la Junta de Gobierno, de acuerdo con la Comisión Ejecutiva.
d) Rendir cuenta de su gestión anualmente ante la Junta de Gobierno.
e) Informar a los asociados de las actividades de la FESPM.
f) Actuar como secretario/a en la Comisión Ejecutiva y en la Junta de Gobierno custodiando sus actas.
g) Librar los certificados que proceda, con el visto bueno de la Presidencia.
h) Ordenar gastos.
i) Llevar la correspondencia de la FESPM con sus correspondientes registros de entrada y salida.
j) Expedir y sentar en un libro de registro cuantos certificados emita la FESPM.
k) Cuantas otras le encomienden los órganos de gobierno de la Federación.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 30 de octubre de 2007, dirigida a:

Serapio García Cuesta. Presidente de la FESPM
San Antonio 47, 8º dcha.
02001-Albacete

B) Por correo electrónico hasta el 2 de noviembre de 2007. En tal caso el mensaje se dirigirá a:

serapiogarcia@telefonica.net

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá a la Secretaria o Secretario General de la Federación entre los candidatos presentados, en su reunión de noviembre de 2007.

Josep Sales i Rufí.
Secretario General

SUMA 55
Junio 2007, pp. 41-48

Relojes de agua, una oportunidad para calcular integrales

Este artículo propone una investigación sobre clepsidras (relojes de agua) para alumnos de 2º de Bachillerato. El cálculo integral será la clave para descubrir cómo la geometría de los recipientes condiciona el funcionamiento de estos mecanismos milenarios.

This article proposes an investigation on clepsydrae (water-clocks) for pupils of higher secondary school course. The integral calculus is the magic key to discovering how the containers geometry determines this ancient mechanism's operation.

El tiempo es una magnitud fascinante. Parece que avanza inexorablemente, sin parar, siempre hacia delante. No podemos recorrerla hacia atrás pero nuestra memoria nos dice que hubo un pasado.

Decía Kant[1] que el tiempo se construye por un proceso iterativo de adición de instantes. Este proceso constructivo, por el cual como seres cognoscentes creamos el tiempo, lo equipara al espacio y lo convierte junto a él en objeto de la Matemática.

Esta concepción del tiempo es la que perdura en la ciencia y permite que se pueda trabajar con él como variable independiente de los procesos físicos. Y es también la que permite medir intervalos de tiempo mediante la construcción de relojes.

Un reloj asocia intervalos de tiempo a determinados fenómenos que se producen con regularidad. Así los intervalos de tiempo son asociados en un reloj de sol a intervalos entre sombras. En un reloj mecánico a arcos de circunferencia recorridos por las agujas. En un reloj atómico a vibraciones. En una clepsidra es la salida o entrada de agua en un recipiente la que permite medir el tiempo.

La actividad que se propone como práctica para el cálculo integral en 2º de Bachillerato se basa en el estudio del comportamiento de los relojes de agua o clepsidras cuando presentan diferentes formas.

Metodología y nivel de aplicación

Según Real decreto 117/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato[2], uno de los objetivos concretos del área de Matemáticas es:

> Utilizar las estrategias características de la investigación científica y los métodos propios de las matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y explorar situaciones y fenómenos nuevos.

Por tanto, la actividad se plantea como una investigación guiada, en la que el alumno pueda libremente planificar y desarrollar ciertas partes del trabajo.

El hecho de escoger una investigación en torno a un objeto de uso cotidiano en la antigüedad, permite evitar la separación entre la mera adquisición de destrezas en el cálculo y la resolución de problemas relativos a fenómenos físicos y naturales y también cumplir con otro de los objetivos:

Elena Thibaut Tadeo
IES Comarcal Rocafort-Burjassot-Godella
Burjassot. Valencia

> Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolas en la interpretación de las ciencias y en las actividades cotidianas.

La investigación deberá ser guiada con el fin de que el alumno no se encuentre desorientado. Por tanto para la investigación se le proporcionaran herramientas –también las relacionadas con las nuevas tecnologías– y métodos que le permitan llevarla a cabo. Con ello, los objetivos del área de Matemáticas que se persiguen son los siguientes:

> Desarrollar métodos que contribuyan a adquirir hábitos de trabajo, curiosidad, creatividad, interés y confianza en sí mismos para investigar y resolver situaciones problemáticas nuevas y desconocidas.

El nivel en el que se puede poner en práctica esta actividad es de 2º de Bachillerato, tanto en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología como en la modalidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Los contenidos que se trabajan en dicha actividad se encuentran entre los que especifica el Real decreto 117/2004 para estos niveles:

- Primitiva de una función. Propiedades elementales.
- Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable o por otros métodos sencillos.
- Integrales definidas. Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas.
- Utilización de los distintos recursos tecnológicos (calculadoras científicas y gráficas, programas informáticos, etc.) como apoyo en el análisis gráfico y algebraico de las propiedades, globales y puntuales, de las funciones y en los procedimientos de integración.

Además de estos contenidos concretos, implícitamente también se trabajan las funciones y sus propiedades, utilizando para ello un programa de representación de gráficas sencillo. Se pueden así aplicar los criterios de evaluación:

- Utilizar el concepto y cálculo de límites y derivadas para analizar, cualitativa y cuantitativamente, las propiedades globales y locales (dominio, recorrido, continuidad, simetrías, periodicidad, puntos de corte, asíntotas, intervalos de crecimiento) de una función expresada de forma explícita, representarla gráficamente y extraer la información práctica en una situación de resolución de problemas relacionados con fenómenos naturales.
- Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos, así como la resolución de problemas de optimización y medida de áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables.

Planteamiento

La actividad comienza mediante una breve búsqueda de información en torno al tema de la medida del tiempo.

¿Cuántos tipos de relojes conoces? ¿Cuáles se usaban en la antigüedad? ¿Se puede medir el tiempo absoluto?...

Para contestar estas preguntas y otras que puedan surgirle al alumno se puede recurrir a Internet para extraer información. En la bibliografía se pueden consultar varias referencias de utilidad. La sesión se puede desarrollar, pues, en el aula de informática.

Uno de los tipos de relojes empleados en la antigüedad eran las clepsidras o relojes de agua. Estos relojes, en su versión más sencilla, consistían en recipientes que se llenaban o vaciaban de agua, empleando siempre el mismo tiempo. Se puede encontrar información sobre ellas en la página web *Clepsidres*[3], en la que también hay una propuesta para construir una.

Las cuestiones que dan comienzo a la investigación son las siguientes:

> ¿Determina la geometría del recipiente el tiempo de llenado o de vaciado?
> ¿Se comportará igual si se llena que si se vacía?

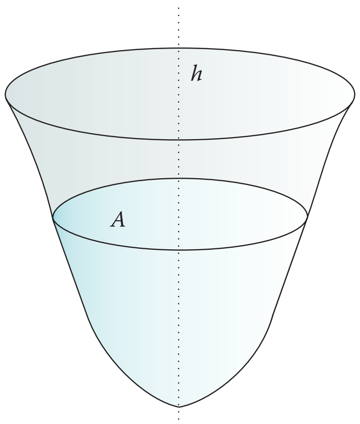
En actividades para el dibujo de gráficas, el uso de recipientes que se llenan a caudal constante es una forma conocida de introducir el análisis de funciones. Un ejemplo reciente se tiene en la página web *Lléname*[4].

Las posibles respuestas a la pregunta anterior requieren delimitar el problema. Lo más inmediato es pensar que un recipiente se llena con un caudal constante (un grifo abierto). Aunque esto no tiene porque ser así, es conveniente orientar la investigación hacia esta posibilidad para no complicar en exceso los cálculos.

Sin embargo, para el vaciado de un recipiente la presión del agua hace que el caudal de salida varíe con el tiempo. El nivel que va alcanzando el agua modifica la velocidad de salida.

Si se define la velocidad de llenado o vaciado como la variación de nivel respecto al tiempo del agua del recipiente, es fácil deducir que en el primer caso será proporcional al caudal vertido e inversamente proporcional al área de la superficie del agua.

De manera sencilla se puede expresar:



$$dh \cdot A = Caudal \cdot dt$$

Pero si no se dispone de una fuente de caudal de agua constante, lo más cómodo es llenar un recipiente y esperar a que se vacíe por un orificio realizado en su base. En este caso se deben tener en cuenta la ecuación de continuidad y la de Bernouilli[5].

La ecuación de Bernouilli expresa la ley de conservación de la energía para un fluido no viscoso.

En nuestro caso, la ecuación de continuidad nos dice que el flujo de agua en cualquier sección del recipiente ha de ser el mismo, es decir, que el caudal que atraviesa cada sección ha de mantenerse constante:

$$A \cdot v = \text{cte}$$

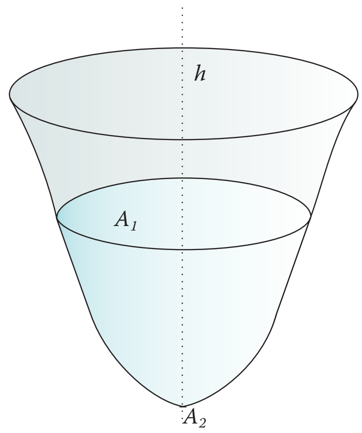
Siendo v la velocidad del agua y A el área de la sección.

La ecuación de Bernouilli expresa la ley de conservación de la energía para un fluido no viscoso. En el caso del agua la ecuación sería:

$$P + gh + \frac{1}{2}v^2 = cte$$

Siendo P la presión que soporta el agua, h el nivel del agua, g la aceleración de la gravedad y v la velocidad del agua.

Aplicando esta ecuación a ambas posiciones de la clepsidra, interior y agujero en la base, se obtiene una ecuación para determinar el nivel de agua en función del tiempo[6]:



$$A_1 >>> A_2$$

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} A_1 = \sqrt{2g}\, A_2 dt$$

Bajo estas condiciones, se puede asegurar que no necesariamente empleará el mismo tiempo un recipiente en llenarse que en vaciarse, y lo que es más importante, que no lo hará de igual manera. Lo que sí está claro es que la forma del recipiente condicionará el valor del área de la superficie del agua en cada momento, por lo que la geometría de la clepsidra sí determina cómo será la variación del nivel del agua respecto del tiempo.

Desarrollo: 1ª etapa

Las ecuaciones anteriores permiten conocer a qué *ritmo* se llenará o vaciará un recipiente de una forma determinada. Con sólo realizar una integral podremos conocer la función que muestre la dependencia del nivel del agua respecto al tiempo.

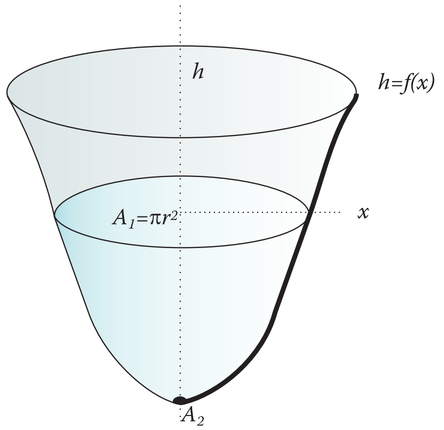
¿Cómo orientar al alumno en la búsqueda de esas funciones? Si una clepsidra ha de ser un objeto cotidiano, fácil y sencillo de utilizar, parece conveniente que se busque aquel recipiente que se llene o vacíe variando su nivel a intervalos constantes con el tiempo. De esta forma se podrá medir el tiempo estableciendo una relación directamente proporcional entre intervalos espaciales y temporales. Bastará con colocar una regla graduada en el centro del recipiente: cada centímetro que varíe su nivel se corresponderá con un mismo intervalo de tiempo.

Si a los recipientes que cumplen estos requisitos se les considera perfectos, la pregunta sería:

¿Qué forma tiene el recipiente perfecto?

Para que los alumnos pongan en práctica los contenidos referentes al cálculo integral correspondiente a su nivel, se deberá tomar como hipótesis que los recipientes son superficies de revolución. Se puede justificar esta particularización haciendo referencia al uso del torno en alfarería, que hace plausible la fabricación de recipientes de estas características.

Con este supuesto, la superficie del agua dentro del recipiente es un círculo, cuya área se puede expresar en función del radio. Y además, el contorno del recipiente se puede expresar mediante una función que relacione el nivel con una coordenada horizontal. Escogiendo los ejes adecuados, el radio de la superficie coincide con el valor de esta coordenada horizontal.



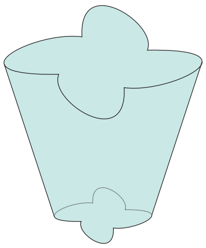
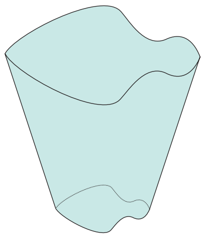
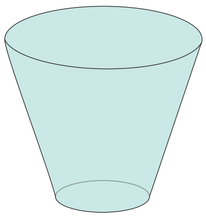
Recipiente que se llena a caudal constante:

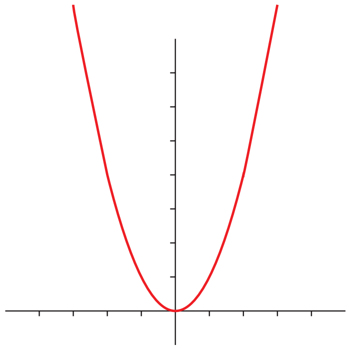
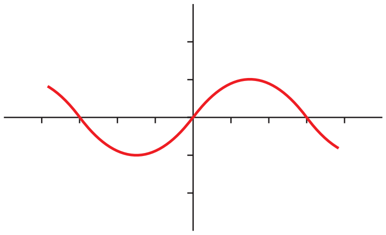
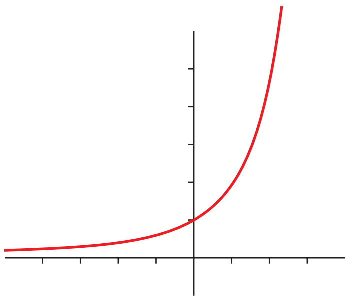
$$dh\cdot\pi\cdot\left[f^{-1}(h)\right]^2 = Caudal\cdot dt$$

Recipiente que se vacía por un orificio pequeño:

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}}\pi\cdot\left[f^{-1}(h)\right]^2=\sqrt{2g}A_2dt$$

Es importante ir delimitando el problema con el alumno para evitar que se disperse y se pierda. La dinámica de grupos con participación activa es una forma de trabajo adecuada en esta primera etapa del desarrollo de la investigación más conceptual. Es conveniente realizar tablas de posibilidades que se irán restringiendo para permitir sacar conclusiones. Estas dos tablas sirven como ejemplo orientativo para ilustrar el proceso, aunque dependerá en última instancia de las propuestas de los alumnos:

Tipos de recipientes	Dibujo	Consideraciones
Sin simetría alguna		No podemos saber la relación entre el nivel y la coordenada horizontal (o resulta muy complicado para este nivel)
Con simetrías respecto a ejes verticales	Dos ejes 	Dificultad para calcular el área de la superficie
	Un eje 	Dificultad para calcular el área de la superficie
	De revolución 	Facilita el cálculo del área de la superficie

Tipos de contornos	Ejemplo	Gráfica	Consideraciones
Funciones potenciales	$y = x^2$		Las integrales son sencillas. Se obtienen recipientes al hacer las funciones.
Funciones trigonométricas	$y = \text{sen } x$		Difícil de integrar. Dificultad para ver la forma del recipiente.
Funciones exponenciales	$y = 2^x$		Difícil de integrar. Dificultad para ver la forma del recipiente.

Desarrollo: 2ª Etapa

En esta etapa se trata de averiguar qué forma tendrá ese recipiente perfecto, con los supuestos anteriores.

Al igual que en la etapa anterior es importante sistematizar el trabajo, no perdiendo de vista los objetivos conceptuales propuestos por el currículum. Por tanto, un método aconsejable es el de prueba y error. El alumno puede elaborar una tabla con las integrales que va a tener que realizar. Comenzando con funciones potenciales aseguramos que el alumno podrá realizar los cálculos sin problemas.

Si se comienza por el recipiente que tiene como contorno una recta vertical, es decir, aquel de forma cilíndrica, se encontrará que para la clepsidra que se llena, este recipiente ya cumple con los requisitos planteados[7]:

$$\int A \cdot dh = \int Caudal \cdot dt$$

$$h = \frac{Caudal}{A} t$$

Pero en el caso de un recipiente que se vacía, no ocurre lo mismo. Para facilitar el cálculo de las integrales se situará el origen de coordenadas en el nivel del recipiente lleno:

$$-\int \frac{A_1}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int \sqrt{2g} \cdot A_2 \cdot dt$$

$$h = -\frac{g \cdot A_2^{\,2}}{2 \cdot A_1^{\,2}} t^2$$

La condición requerida no se cumplirá hasta utilizar el recipiente cuyo contorno sea de la forma $h=x^4$.

$$-\int \frac{\pi \cdot h^{1/2}}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int \sqrt{2g} \cdot A_2 \cdot dt$$

$$h = -\frac{\sqrt{2g} \cdot A_2}{\pi} t$$

Otro método que se utiliza es el de la generalización. Se puede utilizar como función contorno una función que represente a todas las potenciales, $h = x^n$, y calcular la integral. Imponiendo las condiciones requeridas sobre el resultado final, se calcula el valor de n que las satisface. Este método puede resultar complejo para los alumnos y requiere que se especifique el rango de valores de n (n>0), con lo cual no será válido para el caso de un recipiente que se llena. No obstante, es una opción que pueden escoger los alumnos.

$$-\int \frac{\pi \cdot h^{2/n}}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int \sqrt{2g} \cdot A_2 \cdot dt$$

$$h^{\frac{4+n}{2n}} = -\frac{2n}{4+n} \frac{\sqrt{2g} \cdot A_2}{\pi} t$$

$$\frac{4+n}{2n} = 1$$

$$n = 4$$

También se puede deducir la respuesta sin necesidad de realizar integrales, utilizando métodos deductivos. En ese caso, el alumno demostrará tener claro el concepto de derivada. Se trata de considerar la variación del nivel respecto del tiempo y hacerla constante (relación lineal entre nivel y tiempo).

En el caso de un recipiente que se llena:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Caudal}{A_1}$$

A_1 deberá ser constante.

En el caso de un recipiente que se vacía:

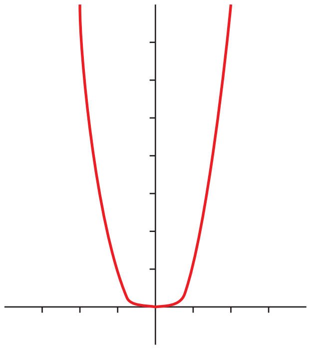
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{h}}{A_1} \cdot \sqrt{2g} A_2$$

$$A_1 < \sqrt{h}$$

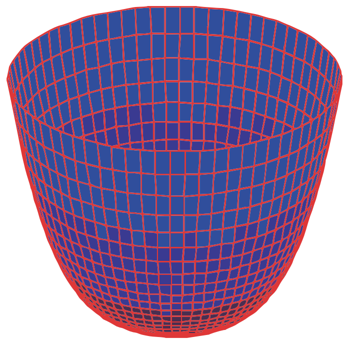
$$x^2 = \sqrt{h}$$

$$h = x^4$$

Para visualizar la forma de los recipientes se puede utilizar un programa de representación de gráficas. El Winplot de Peanut Software es una opción[8]. Se puede descargar gratuitamente a través de Internet, es sencillo de manejar y existe una versión en español.



$h = x^4$



Ampliación

Las clepsidras son cronómetros de épocas antiguas. Como objeto útil hoy en día, puede resultar difícil a nuestros alumnos encontrarles aplicación. Sin embargo, el hecho de utilizar funciones para determinar los fenómenos físicos no ha dejado de estar vigente.

Actualmente la mayoría de los relojes son electrónicos. La cuestión es:

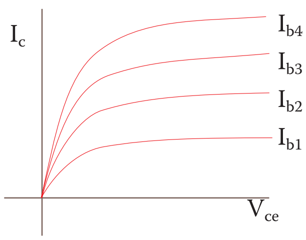
¿Qué componentes electrónicos se asemejan a una clepsidra en su comportamiento?

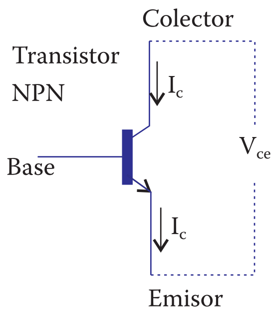
Esta pregunta está especialmente orientada para aquellos alumnos que cursen la modalidad de Tecnología. Si una clepsidra funciona como un cronómetro es lógico pensar en circuitos temporizadores.

El circuito integrado 555 en modo monoestable permite generar un pulso a la salida de duración ajustable mediante una resistencia y un condensador. Esto permite utilizarlo como temporizador.

Un condensador actúa como una pequeña batería recargable que se descarga cuando cesa de llegarle corriente. En este caso el agua sería la corriente eléctrica, analogía utilizada para enseñar las magnitudes eléctricas. Con condensadores se pueden construir temporizadores sencillos pero sobre los cuales se tiene poco control del tiempo.

Continuando con la analogía, si queremos un componente electrónico que varíe el flujo de corriente, es decir, la intensidad, al igual que lo hace la clepsidra que se vacía, se podría pensar en un transistor. Mediante los transistores se puede controlar el paso de corriente mediante una señal de baja intensidad. Siguiendo con la analogía, esta señal representaría el caudal que sale por el agujero de la clepsidra, que está relacionado con su tamaño. Al variar la tensión (el nivel del agua) la corriente que pasa también variará. Y lo hará según las curvas características de cada transistor:





En la zona de conducción del transistor, la intensidad que pasa aumenta linealmente con la intensidad de la base, al igual que en las clepsidras, en las que un orificio mayor supone un caudal también mayor.

En otros ámbitos de la tecnología también se pueden encontrar temporizadores hidráulicos, que por el hecho de trabajar

con agua guardan cierta similitud con una clepsidra. Las válvulas reguladoras de caudal unidas a depósitos de presión permiten retardar una determinada acción.

Conclusiones

Los trabajos de investigación en el aula de Matemáticas fomentan el uso del método científico, permiten la conexión con otros ámbitos del saber y afianzan la autoestima de los alumnos al permitirles aprender por sí mismos.

La propuesta de investigar el funcionamiento de los relojes es una manera de desarrollar diversos contenidos del área de Matemáticas. En concreto, escoger las clepsidras como objeto de estudio en un nivel de 2º de Bachillerato hace posible poner en práctica los conocimientos que tienen los alumnos sobre funciones y cálculo integral, teniendo la posibilidad de interpretar los resultados.

Nuestra necesidad constante de medir el tiempo hace que el tema no carezca de actualidad, pudiendo ser conectado con otras tecnologías como la electrónica y la hidráulica. Así mismo, su punto de partida hace que pueda relacionarse con otras disciplinas, como el arte o la historia, permitiendo una interacción interdisciplinar.

Las opciones que se muestran en este artículo no son las únicas. La investigación es abierta y por tanto el alumno interesado tiene la posibilidad de plantearse otras preguntas y buscar otros caminos. Preguntarse por otro tipo de recipientes, otro tipo de fluidos, realizar hipótesis sobre recipientes en cascada... son algunas de las cuestiones que los alumnos pueden plantearse.

Si bien no es fácil construir una clepsidra cuya forma responda a un contorno $h = x^4$ sí se pueden encontrar recipientes de plástico con los que practicar y tomar medidas para la elaboración de gráficas.

O bien se puede simular mediante un programa de ordenador (Flash por ejemplo) el descenso del líquido según las ecuaciones calculadas.

Por último señalar que, si bien el enfoque hacia niveles superiores era necesario si se quiere incorporar el cálculo integral, existe la posibilidad de practicar con las clepsidras en los primeros cursos de ESO, como introducción a la dependencia funcional[9]. ■

NOTAS

1 DE LORENZO, J. (1992): *Kant y la matemática*, Ed. Tecnos, Madrid, pp. 133-136.

2 http://www.um.es/infosecundaria/titulaciones/legislacion/curriculo.pdf

3 Clepsidres: http://usuarios.lycos.es/thibauttadeo/index.htm

4 Lléname de Rafael Losada Liste:

http://www.iespravia.com/mates/recipientes/

5 Considerando en todo momento flujos de agua no turbulentos en estado estacionario.

6 APÓSTOL, T. M. (1984): *Cálculus*, Editorial Reverté, Barcelona, pp. 432-433.

7 Utilizando el teorema fundamental del cálculo integral en el intervalo $\forall h \in [0, h_0]$ siendo h_0 la altura del recipiente.

8 Peanut Software. http://math.exeter.edu/rparris/

9 La tradición y lo novedoso en la enseñanza de las ciencias: ¿Cómo medimos el tiempo?

http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=9274

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APÓSTOL, T. M. (1984): *Cálculus*, Editorial Reverté, Barcelona.

DE LORENZO, J. (1992): *Kant y la matemática*, Ed. Tecnos, Madrid.

DÍAZ, J. L. (2002): *Tecnología industial II*, Edebé, Barcelona.

REAL DECRETO 117/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato. BOE n.º 42, Miércoles 18 de Febrero 2004, pp. 7575-7662.

ROJAS, R. (2003): Tecnología 4º ESO, Santillana, Madrid.

TIPLER, P. A. (1985): *Física*, Editorial Reverté, Barcelona.

En Internet:

Ancient Clock:

http://library.thinkquest.org/23062/mclock4.html

Building a water clock:

http://www.sciencenetlinks.com/Lessons.cfm?DocID=2

Clepsidras:

http://fluidos.eia.edu.co/hidraulica/articuloses/accesorioshidraulicos/clepsidra/clepsidra.html

http://usuarios.lycos.es/thibauttadeo/

http://www.ubr.com/clocks/pub/clep/clep.html

Clocks:

http://www.darylscience.com/Demos/Clocks.html

El tiempo, una cuestión compleja y apasionante:

http://aula.elmundo.es/aula/noticia.php/2006/01/26/aula1138211263.html

Festival de fluidos (Medellín 2001):

http://fluidos.eia.edu.co/fluidos/clepsidra/clepsidra.html

¿Hay ciencia en el tiempo de María Zambrano?

http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/thibaut45.pdf

Histoire de la mesure du temps:

http://members.aol.com/lagardesse/

La tradición y lo novedoso en la enseñanza de las ciencias: ¿Cómo medimos el tiempo?

http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=9274

Lléname de Rafael Losada Liste:

http://www.iespravia.com/mates/recipientes/

Midiendo el tiempo:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/historia/histdeltiempo/pasado/tiempo/p_midien.htm

Primeros ejemplos históricos de mecanismos de control:

http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/primeros_ejemplos_historicos_de_.htm

Problema de la clepsidra:

http://www.omerique.net/twiki/bin/view/Calcumat/ProblemaClepsidra

Proyecto de Alfabetización Científica–Módulo *¿Cuánto dura un recreo? Intervalos y duraciones:*

http://redteleform.me.gov.ar/pac/file/Recreo.pdf

Time and the History of his measurement:

http://www.zetnet.co.uk/sea.jnp/earth.4/time.htm

SUMA 55
Junio 2007, pp. 49-54

Joyas matemáticas de una caja de música

Las cajas de música esconden en su interior un verdadero tesoro compuesto por joyas matemáticas. Son estudiadas, en concreto, la espiral de Arquímedes, el tornillo como engranaje, la precisión en la medida de sus pequeños componentes, la longitud de las pletinas sonoras, el sistema de codificación de la melodía sobre el tambor y el análisis de Fourier aplicado de manera simplificada al reconocimiento del timbre de las posibles cajas de resonancia. De cada elemento se hace un breve repaso conceptual y se proponen algunas actividades didácticas.

Music boxes hide in themselves a true treasure consisting of mathematical jewels. They are looked into, especially, the Archimedes' spiral, the screw as a gear, the precision in the measure of its small components, the length of the sound platens, the encoding system of the melody on the cylinder and Fourier's analysis applied to the recognition of the timbre of possible resonance boxes in a simplified way. It's carried out a short conceptual review of each element and some didactic activities are suggested.

Decía el filósofo G. Santayana (1863-1952) que

> si todas las artes aspiran a ser como la música, todas las ciencias aspiran a ser como las matemáticas.

Sea como fuere, la aspiración de este artículo es aprovechar el prieto mecanismo de una caja de música para ver, escuchar e

interpretar matemáticas. Como experiencia didáctica, es una actividad que podría llevarse a cabo, al menos en su mayor parte, con alumos del último curso de ESO.

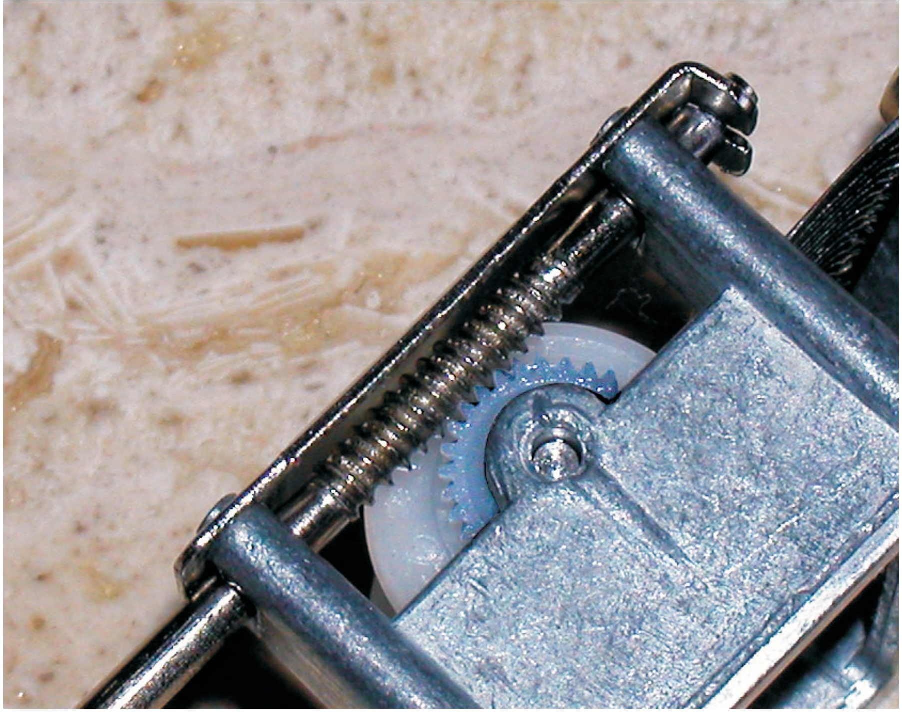
Las cajas de música, esos pequeños receptáculos que agasajan nuestros oídos, tienen algo de entrañable, algo de familiar que puede ser aprovechado para captar la atención de los más jóvenes. Es probable que todos y cada uno de ellos hayan escuchado alguna vez sus evocadoras notas metálicas. Pero serán bastantes menos, minoría mínima, aquellos que hayan desmontado y observado su mecanismo interior.

Es relativamente fácil, en la actualidad, encontrar este mecanismo vendiéndose por separado de su continente y, por lo tanto, con la posibilidad de hacerlo funcionar a la vista, aunque en este caso, en las innegables ganancias visuales –y alguna otra de la que hablaremos al final– habremos perdido por el camino dos elementos interesantes: el artilugio que le da cuerda y, por supuesto, la magia de abrir y cerrar una caja. Empecemos pues por el principio. Abramos la caja y, en el suave vaivén de su melodía, preguntémonos por las joyas matemáticas que custodia.

Josep Lluís Pol i Llompart
IES Josep Sureda i Blanes
Palma de Mallorca

La espiral de Arquímedes

El mecanismo que almacena la energía (potencial elástica) necesaria para producir el movimiento del tambor de la caja de música es un fleje metálico popularmente conocido como cuerda de reloj. Por el hecho de tener sección constante, al dar toda la cuerda de la caja, justo antes de comenzar la música, el fleje describirá aproximadamente la llamada espiral de Arquímedes pues se encontrará totalmente enrollada. Es decir, la distancia entre dos espiras cualesquiera será constante.



Esta espiral, que el mismo Arquímedes atribuye —en su tratado *Sobre las espirales*— a su contemporáneo Conon de Alejandría, puede definirse de manera precisa como

> el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su extremo (Boyer, 1968).

Actividades

Demos a los alumnos un papel pautado en coordenadas polares y preguntémosle cómo se ha distribuido el papel. Hagámosle dibujar en él las dos o tres primeras revoluciones de una espiral arquimediana y que reflexione: ¿Cuántos datos se necesitarían para que las espirales de todos los alumnos fueran superponibles? ¿Qué hay del sentido de giro? ¿Qué pasa con la orientación de la línea espiral respecto del radio vector a medida que nos alejamos del centro? ¿A qué figura se parecerá cada vez más una revolución completa al alejarnos del centro? ¿Donde podemos encontrar este tipo de espirales? ¿Es la concha de un caracol un espiral arquimediana?

El tornillo como engranaje

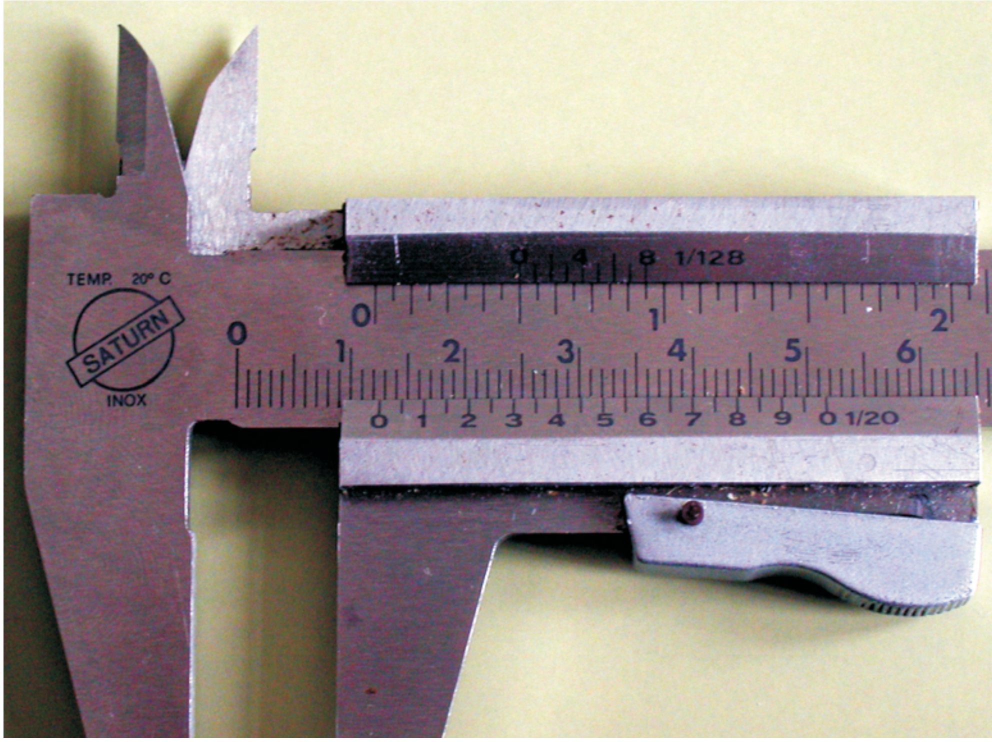
El hecho de que el mecanismo de una caja de música deba ir escondido obliga a éste a presentar un tamaño reducido. Esto implica que en el limitado recorrido de una revolución completa de su pequeño tambor musical, se ha de codificar la totalidad de la melodía. Lo cual, a su vez, precisa de una rotación suficientemente lenta y uniforme de aquél.

El enérgico tirón que generaría la cuerda de reloj es controlado y reducido por un sistema de engranajes que pasa habitualmente por un tornillo. Éste cumple con dos cometidos. Por una parte, es el tipo de engranaje que proporciona la máxima relación de giro, esto es, n a 1. En efecto, una revolución completa del tornillo sólo desplazará una de sus espiras y, por ende, únicamente un diente de la rueda adyacente. Si dicha rueda tiene n dientes, se necesitarán n vueltas del tornillo para generar una sola revolución en la rueda dentada. La otra función interesante es la de producir un cambio perpendicular en la dirección del eje de rotación, efecto que resulta muy útil a la hora de compactar el mecanismo (aunque este efecto pueda lograrse también a partir de engranajes cónicos).

De alguna manera, podríamos decir que un tornillo puede mirarse como la versión en geometría cilíndrica de una espiral arquimediana plana. En efecto, la curva que describe un tornillo podría definirse como el lugar geométrico de un punto del espacio situado en el extremo de un segmento (ρ cte.) que gira uniforme y perpendicularmente alrededor de un eje sobre el cual se encuentra el otro extremo del segmento, mientras que este último extremo se desplaza a su vez uniformemente a lo largo de dicho eje ($d\varphi/dz$ cte.). Es decir, que cada revolución aleja el punto de la posición anterior una distancia constante. Esta característica es conocida como paso de un tornillo. La curva generada, la hélice circular.

Actividades

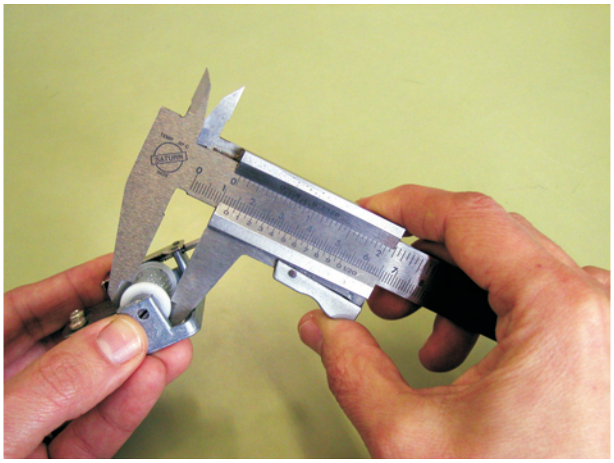
Preguntemos a los alumnos por el tornillo de Arquímedes. ¿Qué es y para qué sirve? Este podría ser el título de un pequeño trabajo de investigación. Trabajemos la mal llamada escalera de caracol. Hagámosles pensar en la relación entre el ángulo ocupado por un peldaño (que es lo mismo que decir el número de peldaños de una vuelta) y la altura de éstos para que la escalera sea transitable. En este punto es muy importante que los alumnos puedan visualizar la estructura ocupando directamente alguna escalera de este tipo que esté a su alcance o, por ejemplo, construyendo un modelo con algún material común como el corcho blanco. Y ¿qué decir del ADN?



La precisión en la medida

La precisión en la medida suele ser una de esas cenicientas del currículum de matemáticas para secundaria: muy pocos la llevan al baile. Pero como de música se trata…

La pequeñez del mecanismo que manejamos hace cobrar sentido al término de precisión ya que nos hallamos en el límite de uso de los instrumentos de medida cotidianos más precisos que manejan los alumnos. A saber: reglas milimetradas. En efecto, el paso de los tornillos examinados o el grueso de las pletinas sonoras se encuentran –en general– próximos al milímetro. ¿Qué pasa, entonces, cuando la longitud del objeto a medir es del orden de la unidad de medida? Se impone la elección de entre –al menos– dos caminos.

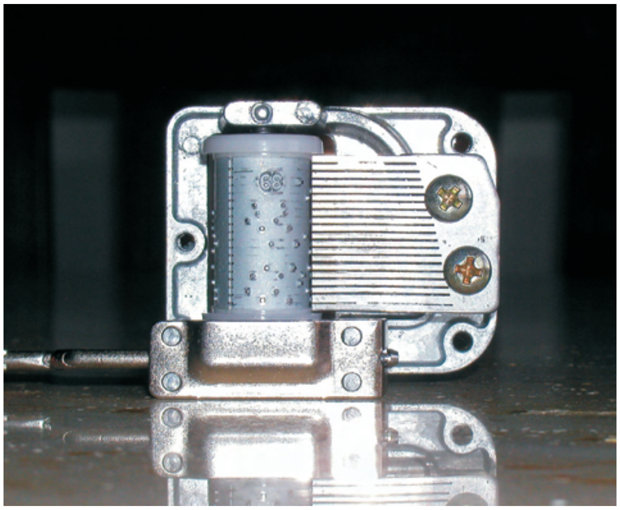


El camino de la mejora instrumental podría emprenderse con el uso de un calibrador Vernier o pie de rey, de presencia habitual en los centros de secundaria. El estudio de las posibilidades de este instrumento vale por sí solo algunos artículos. Basta resaltar aquí la idea del matemático portugués Pedro Nunes (1502-1578) aplicada por el francés Pierre Vernier (1584-1638) de dividir (n - 1) unidades de la escala principal en n partes sobre una segunda regla, llamada propiamente, nonius. Así las cosas, el nonius nos permite alcanzar una precisión de $1/n$ sobre la unidad original. Es bonito observar cómo, para facilitar la lectura, al número de unidades divididas (n - 1) se le puede añadir un número entero de veces n (divisiones del nonius) sin que esto altere el valor de la precisión (suponiendo, claro está, la regularidad en la medida a lo largo de toda la escala principal).

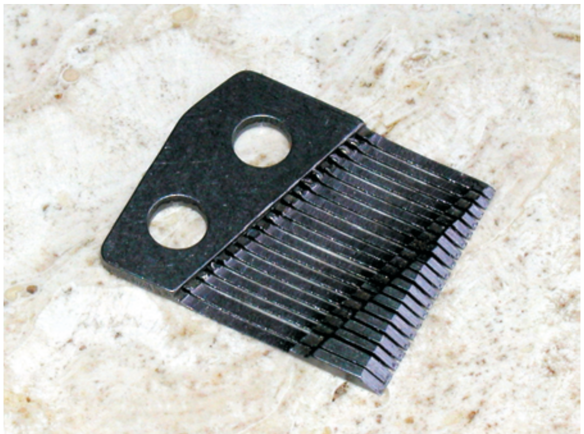
La otra opción de mejora consiste en la búsqueda de una sola medida sobre una determinada repetición de aquello pequeño que se quiere medir. Tenemos aquí, en realidad, una media que, bajo la hipótesis de valor constante para cada elemento, nos ofrece una medida más precisa. En el caso del mecanismo musical, podemos aplicar este método para medir todas las espiras del tornillo de una vez o el conjunto de las pletinas sonoras, aunque en este caso, tendremos el interesante problema del grueso del corte entre pletina y pletina.

La longitud de las pletinas sonoras

Al mirar el peine de pletinas sonoras que el tambor va levantando en una caja de música, uno no puede menos que pensar en la caja de resonancia de un piano de cola o en la silueta de un arpa. Pero se impone inmediatamente una diferencia: aquí las pletinas tienen un corte de crecimiento marcadamente lineal, mientras que en los demás instrumentos aparecen atractivas y sinuosas curvas.



Realmente, este corte lineal de las pletinas está en contradicción con aquello que nos dice la física del sonido: en la afinación actual, la frecuencia de cada nota se puede obtener de la nota inmediatamente anterior mediante el factor 21/12. Y como la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud del elemento sonoro (pletinas, cuerdas, tubos…), hemos de concluir que la longitud de las pletinas debería seguir también una línea de corte exponencial. Otra vez, el factor limitador del espacio en la caja de música obliga a los constructores a *hacer trampa*. Sabiendo que el crecimiento exponencial dispararía la longitud de las pletinas que producen las notas más graves, se compensa este efecto aumentando el grosor de las pletinas de manera conveniente. Basta girar el peine para comprobarlo.

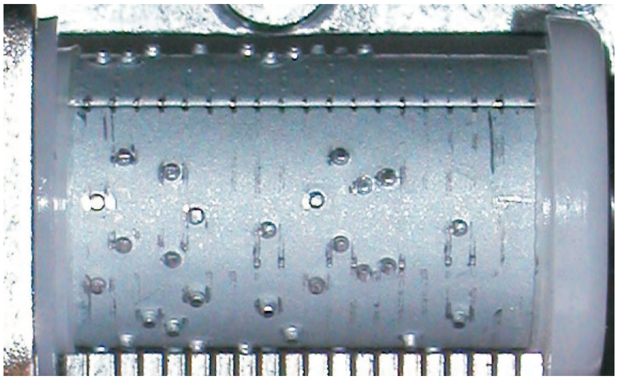


Actividades

Tal vez éste sea el momento de llevar a los alumnos a un aula de música y preguntar por algunos instrumentos (pianos, arpas, xilófonos o metalófonos, guitarra…). ¿Qué estrategias siguen los constructores de pianos, de arpas, de metalófonos, para no tener que alargar el instrumento hasta lo inmanejable?¿Nos hemos fijado en la curva que muestra una flauta de Pan? En el caso de los instrumentos de cuerda, el juego con el grosor y la tensión permite jugar a los *luthiers*. En el caso, por ejemplo, de los xilófonos o metalófonos, el grueso de las piezas hará el mismo efecto. ¿Conocen los alumnos las famosas xilografías de Pitágoras estudiando los sonidos? ¿Qué es eso de la música de las esferas?

La codificación en el tambor

El mecanismo final que produce el sonido en una caja de música es, no por sencillo, menos ingenioso. Se trata de unas pequeñas puntas, convenientemente clavadas en la superficie lateral del cilindro que, al girar, van levantando las pletinas sonoras del peine metálico produciéndose, al liberarse éstas, el sonido deseado. (Es el mismo caso de los mazos que en las fraguas catalanas eran accionados por molinos de agua). ¿Cómo codificar entonces la melodía deseada en ese pequeño tambor?



De entrada, cada nota tendrá asignada su franja del tambor. Nos encontramos ahora ante un sencillo problema de proporcionalidad y de máximo común divisor. En general, la simplicidad de las melodías codificadas reduce el problema a encontrar el intervalo de tiempo más pequeño existente entre dos notas consecutivas y calcular el número de esos intervalos que contiene la cancioncilla completa. Dividamos entonces el recorrido útil de tambor que queramos usar entre ese número y, finalmente, coloquemos las puntas en las bandas correspondientes según sean las notas, y a la distancia de la línea inicial que les toque según el tiempo de aparición.

Actividades

La propuesta didáctica para este apartado no puede ser otra que animar a los alumnos a marcar su propia banda sonora sobre un papel con melodías muy sencillas, cortas y sin acompañamiento. Es muy útil, en este caso, disponer de un metrónomo que facilitará la labor de reconocer los intervalos de tiempo para los legos en música. ¿Cómo escucharla? Algunos alumnos o alumnas capaces pueden interpretar tamaña partitura pertrechados con sus trabajados instrumentos. Tal vez, la afición binaria de alguno puede desembocar también, fácilmente, en una aplicación informática que, después de introducir ceros y unos en una tabla a modo de tambor, haga realidad el sonido codificado.

Dime cómo suenas…

… y te diré de qué estás hecha. Decíamos al principio de este artículo, que disponer del mecanismo sonoro de una caja de música separado de su continente nos privaba de algunas joyas matemáticas. Pero no es menos cierto que, en compensación, nos ofrece otras. Dos de ellas, tal vez las principales, son la resonancia y, en estrecha relación, el timbre.

Sorprende de entrada la intensidad sonora de este pequeño mecanismo aislado: casi inaudible. Pero la sorpresa es mayúscula cuando es accionado, por ejemplo, sobre la superficie de una mesa. Ahora todo el mundo puede escuchar la melodía. Estamos ante una caja de resonancia. El efecto físico de este dispositivo es el de actuar como amplificador natural. Pero además, la caja de resonancia aporta a la música su propia personalidad. En efecto, el resultado sonoro no será el mismo si hacemos sonar el mecanismo sobre una caja de madera que, por ejemplo, sobre un cristal. Al hecho de que seamos capaces de distinguir la misma nota producida por sistemas diferentes lo llamamos timbre.

Para entender qué es el timbre hay que desmenuzar el concepto simplificado de frecuencia de un sonido; porque cuando decimos que el *la* de un diapasón está vibrando con una frecuencia de 440 Hz (oscilaciones por segundo), estamos contando sólo parte de la verdad. En efecto, cabalgando sobre la frecuencia fundamental, vibran otras frecuencias llamadas armónicos. Para que estos armónicos no desbaraten la frecuencia fundamental, han de tener necesariamente una frecuencia múltiple entera de aquella. Y el conjunto de los armónicos y sus intensidades para las diferentes notas es algo así como la huella dactilar de los instrumentos.

Jean B. Joseph Fourier (1768-1830) vino a echarnos una mano en este análisis que, merecidamente y por eso mismo, lleva su nombre. Fourier descubrió que cualquier función periódica puede descomponerse en una suma de funciones seno y coseno, cada una de ellas multiplicada por un coeficiente característico. Esto es

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\omega x)+b_n sen(n\omega x))$$

El primer término de la serie lo tenemos cuando n=1 y recibe el nombre de armónico fundamental (ω es por tanto la pulsación fundamental). Los términos restantes se conocen como armónicos (de orden n).

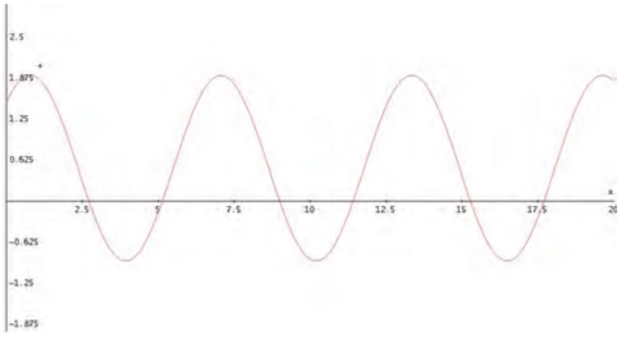
Actividades

Propondremos aquí dos actividades complementarias para realizar en clase. La primera consistirá en abrir una hoja de cálculo para construir el gráfico de una función periódica siguiendo el modelo de Fourier. Supongamos que se nos ocurre hacer:

$$f(x) = ½ + \text{sen}(x) + \cos(x)$$

para x entre 0 y 20.

Entonces obtendremos un gráfico como el siguiente:

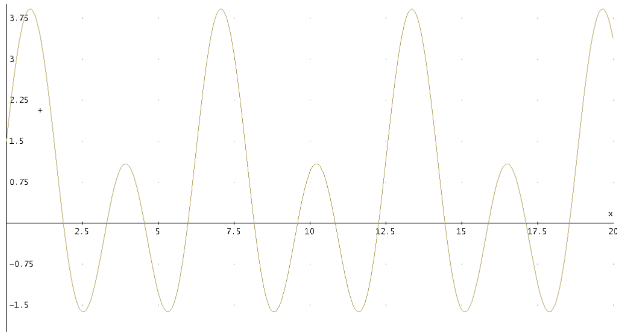


Añadamos ahora el armónico de segundo grado y probemos con:

$$f(x) = ½ + \mathrm{sen}(x) + \cos(x) + \mathrm{sen}(2x) + \cos(2x)$$

también para x entre 0 y 20.

El gráfico que obtenemos ahora tiene el siguiente aspecto:



Es importante destacar que la pulsación o frecuencia (y por ende, la distancia entre dos picos iguales) no ha cambiado y que, por tanto, este sonido daría la misma nota o tono que el anterior aunque sonaría diferente. Es la manera de visualizar cómo, cuando un violín y un clarinete dan la misma nota, la misma frecuencia fundamental, nuestro oído es capaz de distinguir sus sonidos porque reconoce en ellos armónicos diferentes. Los armónicos son entonces la huella digital del instrumento y sus sonidos.

Cuando los alumnos ya han construido sus propias funciones de Fourier, la manera más ágil de variar la contribución de los armónicos en la función se puede obtener desde el portal web Eduteka con la aplicación para Microsoft Excel Fourier 97.

La segunda propuesta, seguramente la más interesante y complementaria de la anterior, consistiría en utilizar algún programa informático que represente la función periódica de la frecuencia de los sonidos que recibe a través de un micrófono. De esta manera, el alumno comprobará cómo manteniendo un mismo tono, el gráfico de la función periódica correspondiente a su propia voz irá cambiando al cambiar, por ejemplo, la vocal empleada. Podrá comprobar, entre otras cosas, cómo el sonido de la vocal *i* es el que más se aproxima a una función periódica sinusoidal simple y que las demás vocales poseen un conjunto de armónicos característicos. (Existen diversos programas en el mercado que ofrecen versiones de prueba gratuitas y que son perfectas para este propósito. En nuestro caso, el programa utilizado ha sido el Waveshow de Paul K. Warme.)

La serie de Fourier es hoy en día una herramienta imprescindible para el análisis de resultados en numerosas aplicaciones, desde la valoración acústica de los instrumentos musicales hasta el análisis químico y médico en aparatos como la resonancia magnética nuclear. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEATO SIRVENT, J. (2003): "Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales", *SUMA* 50, pp. 39-44.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

PARRONDO, J. M. R. (2004): "Cuestión de escala", *Investigación y Ciencia*, abril, 2004, pp. 86-87.

RECUERDO LÓPEZ, M. (1994): *Ingeniería acústica*, Ed. Paraninfo SA, Madrid.

En Internet:

http://www.eduteka.org/descargas/Fourier97.xls
http://www.eduteka.org/ExpresionMusical.php
http://members.aol.com/waveshow/

SUMA 55
Junio 2007, pp. 55-60

Deducción por inducción

El presente trabajo no pretende ser un estudio exhaustivo del método inductivo, sino más bien una exposición divulgativa de dicho método en el que se presentan una serie de ejemplos ilustrativos y curiosidades relacionadas con la inducción. He intentado que los ejemplos tengan una cierta componente lúdica, planteando varios como un reto o desafío al lector, huyendo en todo caso de ejemplos aburridos o en exceso académicos.

This work is not an exhaustive research of the inductive method, but only an informative exposition about this method. Here some illustrative examples and curiosities are shown. Those are related to induction. My intention has been to create entertaining examples, so several examples are suggested as a challenge to the reader, I think there are not too boring or academic examples.

No se puede negar que existe una analogía llamativa (de la inducción matemática) con los procesos habituales de inducción. Pero subsiste una diferencia esencial. La inducción, aplicada a las ciencias físicas, es siempre incierta, porque se basa en la creencia en un orden general del universo, orden que está fuera de nosotros. La inducción matemática, esto es, la demostración por recurrencia, se impone al contrario necesariamente, porque no es más que la afirmación de una propiedad del espíritu mismo.

H. Poincaré, La ciencia y la hipótesis

Henri Poincaré. 1854-1912

El método de inducción matemática es, sin lugar a dudas, una de las herramientas más poderosas de las que disponemos los matemáticos para demostrar resultados y también es, en mi opinión, una de las más bellas construcciones de la mente humana. Además creo que es importante para nuestros alumnos una buena comprensión y una correcta utilización de este método. En la enseñanza secundaria puede introducirse a nivel de Bachillerato, a pesar de que no aparece explícitamente en el temario. Es una herramienta habitual en numerosas carreras de contenido científico y técnico para los alumnos de primer curso universitario.

Natalia Casás Ferreño
IES Ingenio
Ingenio. Las Palmas

El presente trabajo no pretende ser un estudio exhaustivo del método inductivo, sino más bien una exposición divulgativa de dicho método en el que se presentan una serie de ejemplos ilustrativos y curiosidades relacionadas con el mismo. Se pretende que los ejemplos tengan una componente lúdica, planteando varios como un reto o desafío al lector, huyendo en todo caso de ejemplos *aburridos* o excesivamente académicos. A aquellos lectores interesados en conocer más ejemplos y aplicaciones de la inducción matemática se les recomienda el capítulo 7 del magnífico libro (GUZMÁN, 1995).

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.
Bertrand Russell

El principio de inducción matemática

En las ciencias naturales el principio de inducción es utilizado para obtener resultados generales a partir de unos cuantos casos particulares: por ejemplo, un ornitólogo observa que varios cuervos son negros y llega a la conclusión de que todos los cuervos son negros.

Sin embargo desde un punto de vista estrictamente lógico no se puede justificar el enorme salto que supone pasar de una afirmación cierta para algunos casos particulares a una afirmación cierta para todos los casos. Por tanto, como remarcaba Poincaré, el método inductivo de las ciencias naturales no es exacto y está sometido a incertidumbre. Los científicos confían en el método inductivo porque creen en el orden del universo, pero podemos afirmar que esta confianza no está basada en la razón lógica, aunque ha demostrado ser extremadamente útil.

En matemáticas también existe un principio de inducción, pero éste es absolutamente fiable y preciso porque su fundamentación es lógica. Veamos en que consiste:

Principio de inducción matemática: Sea S_n una afirmación relativa al número natural n. Supongamos que:

1. S_1 es cierta;
2. Si S_n es cierta, también lo es S_{n+1}

Entonces la afirmación S_n es cierta para todos los números naturales.

Es fácil convencerse de la veracidad de este principio. En efecto, por *1.* la afirmación S_1 es cierta. Entonces por *2.* la afirmación S_2 también debe ser verdadera, en cuyo caso aplicando de nuevo *2.* se sigue que S_3 también es verdadera, y así sucesivamente… Podemos pensar las afirmaciones S_n como fichas de dominó: la condición *2.* nos dice que si la ficha S_n cae, entonces tira la ficha siguiente S_{n+1} y la condición *1.* nos dice que la primera ficha S_1 ha caído. Luego, el principio de inducción matemática simplemente afirma que todas las fichas acaban cayendo una tras otra. Veamos dos ejemplos de demostración por inducción:

Infinitud de los números primos: Se definen los números de Fermat:

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Probar que para $n \geq 1$ se satisface la siguiente fórmula de recurrencia

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$$

Nota: El lector puede estarse preguntando justificadamente qué tiene que ver el problema anterior con la existencia de infinitos números primos. Pues bien, de la fórmula de recurrencia se sigue inmediatamente que dos números de Fermat cualesquiera son primos. Como cada número de Fermat tiene al menos un factor primo se deduce entonces la existencia de infinitos número primos. Esta prueba se debe a C. Goldbach en una carta a Euler (1730) y aparece recogida en El Libro de las Demostraciones (AIGNER y ZIEGLER, 2005).

Demostración. Comprobamos la fórmula para n=1 (F_0=3, F_1=5).

$$F_0 = F_1 - 2$$

Ahora suponemos que la fórmula es cierta para $n > 1$, es decir, supongamos la fórmula

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$$

y la probamos para $n + 1$

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n = (F_n - 2) F_n = \left(2^{2^n} - 1\right)\cdot\left(2^{2^n} + 1\right) =$$
$$= 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$$

Adivinanza, adivinanza... Para un entero no negativo n se define

$$g(n)=\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx$$

¡Calcular el valor de $g(n)$ para un entero no negativo arbitrario n !

Nota: Como en muchas adivinanzas el valor de $g(n)$ se esconde en el enunciado del problema.

Solución. Empezamos calculando el valor de $g(n)$ para el primer número de la lista $n = 0$,

$$g(0)=\int_0^{\infty} e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{\infty}=1,$$

y continuamos por el segundo número de la lista $n = 1$,

$$g(1)=\int_0^{\infty} xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}dx=1.$$

Si observamos que $g(0) = 1 = 0!$ y $g(1) = 1 = 1!$ parece que hemos encontrado una pauta. ¿Será $g(n) = n!$ para cualquier entero no negativo n?

Vamos a demostrarlo por inducción: suponemos que $g(n) = n!$ y comprobamos que en efecto $g(n+1) = (n+1)!$ realizando una integración por partes

$$g(n+1)=\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}(n+1)x^n e^{-x}dx=$$
$$=(n+1)\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx=(n+1)\,g(n)=(n+1)n!=(n+1)!$$

La inducción y el principio de buena ordenación

Existe una formulación equivalente al principio de inducción matemática que se conoce como principio de la buena ordenación para los números naturales.

Principio de la buena ordenación de los números naturales: Cualquier subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales N tiene mínimo.

Demostración. Supongamos que $X \subset N$ es un subconjunto de números naturales no vacío que no tiene mínimo, y sea S_n la proposición

S_n = ningún número natural $\leq n$ pertenece a X.

Como X no tiene mínimo, S_1 es verdadera (porque si S_1 fuera falsa entonces 1 sería el mínimo de X) y suponiendo que S_n es verdadera también lo es S_{n+1} (porque si S_{n+1} fuera falsa entonces $n + 1$ sería el mínimo de X). Luego por el principio de inducción todas las afirmaciones S_n son verdaderas, lo que implica que no existe ningún número natural en X, en contradicción con el hecho de que X es no vacío.

Como ejercicio para el lector proponemos que pruebe el principio de inducción matemática a partir del principio de buena ordenación, demostrando así que en realidad son equivalentes. De hecho esta equivalencia nos permite generalizar el principio de inducción a cualquier conjunto bien ordenado (i.e. un conjunto parcialmente ordenado en el que cualquier subconjunto no vacío tiene mínimo), obteniéndose el llamado *método de inducción transfinita*.

Principio de inducción transfinita: Sea X un conjunto bien ordenado y sea B un subconjunto de X. Supongamos que B tiene las siguientes propiedades:

i. El mínimo de X pertenece a B.
ii. (Hipótesis de inducción transfinita) Si el segmento que precede a $x \in X$

$$S_{<x}=\left\{y\in X: y<x\right\}$$

está contenido en B, entonces $x \in B$.

Entonces necesariamente $B = X$.

Cuando $X = N$ el principio de inducción transfinita se reduce al familiar principio de inducción. Una discusión más profunda del principio de inducción transfinita y de sus asombrosas consecuencias está por supuesto fuera del alcance de este trabajo. A aquellos lectores que deseen saber más sobre este fascinante tópico se les recomienda la introducción a la teoría de conjuntos (CIESIELSKI, 1997).

> *A pesar de su apariencia inofensiva el principio de la buena ordenación de los números naturales es una poderosa herramienta para probar resultados.*

A pesar de su apariencia inofensiva el principio de la buena ordenación de los números naturales es una poderosa herramienta para probar resultados. Por ejemplo, es el fundamento del llamado *método de descenso infinito* utilizado por el príncipe de los matemáticos aficionados, Pierre de Fermat, para hacer numerosas demostraciones en teoría de números: supongamos que queremos demostrar que ningún número natural n satisface una propiedad $P(n)$. El método del descenso infinito consiste en demostrar que si $P(n_1)$ es cierta entonces también lo será $P(n_2)$ para algún $n_2 < n_1$. Repitiendo el argumento encontraríamos una sucesión infinita estrictamente decreciente de números naturales, lo que contradice el principio de buena ordenación. (En el capítulo 2 de (GUZMÁN, 1995) y en el capítulo 1 de (RÍO MATEOS, 2005) se encuentra una discusión más detallada del método del descenso de Fermat incluyendo varias aplicaciones del mismo).

En el prólogo del libro *Apología de un matemático* (HARDY, 1999), el escritor inglés C.P. Snow narra la siguiente anécdota sucedida entre el propio Hardy y el genio matemático autodidacta Ramanujan, cuando el primero visitaba al segundo gravemente enfermo en el hospital:

> Hardy había ido a Putney en taxi, que era su método de transporte favorito, entró en la habitación en la que estaba Ramanujan, y siempre torpe para comenzar una conversación, dijo, probablemente, sin saludar antes y, ciertamente sin más preámbulos: "creo que el número de mi taxi era el 1729. Me parece un número bastante aburrido". A lo que Ramanujan respondió: "¡No, Hardy!, ¡No, Hardy! Es un número muy interesante, ya que es el más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos formas diferentes." (¿Puede encontrar el lector sin desesperarse cuáles son las dos formas distintas de expresar 1729 como suma de dos cubos?).

Para aquellos que no poseemos el genio de Ramanujan el principio de la buena ordenación nos permite refutar de manera sencilla la afirmación de Hardy acerca de que el número 1729 carece de interés.

Srinivasa Aaiyangar Ramanujan. 1887-1920

Teorema generalizado de Ramanujan: Todos los números naturales son interesantes.

Demostración: Supongamos que existe algún número natural que no es interesante. Entonces existe n_0 el menor de los números no interesantes, propiedad ésta que convierte a n_0 en un número ciertamente muy interesante. De esta forma llegamos a una contradicción.

Paradojas inductivas

El principio de inducción también es la base de numerosas paradojas. El siguiente teorema se debe al eminente matemático G. Polya.

Teorema de Polya: Si en un conjunto de niñas rubias al menos una de ellas tiene los ojos azules entonces todas las niñas del conjunto tienen los ojos azules.

George Pólya. 1887-1985

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre el número de niñas rubias del conjunto. Claramente el resultado es cierto para $n = 1$ (porque solamente hay una niña rubia que necesariamente ha de tener los ojos azules). Ahora supongamos que el resultado es cierto para cualquier conjunto de n niñas. Si tenemos un conjunto de $n + 1$ niñas de tal forma que al menos una tiene los ojos azules basta formar conjuntos de niñas juntando la niña de ojos azules con cualquier otro conjunto formado por $n - 1$ de las niñas restantes. Aplicando ahora la hipótesis de inducción se sigue que todas las niñas de ese conjunto tienen los ojos azules.

Como todos conocemos a alguna niña rubia con los ojos azules la sorprendente afirmación siguiente es consecuencia del Teorema de Polya.

Corolario: Todas las niñas rubias tienen los ojos azules.

Evidentemente la demostración del Teorema de Polya es errónea (¿puede el lector decir por qué?). Otra aplicación interesante de la inducción es la siguiente paradoja, que explica porqué la pobreza es tan difícil de erradicar.

Paradoja de la pobreza: Si una persona pobre recibe n euros seguirá siendo pobre, ¡independientemente de la cantidad recibida *n!* (Aquí el signo *!* es de admiración y no de factorial).

Demostración. Consideremos la afirmación:

> S_n = Una persona pobre sigue siendo pobre después de recibir n euros

Claramente S_1 es verdadera. Ahora si suponemos que S_n es cierta también lo será S_{n+1}, pues si alguien es pobre después de recibir n euros lo seguirá siendo al recibir solo un euro más. Por tanto S_n es verdadera para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ..

Comenzábamos este trabajo afirmando que las demostraciones por inducción matemática eran fiables al cien por cien porque se basaban en la lógica. ¿Cómo podemos entonces solucionar de forma lógica la paradoja anteriormente planteada?

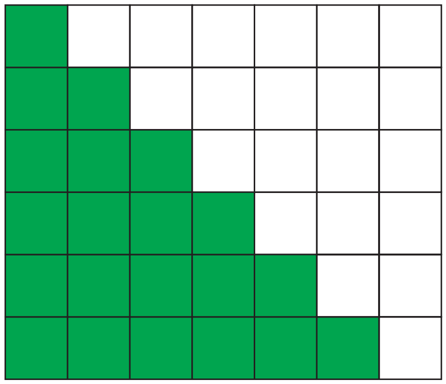
En muchas ocasiones el método inductivo nos proporciona la demostración de un resultado, pero no nos ayuda a entender la razón por la que es cierto.

Inducción versus Visualización

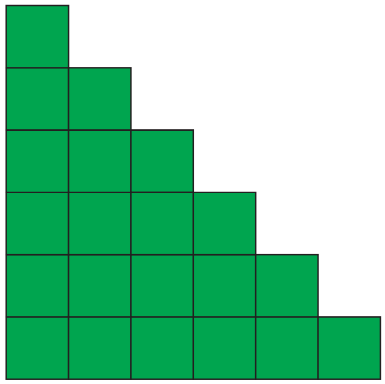
Un hecho importante que seguramente no haya pasado desapercibido al lector es que en muchas ocasiones el método inductivo nos proporciona la demostración de un resultado, pero no nos ayuda a entender la razón por la que es cierto. Por ejemplo, es sencillo demostrar por inducción la conocida fórmula:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Sin embargo, para entenderla, resulta mucho más clarificadora cualquiera de las dos imágenes siguientes:



$$2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$$



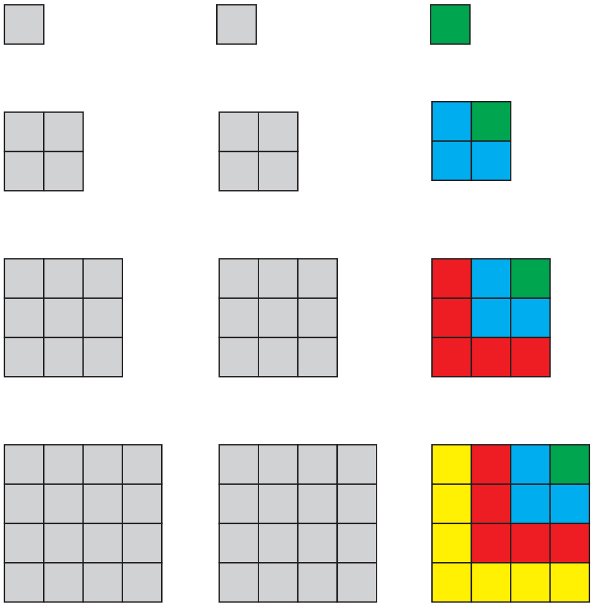
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

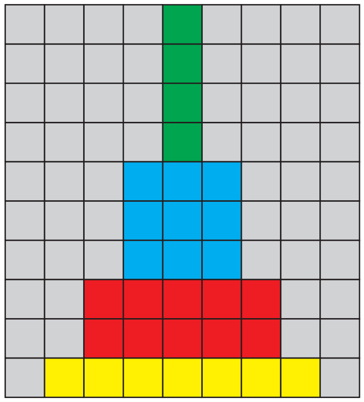
El papel de la visualización en matemáticas ha sido reivindicado y popularizado en los últimos años (véanse los magníficos libros (GUZMÁN,1996) y (ALSINA y NELSEN, 2006). Sin embargo el uso de diagramas, figuras e imágenes para representar, explicar o demostrar resultados matemáticos se remonta a los antiguos matemáticos griegos. De hecho, la palabra teorema significa *lo que se contempla* y no *lo que se demuestra* como solemos interpretarla hoy en día. Además la palabra *ver* tiene también el significado de *entender*. Es por ello importante, sobretodo en los niveles más básicos de la enseñanza, que los alumnos perciban la importancia de un buen dibujo que sugiera o explique un teorema. En esta línea se enmarcan las llamadas demostraciones sin palabras que nos proporcionan de un vistazo una prueba del teorema de Pitágoras o de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Finalizamos nuestra excursión por el mundo inductivo con una demostración visual, debida a Martin Gardner, de la fórmula para la suma de los n primeros cuadrados. Dicha fórmula puede probarse por inducción pero el lector apreciará que resulta más fácil de entender usando un dibujo adecuado (véanse NELSEN, 2001 y ALSINA y NELSEN, 2006).

Teorema: $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{(2n+1)n(n+1)}{6}$

Demostración:





Sumando 3 veces $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ obtenemos un rectángulo de base $2n + 1$ y altura $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Utilizando ahora que

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

deducimos la fórmula deseada. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIGNER, M. y ZIEGLER, G. M. (2005): *El libro de las demostraciones*, Nivola, Madrid.

ALSINA, C. y NELSEN, R. B. (2006): *Math made visual*, MAA, Washington.

CIESIELSKI, K. (1997): *Set theory for the working mathematician*, Cambridge University Press, Londres.

DE GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Pirámide, Madrid.

DE GUZMÁN, M. (1996): *El rincón de la pizarra*, Pirámide, Madrid.

HARDY, G. H. (1999): *Apología de un matemático*, Nivola, Madrid.

NELSEN, R. B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, Granada.

SUMA 55

Junio 2007, pp. 61-66

Las reglas nos guían hacia los conceptos

El problema del cálculo de extremos relativos se ofrece habitualmente como la primera aplicación de la función derivada, pero históricamente existen reglas y métodos que preceden a este concepto. Nos preguntamos si el concepto debe ir forzosamente por delante de estas reglas simples y fácilmente justificables.

Normally it is used to introduce maximum-minimum problems as the first application of the derivative, but historically there are rules and methods preceding this concept. I wonder whether the concept has to go before these simple and easily demonstrable rules.

§1. La solución al bien conocido problema de determinar las dimensiones del rectángulo con perímetro $2p$ y de área máxima, pasa por la consideración de x y p-x como posibles dimensiones de sus lados y la declaración de la función

$$A(x) = x(p - x) = px - x^2$$

como aquella de la que deberíamos obtener el máximo.

El cálculo del valor de x que hace a $A(x)$ máxima se atiene a reglas precisas y suele presentarse, junto a los rudimentos del cálculo infinitesimal, como una de las primeras aplicaciones de la función derivada. A tal efecto recordemos que el primer paso consiste en formar, a partir de $A(x)$, su derivada

$$A'(x) = p - 2x$$

Seguidamente, como segundo paso, se obtiene la raíz de la ecuación $A'(x) = 0$, porque entre esas raíces deben estar los valores que hacen máxima la función. Aquí precisamente la única raíz, $x = p/2$, nos da el resultado para el que $A(x)$ es máximo. En definitiva, el área máxima se obtiene cuando el rectángulo en cuestión es un cuadrado de lado $p/2$, de modo que el área a su vez será $A(p/2) = p^2/4$.

Todo esto nos resulta familiar porque conocemos las reglas de cálculo de la función derivada y las correspondientes a la resolución de las ecuaciones resultantes. En el caso planteado, la solución final ha requerido simplemente la regla de derivación de un polinomio de segundo grado y la de resolución de una ecuación de primer grado. Unas exigencias bien módicas, puesto que la segunda de estas reglas es trivial, y la primera a su vez se reduce, en el caso más general, a que para la función polinómica

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

se obtiene como derivada

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

§2. No es raro que en la historia de las matemáticas el uso de ciertos recursos algorítmicos preceda a la definición del concepto que hoy tomamos como su fundamento. En el caso de los máximos y mínimos, ciertas transformaciones de los poli-

Ángel Marín Martínez
Universidad Pública de Navarra
Pamplona

nomios permitieron ver y emplear lo que hoy conocemos como función derivada mucho antes de que ésta fuera introducida como tal. Hay conceptos, como éste de derivada, cuya aparición llega tras un largo proceso de contrastación de diversos enfoques en torno a problemas comunes. En la fase previa, mientras tanto, es frecuente encontrar algoritmos o reglas que dan salida a los casos más simples o directos. Este podría ser el caso de los polinomios, donde se tiene noticia de reglas asociadas al cálculo de máximos y mínimos, que pese a ser anteriores a la introducción de la función derivada, suponen implícitamente su obtención formal.

Las reglas basadas en la transformación del polinomio, o más bien de la ecuación obtenida al anularlo, son anteriores a la introducción, a finales del siglo XVII, del cálculo infinitesimal.

Originalmente este tipo de reglas basadas en la transformación del polinomio, o más bien de la ecuación obtenida al anularlo, no fueron obra ni de Newton ni de Leibniz. Son anteriores, pues, a la introducción, a finales del siglo XVII, del cálculo infinitesimal. Dichas reglas están más próximas a ciertos métodos de determinación de la tangente a una curva ideados por Descartes y también por Fermat a comienzos de ese mismo siglo. Sin embargo, tampoco son propiamente obra de estos autores. Las formulaciones de las que hablamos tienen un carácter marcadamente analítico y aparecen en torno a 1650 en el círculo de los discípulos de Frans van Schooten, profesor en Leyden, amigo de Descartes y primer editor en latín[1] de su *Géométrie* en 1649.

A ese restringido círculo holandés pertenecen desde autores hoy consagrados, como el entonces joven Christiaan Huygens, hasta otros menos renombrados como Johann Hudde, que es quien ahora nos ocupa. Hablamos en su caso de un autor con una obra matemática sumamente breve, al que se le conoce mejor por su dilatada carrera política al servicio de la nueva república como burgomaestre de Amsterdam. En cualquier caso, debemos a Hudde, y esto es lo que importa, la formulación en 1658 de unas reglas en las que las ecuaciones polinómicas ordinarias son transformadas hasta obtener resultados similares a los que se obtendrían con el actual cálculo de derivadas. Es también importante subrayar que la intención que guía el proceso es, en palabras del autor, la determinación de cantidades máximas y mínimas. No olvidemos que en esa época no se habla de funciones, ni de dominios, ni consecuentemente de máximos o mínimos relativos.

§3. Antes de mostrar las reglas propuestas por Hudde, quizá convenga señalar que en lo sucesivo apenas iremos más allá de las funciones polinómicas. Debemos también añadir que en la época citada la determinación de sus raíces era un asunto decisivo de cara a la formulación algebraica de las propiedades de las curvas. Precisamente las llamadas curvas geométricas, las que admitían una expresión en forma de ecuación, fueron para Descartes las únicas merecedoras de consideración. Su tratamiento algebraico constituye de hecho el núcleo de su única obra matemática, la *Géométrie*, que aparece como uno de los anexos destinados a ilustrar los beneficios de lo expuesto en su *Discours de la méthode*.

René Descartes. 31 de marzo de 1596 -11 de febrero de 1650

A Hudde hay que situarlo en la estela de esta obra, como estudiante y conocedor, a través de van Schooten, de los planteamientos geométricos cartesianos. Pero también, a la vista de sus escritos, como un matemático familiarizado con los métodos más abiertamente analíticos de Fermat[2]. Entre esos escritos se encuentra la carta enviada a su maestro en febrero de 1658, que hoy conocemos por haber sido incluida por éste para enriquecer, junto con otros trabajos de distintos autores, la segunda edición latina de la *Geometría* de Descartes en 1659. En dicha carta Hudde propone un nuevo método para obtener máximos y mínimos[3] del que derivan las reglas antes señaladas.

Para entonces Fermat había hecho ver que los máximos y mínimos de una curva $y = f(x)$ estaban asociados a las raíces dobles de la ecuación $f(x) = M$, donde M sería el máximo o mínimo alcanzado. Por eso Hudde pudo tomar como punto de partida de su investigación la determinación de las raíces dobles de la ecuación:

507

JOHANNIS HUDDENII
EPISTOLA SECUNDA,
DE
MAXIMIS ET MINIMIS.

Clarissime Vir,

Quod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua x designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r \infty 0$$

ipsaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy \infty 0$, id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0.$$

Sss 2 In

Johann van Waveren Hudde. 1628-1704

RENATI DES CARTES
GEOMETRIA,
Unà cum NOTIS
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris.
AB EODEM DUM VIVERET DILIGENTER RECOGNITA.
locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus exornata.
Nunc verò à Viro Clariss. denuo revisa, & ab innumeris mendis, quibus priores Editiones scatebant, repurgata, unà cum notis quibusdam & animadversionibus tumultuariis in universum Opus, huic quartæ editioni recens adjectis.
Accedit insuper
COMPENDIUM MUSICÆ.
Cum Gratia & Privilegio Sacræ Cæs. Majest.

SPES SOLA DEUS

FRANCOFURTI AD MOENUM,
Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.
Anno M DC XCV.

Franciscus Schooten. 1615 - 1660

$$F(x) = f(x) - M = 0$$

o más directamente plantearse la cuestión de cuál podría ser el valor de M para que resulte en la ecuación alguna raíz doble.

§4. Partiendo de ahí, la propuesta de Hudde debe inscribirse en una tradición más propiamente algebraica que geométrica. Dicha tradición tendría sus antecedentes en los mecanismos de reducción de grado, tan característicos en la resolución de ecuaciones[4], y en reglas como las de Cardano, en las que se ligan las raíces o soluciones de las ecuaciones a las relaciones entre sus coeficientes[5]. Siguiendo esta línea, se inicia la carta citada con un teorema destinado a preparar el posterior análisis de los máximos y mínimos en las curvas, en el que se propone una regla de naturaleza estrictamente algebraica. Hudde lo enuncia así:

> «Si en una ecuación dos raíces son iguales y, si se multiplica por una progresión aritmética cualquiera, a saber el primer término por el primer término de la progresión, el segundo por el segundo término de la progresión, y así sucesivamente: Yo digo que la ecuación que se obtiene mediante la suma de estos productos tendrá una raíz en común con la ecuación inicial».[6]

Este resultado no es difícil de comprobar. Supongamos dado, al igual que Hudde hace en su demostración, el polinomio

$$F(x) = (x-\alpha)^2(x^3 + px^2 + qx + r)$$

con α como raíz doble. Al realizar el producto de ambos factores se tiene

$$\begin{array}{lllllll} F(x) = & x^5 & -2\alpha x^4 & +\alpha^2 x^3 & & & \\ & & px^4 & -2\alpha px^3 & +\alpha^2 px^2 & & \\ & & & qx^3 & -2\alpha qx^2 & +q\alpha^2 x & \\ & & & & rx^2 & -2\alpha rx & +\alpha^2 r \end{array}$$

Para la transformación, esto es para el *producto* sugerido en el enunciado, consideremos la progresión aritmética

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots$$

En el emparejamiento multiplicaremos por $a + 5b$ el coeficiente del término de quinto grado, por $a + 4b$ el de cuarto y así hasta el término independiente que multiplicaremos por a. Finalmente denominaremos $F^*(x)$ al polinomio resultante.

Si procedemos línea por línea a esa transformación en $F^*(x)$ podemos empezar por la última

$$rx^2 - 2\alpha rx + \alpha^2 r$$

que multiplicamos por

$$a + 2b,\ a + b,\ a$$

El resultado en este caso será

$$\begin{aligned} & r(a+2b)x^2 - (a+b)2\alpha rx + a\alpha^2 r = \\ & = r\left[\left(ax^2 - a2\alpha x + a\alpha^2\right) + \left(2bx^2 - 2\alpha bx\right)\right] = \\ & = r\left[a(x-\alpha)^2 + 2bx(x-\alpha)\right] \end{aligned}$$

o sea, un sumando de $F^*(x)$ que tiene como factor $x - \alpha$. Al operar con las restantes líneas se obtiene para los correspondientes sumandos la misma conclusión: sus transformadas tienen $x - \alpha$ por factor. De ahí se deduce que $F^*(x)$ tiene $x - \alpha$ como factor común y, por tanto, α como raíz.

§5. Tras comprobar, con métodos similares a los de Hudde, que el teorema es válido, convendría saber cómo es el polinomio resultante $F^*(x)$, y sobre todo qué relación guarda con el inicial $F(x)$. Podemos para ello generalizar un poco más y partir de

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Para la transformación usaremos la progresión

$$a,\ a+b,\ \ldots,\ a+(n-1)b,\ a+nb$$

De donde resulta que

$$\begin{aligned} & F^*(x) = aa_0 + (a+b)a_1 x + \ldots + (a+(n-1)b)a_{n-1}x^{n-1} + \\ & + (a+nb)a_n x^n = a\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n\right) + \\ & + bx\left(a_1 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1}\right) = aF(x) + bxF'(x) \end{aligned}$$

Destaca en esta última igualdad la aparición de un segundo polinomio $F'(x)$ en el que nuestros ojos actuales reconocen precisamente la derivada del primero $F(x)$. Por eso, aunque la transformación operada en el polinomio no nos da exacta-

> *Los criterios didácticos no siempre coinciden con los principios epistemológicos.*

mente su derivada, podemos estimar que lo obtenido no se aleja en exceso de ella. De hecho, basta con que la transformación se realice tomando como base la progresión aritmética natural

$$0, 1, 2, 3, ..., n-1, n$$

es decir con $a = 0$ y $b = 1$, para que la igualdad se convierta en

$$F^*(x) = xF'(x)$$

Esto permite una reconstrucción de la regla contenida en el teorema en un estilo más actual, o sea con derivadas

Si α es raíz doble de $F(x) = 0$, entonces
también será raíz de $F'(x) = 0$.

Además, partiendo de la igualdad inicial

$$F^*(x) = aF(x) + bxF'(x)$$

podemos confirmar con mayor rigor el teorema anterior. Pero esta vez no por los métodos de Hudde, sino haciendo valer el cálculo habitual de derivadas y teniendo presente en todo caso que ese rigor suplementario se logra con las reglas de un cálculo, como el de derivadas, posterior a la regla de Hudde que aquí estamos comentando.

Obsérvese para la demostración del teorema que, si consideramos

$$F(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)$$

por ser α raíz doble, y formamos $F'(x)$ como su derivada, para la transformada tendremos

$$F^*(x) = a(x-\alpha)^2 Q(x) + bx\left[2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x)\right]$$

por lo que es evidente que α es raíz de $F^*(x) = 0$.

§6. Es momento de aplicar el teorema a la obtención de máximos y mínimos. Recordemos que, según Fermat, estas cantidades aparecerían en todo caso como raíces dobles de la ecuación $F(x) = f(x) - M = 0$. Pero, por lo que hemos visto, es más fácil localizarlas como raíces simples de un polinomio más sencillo, a saber $F^*(x)$, aunque esta condición sólo sea necesaria y no suficiente para que las raíces ahí obtenidas sean dobles en $F(x)$. Esta traslación del teorema al asunto geométrico la refleja Hudde como método o regla de cálculo en los siguientes términos:

> Cualquier cantidad algebraica, considerada máximo o mínimo, se hace igual a z; ordenada la ecuación se multiplica por una progresión aritmética del modo en que se ha dicho: y el producto será una ecuación que tiene una raíz común con la precedente.[7]

La cantidad algebraica, que hoy llamaríamos función, $f(x)$ la igualamos a z (de manera similar a nuestra anterior igualdad $f(x) = M$). A partir de ahí Hudde aplica a $f(x) - z = 0$ la regla algebraica anterior. En este caso toma directamente la progresión aritmética natural y obtiene la transformada. En la ecuación resultante $xf'(x) = 0$ prescinde sin mayor comentario de la raíz nula y se aplica al cálculo de las restantes, en una traslación que bien podría concretarse en la siguiente regla:

Si a es un máximo o un mínimo de $f(x)$,
entonces será raíz de $f'(x) = 0$.

Finalmente Hudde se extiende en una serie de ejemplos destinados a incorporar a su método, en un primer paso, a las funciones racionales y, en un segundo, a las funciones racionales con varias indeterminadas. Este último caso es novedoso ya que prefigura el uso de derivadas parciales en condiciones similares al que de las derivadas se podría hacer en el método inicial.

En este extremo, no obstante, quizá resulte más certero otro algoritmo de parecidas características introducido por su coetáneo René François de Sluse. Aunque ideada en 1655, su regla no llega a publicarse hasta 1673. La intención ahí es más analítica en el sentido de que se orienta a la determinación de la subtangente[8] y la pendiente de la tangente a una curva. Su justificación resulta también próxima a lo que poco después se verá en el cálculo de fluxiones de Newton[9].

§7. Creo, por último, que convendría mostrar cómo hemos sabido de estas reglas en nuestro aprendizaje matemático. Siguiendo el modelo publicado en 1934 por Edmund Landau[10], se fue fijando, en sucesivas tentativas por otros matemáticos, una presentación canónica del cálculo infinitesimal. Karl Menger, por ejemplo, en su *Calculus. A modern Approach* de 1955 propone como teorema una versión de la nueva regla en un lenguaje que nos resulta manifiestamente más próximo.

> Si c es interior en dom(f'), y si f posee un extremo relativo (esto es, un mínimo o un máximo relativo) en c, entonces $f'(c) = 0$.[11]

A la vista está que el teorema en cuestión recoge puntualmente la segunda de las reglas comentadas. Pero los antecedentes expuestos en nuestras aulas para llegar a este punto suelen ser muy diferentes de los aquí mostrados. Hudde ni siquiera es citado.

§8. Existe una explicación para todo ello: los criterios didácticos no siempre coinciden con los principios epistemológicos. De ahí la sorpresa con la que recibimos ese uso de la derivada tan ajeno al que hoy nos parece convencional. Las razones por las que ese uso se ha visto primado, hasta convertirse en el uso convencional, tienen que ver, por un lado, con la subordinación de los algoritmos a los conceptos y, por otro, con la necesidad de dar un sentido geométrico a estas cuestiones. Esta segunda razón, que suele ser apremiante, nos lleva a intentar concretar el problema de la tangente en el marco de la representación gráfica, desplazando a segundo término el problema del cálculo efectivo con las ecuaciones.

Esta tendencia analítica de ir asociando los logros algebraicos a las interpretaciones geométricas es quizá más manifiesta en Fermat que en Descartes. En la práctica esto invita a crear conceptos que sirvan de puente entre lo algebraico y lo geométrico. De hecho, es Fermat el primero en dar paso a un análisis localmente variacional para el estudio de las cantidades variables (hoy funciones). La siguiente generación convertirá sus métodos en un enfoque infinitesimal, aunque esta idea requerirá una concepción del límite que tardará más de un siglo en cuajar. A pesar de ello, en esa corriente de investigación se asume de un modo más o menos intuitivo que el cociente:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

es una explicación sintética y significativa de lo que se refleja en la pendiente de la tangente[12]. Lo que no parece es que, desde un punto de vista operativo, el cálculo asociado a la definición resulte sencillo.

Pensemos simplemente en las ecuaciones polinómicas. Para aplicar a las funciones correspondientes la definición anterior se requiere el teorema binomial, que no llegaría en toda su generalidad hasta Newton, y también explicitar en qué forma la derivada afecta a las operaciones algebraicas elementales. Así que el valor de esta definición no reside ciertamente en sus virtudes operativas. Quizá por eso reglas como la de Hudde gozaron por un tiempo de amplio reconocimiento y difusión. El recorrido habitual que va del concepto a los algoritmos realza indudablemente la importancia del concepto, pero añade pocas ventajas cuando uno trata de justificar el cálculo partiendo de funciones elementales. Seguramente está más indicado al intentar mejorar las posibilidades de ese primer cálculo. ■

NOTAS

1 Recordemos que la edición original en francés de la *Géométrie* es de 1637.

2 Sobre el sentido e implicaciones matemáticas de lo analítico, véase de A. Marín (2006), *Incógnitas, variables y otros fantasmas matemáticos*, Pamplona (particularmente su primera parte).

3 *Johannes Hudennii epistola secunda, de maximis et minimis, en Geometria à Renato DesCartes*, Amsterdam, 1659, pp. 507-516.

4 Es bien sabido que la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado pasa por una reducción a ecuaciones de grado inferior.

5 Según las reglas de Cardano si tenemos la ecuación $x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$, entonces la suma de las raíces es $-p_1$, la suma de sus productos dobles será p_2, la de los triples $-p_3$, y así sucesivamente.

6 "Si in aequatione duae radices sint aequales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus aequationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus aequationis per secundum terminum Progressionis, et sic deinceps: dico Productum fore aequationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.", Op. cit. p. 507.

7 "Positis quotcunque quantitatibus Algebraicis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsae=z; et ordinata aequatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est: et Productum erit aequatio, quae communem cum praecedenti radicem habebit.", Op. cit. p. 509-10.

8 Si se considera a la tangente como el segmento de la recta tangente que va desde el punto de tangencia hasta la intersección (cuando ésta exista) con el eje de abscisas, la subtangente sería la proyección de ese segmento en el eje.

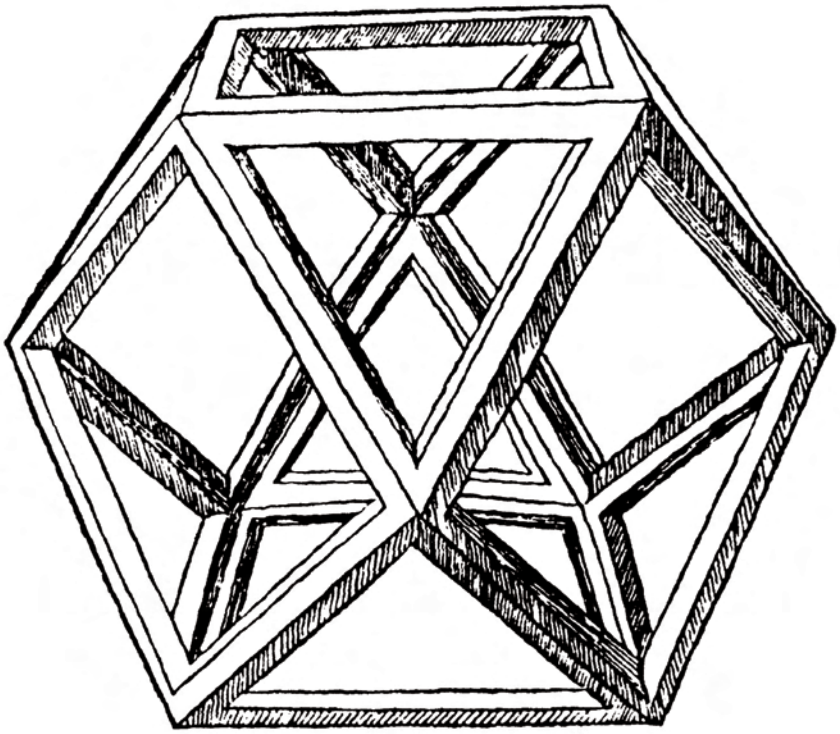
9 Para un estudio más completo de todo este período previo al Cálculo infinitesimal pueden consultarse las obras siguientes: Margaret E. Baron (1969), *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Toronto; C. H. Edwards (1979), *The Historical Development of the Calculus*, New York; Carl B. Boyer (1968), *A History of Mathematics*, New York; así como la anteriormente citada *Incógnitas, variables y otros fantasmas matemáticos*.

10 Cf. Landau, E.(1934), *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Groningen*.

11 "If c is interior to dom(f'), and if f possesses a relative extremum (that is, either a relative minimum or a relative maximum) at c, then $f'(c) = 0$.", Menger, K. (1955), *Calculus. A Modern Approach*, Boston, pg. 164.

12 Formalmente la primera definición de derivada como cociente de incrementos no llega hasta 1754, en la entrada *Différentiel* de la *Encyclopédie* redactada por d'Alembert.

SUMA



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

SUMA 55
Junio 2007, pp. 69-74

En un alua cualquiera de de un IES caulaquiera: el día a día

Era el primer problema de geometría analítica, con cierta complicación, que proponía al grupo de 1º de bachillerato tecnológico. Previamente, desconfiado por experiencia sobre los resultados que produce lo que él llama *didáctica de la revelación* –el sacerdote o sacerdotisa impartiendo palabra divina desde el púlpito– había dedicado Mateo1 un tiempo a recuperar el sentido material que encierra la ecuación de la recta. Para ello, como tantas otras veces, recurrió a un proceso inductivo desarrollado mediante un diálogo apoyado en dibujos sobre una transparencia.

—¿Cómo se llama esta recta? [*Dibuja en la cuadrícula un sistema de coordenadas y la bisectriz del primer cuadrante*]

—¿...?
—Quiero decir: ¿Qué puntos diríais que contiene?
—(1, 1), (2, 2), etc.
—Y (0, 0), (−2,5; −2,5)... ¿No es eso?
—Sí.
—Entonces, ¿qué puntos diríais que contiene?
—Los que tienen las dos coordenadas iguales.
—Y eso, ¿cómo se escribe en matemáticas?

Puede que lo digan en castellano o que directamente alguien proponga $y=x$. Siguen; se reproduce el mismo diálogo, cada vez más rápido, para la bisectriz del segundo cuadrante, el eje vertical, el horizontal, la recta que une el origen con el vértice del primer rectángulo de base 1 y altura 2 y que, por lo tanto, va atravesando rectángulos como él en escalera (fig. 1); para la que pasa por el origen y el vértice opuesto (1, 3), etc. Las dificultades varían según la recta: aparecen, por ejemplo, para decidir entre $y=2x$ o $x=2y$; $2x=3y$ o $y=1,5x$...

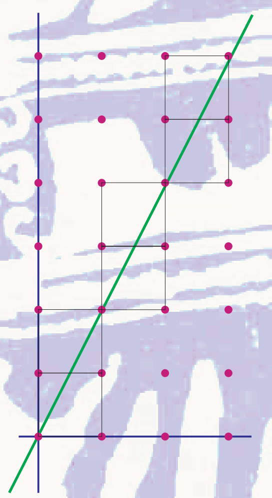


Figura 1

x	y
2	3
4	6
6	9
x	$1,5x$

Figura 2

Pitágoras. Catedrla de Chartres

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

Hay quienes tienen necesidad de una tabla para buscar el término general de la sucesión cuando las cosas se complican (fig. 2) y quienes lo tienen mucho más claro. Así hasta construir la expresión $y=mx+n$. ¿Nivel muy bajo para 1º de bachillerato? Depende de muchas cosas que tienen que ver con la relación anterior de los alumnos y alumnas del grupo con las matemáticas. En 4º ESO no es un nivel bajo; en el bachillerato llamado de ciencias sociales puede ser altísimo… Si les han acostumbrado a alguno de los penosos automatismos con los que muchas veces se introduce la ecuación de la recta, la discusión puede ser incluso eso: ¡una discusión! En el 1º del bachillerato tecnológico no suele crear problemas, pero es un repaso que a Mateo le gusta, aunque sólo sea como diagnóstico de por dónde circula el grupo.

I

Pero estábamos con el primer problema *serio*:

> Encontrar el punto D simétrico del punto $A(-5, 13)$ respecto de la recta r: $2x-3y-3=0$.

Aparentemente es fácil, pero la vida es como es y no tiene sentido empeñarse en negarla arrasando su ideas con métodos estandarizados. Mateo les deja trabajar… y pasan muchas cosas.

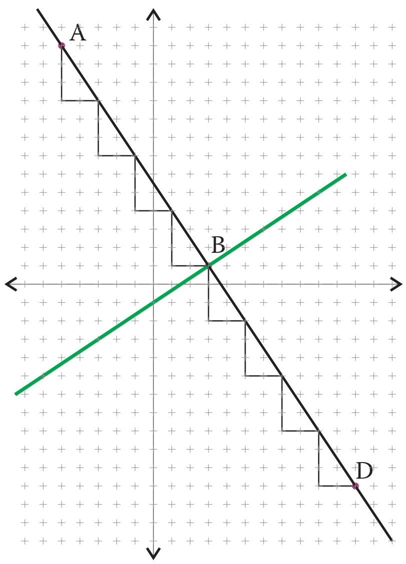


Figura 3

- Acostumbrados al empirismo de la trama, algunos alumnos localizan el punto D (fig. 3) descendiendo en escalones de igual pendiente. Saben –también lo aprendieron experimentalmente en la retícula– que tienen que bajar con pendiente –3/2. Queremos decir que Mateo no había oficializado aquello de $mm'=-1$. El hecho de que el punto B tenga coordenadas enteras les ha simplificado la tarea.

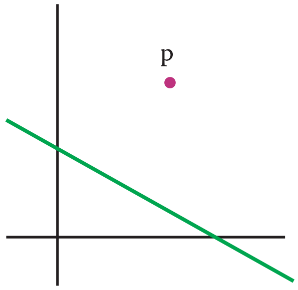


Figura 4

- Otros tienen las ideas confusas y hacen lo mismo ¡¡empleando una recta que no es perpendicular a *r*!! Pasa entonces Emilio al retroproyector a explicar sus escalones (correctos) y después, Mateo, que quiere que practiquen otros métodos, dibuja en la pizarra una situación parecida a la de la figura 4, trazada sin pensar, pide que pongan ecuación a la recta [después de discutirlo, acuerdan *s:* $y=-0,5x+2$ y $P(3,25; 3,7)$] y les propone que resuelvan de nuevo el problema.
- Jorge, mientras tanto, ya ha introducido técnicas *analíticas*, imponiendo la condición $d(M, P)=d(M, P')$, después de haber buscado M en la trama. Seguramente, al hacerlo, piensa sólo en una ecuación y no en una circunferencia.

Los timbres tocan siempre en el peor momento y el tema queda abierto para el día siguiente. Retoman el análisis del problema (fig. 1).

- La propuesta de la figura 4 ha sugerido a varios cortar la recta con la perpendicular desde P. Utilizan la idea para la fig. 3. Alguno, además, ha sido capaz de recurrir a la idea del punto medio para rematar el problema ($\frac{-5+x}{2}=3$, etc.).

Pero siguen discutiendo a partir de una pregunta de Mateo: *¿Cómo lo haríais con regla y compás?*

- Es así que aparece la circunferencia de la figura 5. Mateo la dibuja en la transparencia. De nuevo una trivialidad necesaria: por extraño que parezca, la mención de la circunferencia no es suficiente por sí sola para todos, y es obligado respetar el derecho a la sorpresa y la clarividencia y el impacto de la comprobación experimental.

- Habían leído el libro Radice2 en las vacaciones de Navidad, de manera que conocían la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio 1. En un grupo que convive durante nueve meses para desarrollar una asignatura, siempre hay personas que hacen de avanzadilla. Mateo hecha el cebo y hay quienes son capaces de construir la ecuación $(x-3)2+(y-1)2=208$. Queda ahora resolver el sistema.

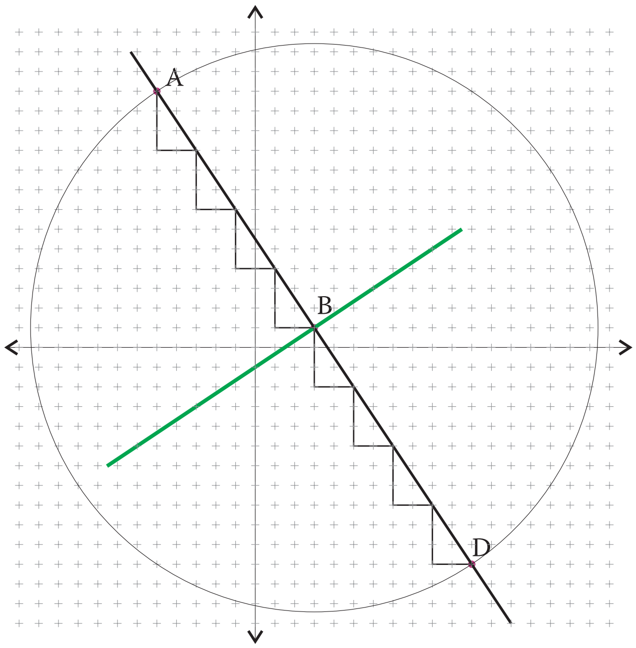


Figura 5

El libro de Radice es excelente para principiantes pero pueden quedarse con interpretaciones excesivamente simplificadas, no necesariamente atribuibles al autor.

¿Fin? Todavía no. Mateo sabe ya quiénes sentirán cierto pánico ante un sistema de segundo grado, así que propone que practiquen en casa, con la ventaja de que ya saben qué resultado tienen que obtener. Después, aprovechando de nuevo que han leído a Radice, repasa los métodos de resolución del problema que han aparecido en clase, recurriendo, claro, a una terminología razonable.

- Califica de experimental al de los escalones. Comenta lo que supone una concepción empirista o racionalista del conocimiento, y se atreve a calificarlo también de empirista. Alejandro Juez, desde la primera fila, recuerda a Hume: parece que la cosa va por buen camino.
- Antigua, o griega, la resolución con regla y compás.
- Analítico o cartesiano el último, manejando los objetos geométricos mediante ecuaciones. Recuerda a Radice y compara la producción artesanal con el trabajo algebraico en serie.

II

Su generosidad en el esfuerzo a la hora de redactar el comentario fue muy variada, como ocurre con cualquier trabajo que se les propone. Hubo quienes se limitaron a cumplir y quienes se aplicaron con entusiasmo –algunos, incluso, advirtieron de un error en la página 86– a una tarea tan “sorprendente” como leer un libro sobre historia de las matemáticas. Pero había quedado claro que, con mayor o menor intensidad, todos y todas lo habían leído y, precisamente por ello, Mateo se ve obligado a dedicar algo más de media hora a comentar sus textos. El libro de Radice es excelente para principiantes pero pueden quedarse con interpretaciones excesivamente simplificadas, no necesariamente atribuibles al autor. Mateo les advierte, entre otras cosas, de las siguientes:

- Hay más de 250 demostraciones del llamado teorema de Pitágoras y no está claro cuál pudo ser precisamente la de Pitágoras.
- El mismo Pitágoras es un personaje envuelto en la leyenda. No es discutible, sin embargo, la existencia de la secta de los pitagóricos y su influencia posterior.
- No sólo los romanos tuvieron un sistema de numeración distinto del que usamos en la actualidad.
- En el mundo islámico, no sólo en el cristiano, hubo resistencia a la implantación del nuevo sistema de numeración venido de la India. Un califa puede ordenar la traducción y difusión del sistema hindú, pero todas las sociedades han sido, y son, resistentes a los cambios. El ábaco, además, tenía sus ventajas sobre lo que hoy llamamos algoritmos de lápiz y papel.
- Sí se ha mejorado la exactitud del valor conocido de π. Radice cita la aproximación de Arquímedes y, como no vuelve sobre este tema, alguien sacó la conclusión de que había quedado parado desde entonces.
- Las matemáticas son una creación colectiva. Arquímedes, por ejemplo, no es el primero que se plantea cómo se mide la longitud de una circunferencia.
- *El árabe que inventó los algoritmos...* (cita textual de un alumno) no es una expresión muy afortunada. Tal y como funciona la escuela (el sistema educativo), ¿es sorprendente que haya que advertirles que siempre ha habido algoritmos, que cada pueblo ha desarrollado su propio sistema de numeración o sus métodos de control de los números, que las matemáticas son una creación colectiva...?
- Las matemáticas se han desarrollado muchísimo en los últimos trescientos años. [Alguien había interpretado la fecha en que detiene Radice su historia como el final de la Historia].

Etc., etc. ¿Ingenuidades? En sus comienzos como enseñante, Mateo tuvo la suerte de conocer a José María, un colega de filosofía a cuya clase acudió en alguna ocasión integrándose en uno de los grupos de trabajo. La primera vez, al acabar, le preguntó a Mateo cómo lo había visto y como este dudara, se adelantó a responder él:

—¿Te ha parecido bajo el nivel de la discusión?
—Pues sí. No me atrevía a decirlo.
—Claro que ha sido bajo. Pero para esto estoy yo aquí: para que llegue a tener más altura. Los profesores de matemáticas y de ciencias deberíais venir a la clase de filosofía para que os dieras cuenta del nivel de abstracción y de expresión en el que se encuentran vuestros alumnos y alumnas y comparar luego con el nivel de los temas que les proponéis.

El sistema educativo no sólo no respeta ese nivel, sino que además no les acostumbra –más bien al contrario– a la libre interpretación y al estudio creativo. Mateo sabe que no sólo no debe escandalizarse por las opiniones que ha recogido sino que además le proporcionan una buena excusa para aportar más información. Sabe también, como le advirtió José María, que esa debe ser su actitud con las opiniones equivocadas sobre contenidos técnicos de matemáticas. Otra cosa es que consiga ser siempre coherente con lo que cree que debe hacer.

III

Pero también demostraron entusiasmo y una muy buena capacidad de expresión. Víctor Latre, por ejemplo escribe:

> No sabía nada sobre la historia de las matemáticas, por lo que una vez comenzada la lectura el libro sucumbió rápidamente, pese a que algunos apéndices me costaron un poco. Este libro me ha ayudado a aclarar algunas ideas básicas que no tenía muy claras. Me ha gustado comprobar cómo evoluciona el pensamiento matemático; además esta historia refleja algo que me causa perplejidad, aunque comprendo, y es el hecho de que la idea básica, la simple, la que da pie a grandes filosofías o fórmulas es la que tarda siglos en salir, una vez concebida se ramifica rápidamente pero tener esa primera y sencilla idea es lo que más cuesta.

El sistema educativo no sólo no respeta ese nivel de abstracción, sino que además no acostumbra a los alumnos –más bien al contrario– a la libre interpretación y estudio creativo.

Joel Per insiste también en las ideas básicas desde un aspecto más vital:

> Yo creo que más que un libro de matemáticas, o *un libro que explica matemáticas*, este es un libro que nos hace razonar sobre las matemáticas, consiguiendo que lleguemos a una conclusión mucho más amplia de las matemáticas (yo, por ejemplo, sabía que habían habido grandes personas como Euclides o Pitágoras, pero realmente nunca había caído en la cuenta de la importancia real que tuvieron esas personas en la historia de las matemáticas, en el razonamiento, en otras palabras, en el desarrollo intelectual de la humanidad), olvidando por un momento las cuentas, los números, los algoritmos, etc., para hacernos ver que es más una forma de pensar, una especie de ser vivo que evoluciona gracias a nuestra conciencia, y yo creo que esto tiene bastante importancia porque *te abre un poco los ojos*. Es decir: te imaginas por un momento en la posición de Arquímedes intentando descubrir la fórmula para hallar la medida de una circunferencia y es cuando te das cuenta de que ellos realmente no lo sabían, que no les venía explicado en el colegio desde siempre como a nosotros, que estamos hartos de verlo, no, ellos tuvieron que dar un paso mucho más grande para facilitar la vida a todas las generaciones posteriores, y yo creo que es ahí, cuando ya comienzas a ver la fórmula $l=2\pi r$ de una manera diferente, con un concepto mucho más genial y amplio.

Hemos respetado sus palabras y algunas primeras aproximaciones ingenuas a cuestiones concretas; creemos que merece la pena resaltar su interés y la frescura de sus escritos. Recordando la terminología en que se han desarrollado recientes polémicas, interpretamos estos textos como una petición de que en las aulas se imparta, antes que matemáticas, *el hecho matemático*. Es decir, cultura matemática. Se trata de que una fórmula pase a tener vida, por sí sola y como hecho histórico; que pueda ser *un concepto mucho más genial y amplio*.

IV

Esta sección se llama *Desde la Historia* y la mayor parte de esta colaboración parece que haya sido escrita desde la didáctica práctica (la teórica nos produce sarpullidos alérgicos), pero, ¿es posible para nosotros, profesores y profesoras de Secundaria, separar los dos enfoques en el día a día? La Historia debería ser uno de los hilos conductores de nuestro trabajo sin necesidad de que fuera por ello necesariamente visible. Las características de cada grupo y de cada nivel académico son las que determinarán el momento y la forma en que hará su aparición en el aula. Hay muchas formas de utilizarla.

1) *Datos aislados de diferente grado de profundidad en primer ciclo y 3º de ESO.* Sin que nos opongamos a los meramente biográficos, nos interesan más si aportan carga matemática, sociológica o ideológica. Las ilustraciones 6, 7, 8 y 9 son útiles para 2º y 3º ESO. La fotografía 9 es un

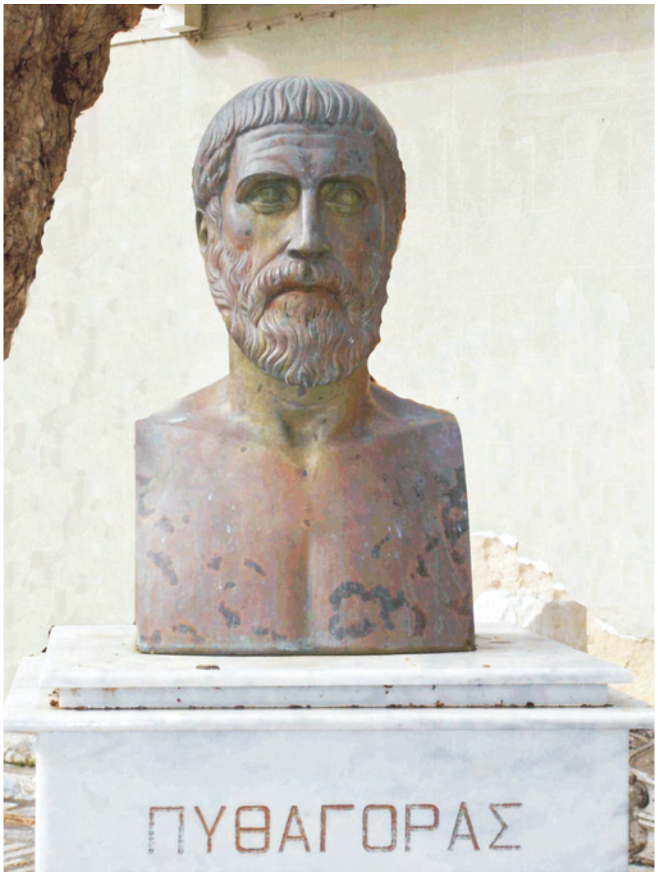


Ilustración 6. Busto de Pitágoras

Ilustración 7. Pitágoras comparando los números y los sonidos. Catedral de Chartres (s. XII)

bonito ejemplo de matemática escolar dignificada en una decoración pública de un edificio prestigiado. El Pitágoras gótico es sencillamente encantador y su naturalidad y terrenalidad trabajando contrastan con el hieratismo platónico de la escultura clásica: un tema interesante de conversación que puede aparecer –¿por qué no?– en clase de matemáticas. La tablilla babilónica –un listado de ternas pitagóricas– puede ser difícil de explicar en estos niveles de ESO, pero sirve para romper con el eurocentrismo que impregna sibilinamente nuestros currículos escolares.

2) *Contenidos matemáticos puros y duros.* Volviendo al teorema *kou-ku*, la demostración de Euclides es muy útil en primero de bachillerato, puesto que permite enlazar con el teorema del coseno. La generalización de Ibn Qurra[3] también sirve para este nivel. Las dos se presentan muy bien con *CABRI* o *GEOGEBRA*. En cualquier caso, la didáctica sacerdotal da un halo de quietismo e intangibilidad a los resultados matemáticos que hace interesante reutilizar los materiales del punto anterior también en el bachillerato. Por cierto, que la ignorancia histórica suele ir acompañada de la ausencia de carga semántica. Este curso, cuando Mateo propuso en su grupo de 1º de bachillearto que dibujaran con *CABRI* cuadrados sobre los lados de distintos tipos de triángulos y pidieran al programa que diera sus superficies, un alumno le hizo esta observación:

—Veo que se da la igualdad cuando el triángulo es rectángulo.

Incluso, cuando preguntó al alumno más interesado –va incluso al taller de talento matemático en la Universidad– suponiendo que conocía la relación de áreas, su respuesta fue:

—Bueno, habitualmente no te fijas en estas cosas.

En general, no asociaron previamente el llamado teorema de Pitágoras con la actividad propuesta. Ocurre que la práctica al uso en las aulas lo convierte en una mera rutina aritmética desconectada de la *realidad*. Evitamos explicitar conclusiones para no cargar demasiado a los lectores y lectoras de SUMA, que bastante nos aguantan.

3) Lectura de fragmentos seleccionados –porque vienen a cuento en ese momento– o textos completos, como el de Radice.

Y aunque la historia no esté presente en el aula de forma tangible, explícita, debe estarlo en nuestra mente. Como antídoto contra todos los dogmatismos didácticos en que nos educaron y en los que pretenden que eduquemos y contra todos los dogmatismos ideológicos en que nos educaron y en que pretenden que eduquemos. Para ello puede ser necesario desconfiar de la historia escrita, puesto que enfoca el pasado desde la perspectiva del presente. Pero a esto, a la desconfianza hacia la historia escrita, nos dedicaremos en el siguiente artículo. ■

Ilustración 8. Tablilla de arcilla con un listado de ternas pitagóricas.
Se piensa que fue fabricada entre los años 1800 y 1650 a.C.

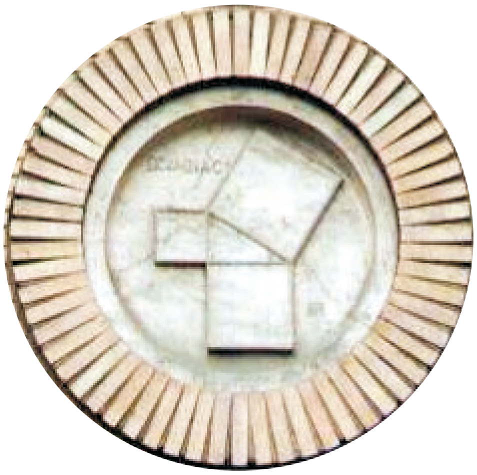


Ilustración 9. El Teorema de Pitágoras en la fachada del Paraninfo de la Universidad de Zaragoza (finales del s.XIX)

NOTAS

[1] Recuperamos a Mateo, el profesor que resumía a todos los amigos del *Colectivo del Martes* en aquel entrañable libro *¿Queréis la escuela?* En la portada, la respuesta de los estudiantes estaba en cerrada en un bocadillo en el que había dibujado un diplodocus amarillo con un lacito azul.

[2] Lucio Lombardo Radice: *La matemática de Pitágoras a Newton*, Ed. Laia. Barcelona, 1983 (La primera edición en italiano es de 1971).

[3] Ya tocamos estos temas en *En el entorno del teorema kou-ku (II y III)*, SUMA, n.os 45 y 46.

SUMA 55
Junio 2007, pp. 75-79

Tchuka Ruma

Juegos tradicionales del mundo

Desde tiempo inmemorial el juego ha sido una actividad íntimamente relacionada con la existencia del ser humano. Desde pequeños hemos estado acompañados de todo tipo de juegos; con ellos hemos aprendido a socializarnos, a respetar las reglas, a esforzarnos por ganar y sobre todo a llenar nuestros ratos de ocio. Cuántos de nosotros no hemos dedicado las tardes de estío o de reuniones familiares en Navidades al dominó o las cartas.

Ha habido siempre una serie de juegos que se han jugado en distintos lugares del mundo y que se conocen desde hace milenios, se denominan *Juegos Tradicionales del Mundo*. Nosotros vamos a referirnos a los juegos de tablero, aquellos que se juegan con fichas y/o tableros, muchas veces construidos con materiales artesanales o directamente excavando las casillas en la tierra y utilizando guijarros como fichas. Es curioso lo que estos juegos pueden despistarnos hoy en día si no profundizamos en ellos. Juegos como el *Tangram Chino* pueden parecernos muy antiguos, a pesar de ser una invención del siglo XIX, mientras que otros como el *Juego de la Oca* los consideramos más modernos, cuando se cree que se inventó en Alemania en el siglo XV.

Por otro lado cada vez son más las personas que investigan y recuperan juegos de tablero tradicionales de todas las partes del mundo. Aún recordamos la preciosa exposición que montaron, con motivo de las XXII Jornadas Matemáticas Isaac Newton, nuestros amigos canarios Manuel García Deniz y José Antonio Rupérez, con tableros y fichas reproduciendo las originales.

Nuestros compañeros de la Asociación de Profesores de Portugal (APM) organizaron con motivo del Año Mundial de la Matemática una maravillosa exposición de juegos del mundo que recorre nuestro país vecino. En su página web hay un enlace a la exposición de juegos con explicación de reglas, algo de historia e imagen de los tableros y fichas necesarios. No solo ahí pueden encontrarse referencias a estos juegos, existen multitud de páginas en Internet donde encontrarlas. Puede consultarse en la web:

http://www.apm.pt/mj/exposicao_jogos_do_mundo/exposicao_jogos_do_mundo.html

Es más, desde que en el año 1998, durante las jornadas regionales de la SAEM Thales de Jaén, un grupo de profesores comenzamos con la actividad de Matemáticas en la calle (ideada por Rafael Pérez, el primer director de SUMA), no ha sido extraño encontrar en las múltiples situaciones similares que se han repetido en muchas provincias desde entonces, ejemplos de estos juegos tradicionales como el Go, el Tres en Raya o el Alquerque, el considerado abuelo de nuestras actuales damas y de quién deriva el nombre de nuestro grupo de trabajo.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

Por supuesto este interés actual por el estudio de los Juegos Tradicionales no es una novedad, pues ya en el siglo XIII Alfonso X El Sabio, rey de Castilla y León, escribió el *Libro de axedrez, dados e tablas* un exhaustivo estudio sobre los juegos que en ese momento se conocían (donde aparece, entre otros, el Alquerque).

Juegos de estrategia

El hecho de traer un juego tradicional a nuestra sección no es meramente por su atractivo cultural. Siempre intentamos mostrar aspectos educativos de los juegos que presentamos y muchos de estos juegos tradicionales tienen la ventaja de ser juegos de estrategia, con interés desde el punto de vista didáctico en nuestra asignatura.

En el imprescindible libro Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato (editorial Síntesis, 1994), el colaborador habitual de SUMA, Fernando Corbalán, hace una clasificación de los juegos matemáticos en: Juegos de Procedimiento Conocido (por ejemplo bingo, dominó, puzzles), Juegos de Conocimiento (que abarcan algún aspecto concreto del curriculum) y Juegos de Estrategia. Respecto de estos últimos dice:

> En cuanto a los juegos de estrategia, su utilidad dentro de la formación matemática es muy grande, puesto que se trata de iniciar o desarrollar, a partir de la realización de ejemplos prácticos (no de la repetición de procedimientos hechos por otros), y atractivos, las destrezas específicas para la resolución de problemas y los modos típicos del pensamiento matemático.

Desde hace ya muchos años, la enseñanza de la matemática va en la línea de la resolución de problemas y de resolver situaciones dentro de contextos, y más en el futuro, con el desarrollo de las competencias evaluadas por los informes OCDE/PISA, donde concretamente la quinta propone:

> Plantear y resolver problemas. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados) y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.

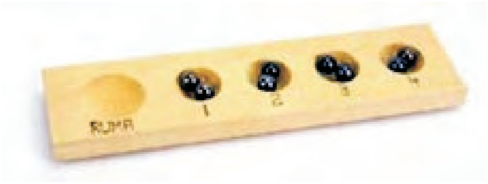
Muchas veces los profesores pensamos que la resolución de problemas es algo innato o fácil de aprender por nuestros alumnos. Sin embargo la utilización de procedimientos para esa resolución requiere práctica, una práctica que puede hacerse de una manera atractiva utilizando juegos de estrategias. Muchas de las herramientas o de los procedimientos que ponemos en funcionamiento al enfrentarnos a un problema son los mismos que debemos utilizar al buscar la estrategia en un juego.

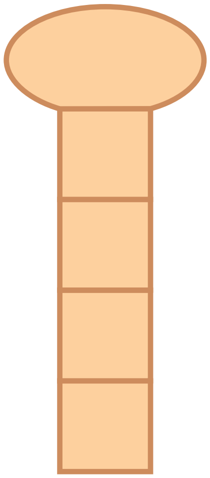
Hoy queremos presentar un juego tradicional en el que se ve claramente qué técnica o heurística debemos aplicar para resolverlo. En concreto el mismo que para resolver el clásico problema siguiente:

Un hombre tiene una canasta con naranjas. Le da a un amigo la mitad de sus naranjas y media más. A otro amigo le da la mitad de lo que le queda y media más. A un tercero la mitad de lo que le queda y media más. En toda la repartición le sobra una naranja, que se come. ¿Cuantas naranjas tenía?

El Tchuka Ruma

El juego que proponemos está considerado dentro del bloque de juegos llamados *Mancala*. Estos juegos simulan la siembra en el campo y en ellos hay que tomar las fichas de una casilla y dejarlas caer una a una en las casillas siguientes (simulando el efecto de sembrar). Aunque son tradicionales de África, el Tchuka Ruma se considera originario de la parte oriental de India, aunque algunos autores aventuran que puede provenir de Indonesia, Malasia o Filipinas y haberse popularizado a través de Rusia. Este juego tiene una particularidad especial que lo diferencia de juegos como el Mancala o el Wari, el ser un juego para un solo jugador. No es corriente que los juegos tradicionales de tablero sean solitarios, lo usual es que sean para dos jugadores.





El tablero tradicional de este juego está compuesto de cinco hoyos o casillas, siendo la quinta más grande de lo normal y recibe el nombre de *ruma o almacén*.

Para jugar se ha de tener dos fichas o *semillas* en cada uno de los cuatro hoyos pequeños y se comienza el juego siguiendo las siguientes reglas.

Se toman las fichas de una casilla cualquiera y se colocan de una en una en las casillas siguientes en dirección al almacén. Si una vez colocada una ficha en el almacén quedan fichas en la mano se sigue *sembrando* las fichas por la casilla inferior del tablero.

Cuando se deje caer la última ficha pueden ocurrir tres cosas:

1. Que caiga en una casilla que tenga fichas. En ese caso se toman las fichas de esa casilla y se sigue sembrando.
2. Que caiga en el almacén. Entonces podemos comenzar de nuevo en cualquiera de las casillas que tengan fichas y seguir con la siembra.
3. Que caiga en una casilla vacía. En este caso el jugador pierde la partida y hay que comenzar de nuevo.

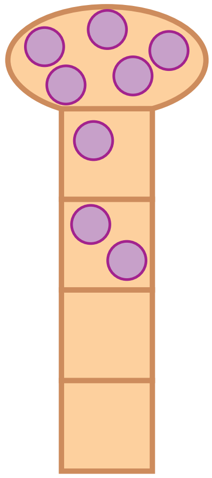
El objetivo del juego es conseguir acumular todas las fichas en el almacén.

Este juego tiene estrategia ganadora, es decir, es posible conseguir que todas las piezas terminen en el almacén.

Para sacarle aprovechamiento didáctico al juego y que no se quede en un mero pasatiempo debemos hacer que el alumno investigue cuál es la estrategia que debe seguir para conseguir colocar todas las fichas en su lugar final.

Lógicamente se puede intentar a voleo hasta que consigamos dar con la solución, pero lo mejor es buscar algún procedimiento para hallarla. En este caso utilizamos el procedimiento de considerar resuelto el problema y comenzar desde la solución, realizando los pasos al revés hasta llegar a la distribución inicial. Puedes ver en la página siguiente cómo encontrar la solución con ese método.

En el desarrollo que hemos hecho no aparecen las pruebas por caminos que no llevan a la solución. Por ejemplo, los pasos 1 y 2 son obligados para terminar el juego, pero en el paso 3 podíamos haber efectuado otra jugada distinta como se ve en la siguiente imagen.

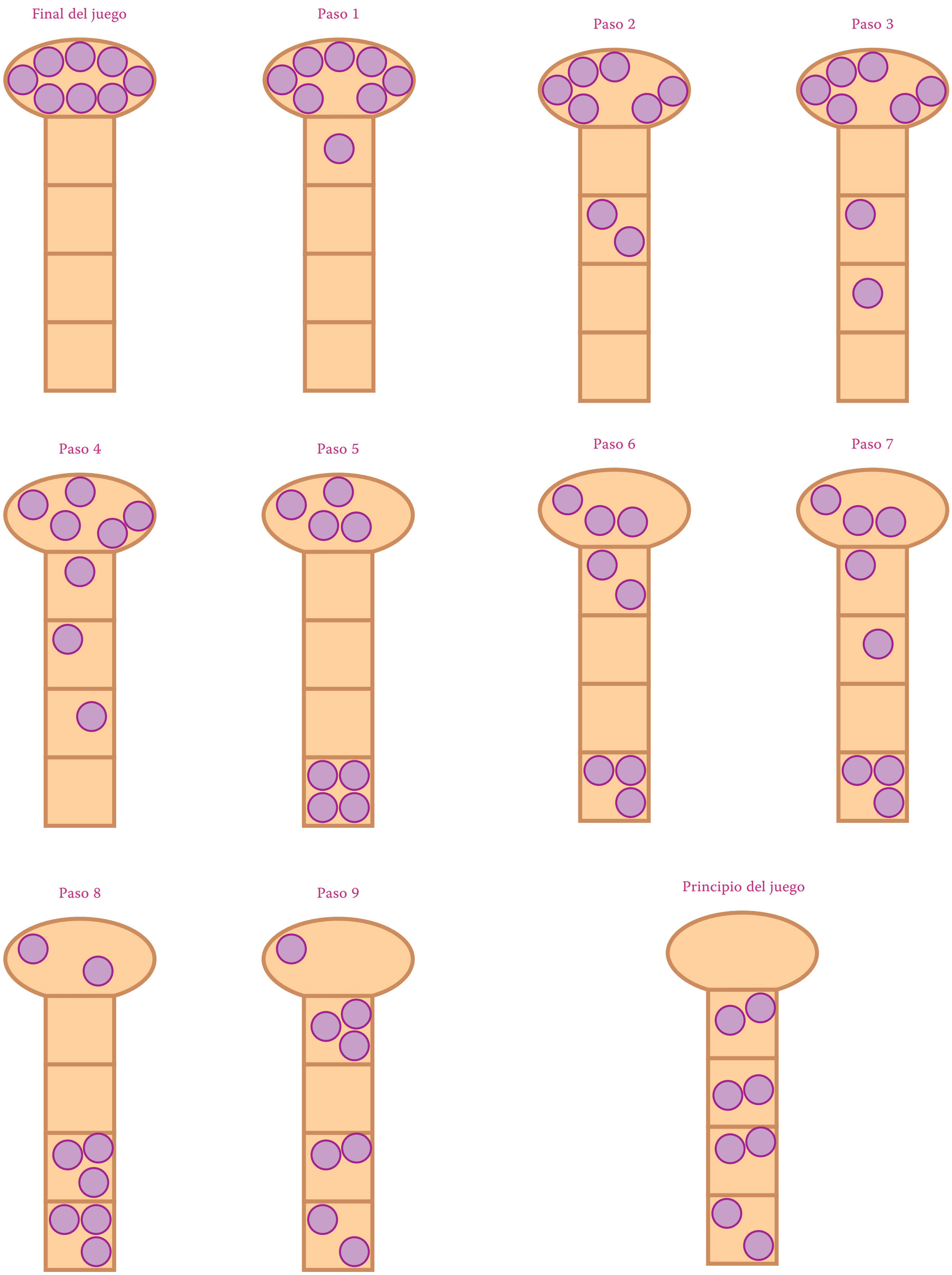


Si hubiésemos realizado esta jugada se puede ver que todos los posibles movimientos siguientes llevan a situaciones a las que no podríamos llegar en el proceso normal del juego.

Hemos visto cómo es el proceso del juego en general, aunque hemos realizado el desarrollo al revés (habíamos podido verlo igual en su marcha normal). Pero a veces podemos plantear situaciones parciales para que los alumnos puedan ir afrontando la búsqueda de estrategia de forma gradual.

Por ejemplo, podríamos plantear una primera cuestión, antes de comenzar con el juego completo. ¿Cuál es la única de las cuatro casillas desde la que podemos empezar a sembrar?

Un estudio rápido lleva a ver que la única posibilidad de comenzar el juego es por la casilla tercera (contando desde el pie del tablero), pues cualquier otra casilla lleva en dos movimientos a perder la partida. El razonamiento de por qué ocurre eso puede ser un buen ejercicio para que nuestros alumnos se acostumbren a expresar sus ideas.

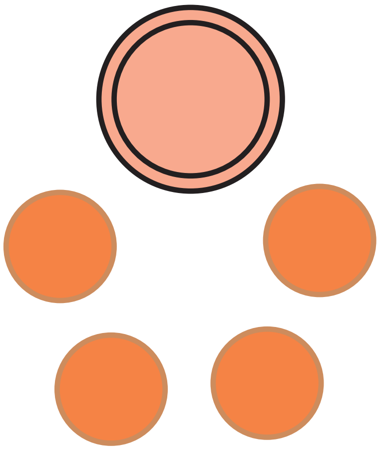

Final del juego
Paso 1
Paso 2
Paso 3
Paso 4
Paso 5
Paso 6
Paso 7
Paso 8
Paso 9
Principio del juego

Cuando tengamos resuelto el juego pueden empezar a llegar las variantes. La primera sería preguntar por la estrategia si colocamos tres fichas en cada casilla. El problema de este juego es que no tiene solución siempre, sino que depende de las condiciones iniciales. En la disposición de tener tres fichas por hoyo no hay solución posible. Por ello podríamos plantear el buscar en qué casos tiene solución. Si mantenemos cuatro hoyos con fichas, el siguiente juego con solución requiere seis fichas en cada lugar.

Otra línea de investigación aparece al modificar el número de hoyos y estudiar cuándo podemos encontrar solución en el solitario. Por ejemplo, manteniendo dos semillas o piedras en cada hoyo sólo encontramos solución cuando tenemos siete hoyos.

Ni que decir tiene que a medida que aumenta el número de fichas y/o de hoyos la resolución se complica bastante. Incluso cuando hay una gran cantidad de fichas es más cómodo afrontar la solución desde la posición inicial con las fichas en cada casilla.

Este solitario del Tchuka Ruma también suele presentarse en forma circular donde los hoyos están formando una circunferencia y el almacén se distingue por ser más amplio que los restantes hoyos. Podemos ver un tablero en la figura siguiente:



Se coloca el número de fichas que se quiera (en general dos como en el caso anterior) y suele *sembrarse* en el sentido contrario a las agujas del reloj. Las reglas son las mismas que antes y si se llega al ruma con fichas en la mano se continúa por las casillas siguientes.

La primera investigación que puede proponerse es si el hecho de ser el tablero circular o lineal modifica en algo el juego o la estrategia de resolución. Basta fijarse un poco para descubrir que no aporta ninguna ventaja ni dificultad el hecho de ser circular ya que el desarrollo del juego, y por tanto los pasos para solucionarlo, son los mismos.

Por si algún lector quiere practicar este juego, en la dirección

http://www.cs.unimaas.nl/~donkers/games/ruma/

puede encontrar un applet para jugar. También tiene un enlace que permite descargarse el programa java para tenerlo en el ordenador. Se complementa con un cuadro en donde aparecen en colores las distribuciones que tienen solución. Dado que el programa hace los movimientos seguidos sin más que pulsemos en una de las casillas, es muy rápido comprobar todas las posibilidades hasta encontrar la solución (si la hay).

Como siempre nos gusta indicar en nuestros artículos, un complemento educativo para cualquier juego es que los alumnos se construyan sus propios tableros y fichas. En el caso de los juegos de Mancala suele ser atractivo utilizar semillas naturales como por ejemplo alubias (bien blancas o de color) aunque puede servir cualquier otro material, por ejemplo piedrecillas siempre que no sean muy grandes, el hecho de que no todas sean del mismo tamaño le da un cierto sabor casero al juego. El tablero puede ser en madera (al menos para el Mancala o el Wari suelen ser los que se encuentran en mercadillos y comercios de juegos) aunque también podemos hacerlo en barro (o en masa para modelar que no necesita cocción y que endurece en unas pocas horas). Por supuesto se puede utilizar cualquier otro tipo de material, hasta papel, aunque también se pueden utilizar cuencos de cerámica o de mimbre para las casillas del tablero (como hemos podido ver que utilizan nuestros compañeros de la SAEM Thales de Córdoba). ■

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herrainz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

SUMA 55
Junio 2007, pp. 81-82

Mientras hay vida hay esperanza

Pandora, John William Waterhouse 1986

Este clip va dedicado a la esperanza. Por supuesto no se trata de interferir en la política de la Comunidad de Madrid, ni de hacer una reflexión sobre virtudes cristianas, ni de reconocer en público que esta palabra forma parte de nuestros sentimientos más nobles cuando estamos dando clase. Lo que nos proponemos es hacer referencia a tres casos muy concretos de esperanza matemática.

La esperanza en los juegos de azar

Este caso lo tenemos muy claro: dado un juego o evento en el cual una variable (por ejemplo la de pérdidas y ganancias) puede tomar diversos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$, respectivamente, entonces la media aritmética ponderada $E= x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n$ evalúa la esperanza matemática. En los juegos de azar con dinero, el cálculo de la E a priori (antes de invertir nada) puede ser una acción prudente. Si hay banca, y no es tonta, nuestra E siempre será negativa y nos avisará de las pérdidas esperables en cada partida. Si E es positiva y elevada la cosa bien. Si E es nula el juego servirá para pasar el rato y posiblemente acabamos igual que al principio. Los casinos y todos los Ministerios de Economía y Hacienda dominan a la perfección el cálculo de las esperanzas en apuestas. Para nosotros la esperanza es un parámetro-ángel de la guarda al cual deberíamos prestar más atención.

La esperanza de vida

Y de una situación probabilística saltamos a una típicamente estadística. La denominada *esperanza de vida* es una expresión que ha hecho fortuna en nuestra sociedad. La mayoría de personas muestran una actitud optimista cuando leen o oyen decir que *hoy en día la esperanza de vida es mayor que antes* o que los japoneses son los que llegan a más viejos. Entonces la gente *esperanzada* aporta más dinero a los planes de pensiones y cambia el cocido y el tinto por el *sushi* y el té verde.

Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

Pero si uno observa las cifras reales de vida, la idea intuitiva de esperanza puede empezar a tambalearse. Por ejemplo, una mujer española de unos treinta años verá en las tablas que su esperanza de vida en 2004 ha aumentado respecto del 2003 (*¿Cómo? Si yo no he hecho nada…*) y es de 83,60 años (*¿Lo del 0,60 son unos meses?*). Pero si vive en Barcelona es de 84,60 años (*¿Efecto del Estatuto de Autonomía?*) pero como la señora es europea su esperanza, gracias a ser de la Unión, es de 81,90 según datos del 2003. En cambio si tuviese *40 años europeos* su esperanza-2003 hubiese sido de 82,20 (*¿Más mayores, más esperanza? ¿Lo hacen para no desanimar?*). Como vé, conviene entrar a precisar un poco todo este lío de las esperanzas que por lo visto depende de la edad de cada uno, del año en que se calculan y del servicio estadístico que hecha las cuentas (autonómico, central, europeo…).

Los servicios estadísticos, cada uno en su ámbito, acumulan cada año las tablas de mortalidad (aunque sea duro de admitir, lo que permite calcular la vida es la muerte). Estas tablas no sólo muestran los que han vivido de más, sino las muertes en las diferentes etapas de la vida.

La esperanza de vida al nacimiento, la de los recién nacidos del año considerado, es el número de años que previsiblemente el bebé vivirá si se mantienen los modelos de longevidad que se están dado ahora a lo largo de la vida del bebé. Este numerito se halla ponderando las edades vividas con las frecuencias que éstas se han dado en el año estudiado.

No todos los servicios estadísticos publican simultáneamente sus datos de años anteriores y por tanto las esperanzas cambian por lugares y por años. En el 2006 puede localizar datos hasta el 2004 y en el caso de España (datos globales) resultan unas esperanzas de vida al nacer de 79,7 años. Mire lo que ha ido ocurriendo (Fuente: *Programa Naciones Unidas para el Desarrollo*)

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
España	78,0	78,1	78,3	78,5	79,1	79,2	79,5	79,7

Parece que vamos bien y que el año 2001 (*¿fiestas?*) el aumento fue notable.

Pero a partir de las informaciones segmentadas de mortalidades también se calcula la esperanza de vida de las diferentes edades. Mire la siguiente tabla española (INE, 2002) sobre esperanzas de vida a diferentes edades:

	0	10	20	30	40	50	60	70
Hombres	76,2	66,7	56,9	47,3	37,9	28,9	20,6	13,2
Mujeres	82,9	73,3	64,4	53,6	43,9	34,4	25,2	13,2

datos que puede comparar con los europeos (Eurostat, 2003).

	0	10	20	30	40	50	60	70
Hombres	75,1	65,6	55,8	46,3	36,8	27,9	19,8	12,7
Mujeres	81,2	71,6	62,7	51,9	42,2	32,8	23,9	12,7

La esperanza como base a una reflexión política

Una obra que ha tenido impacto mundial es la de Robert Wright *Nonzero: The Logic of Human Destinity* (cuya traducción española ya se ha publicado). Es un libro sobre historia y política pero que basa sus argumentos en conceptos elementales provenientes de la teoría de juegos (algo que los economistas también han sabido aprovechar a fondo) para con ellos releer y revisar evoluciones sociales y situaciones actuales. El propio título *Nonzero* hace referencia a situaciones de esperanza matemática no nula, es decir, en donde no hay perdedores y ganadores absolutos sino que todos ganan algo. No se trata de un doble triunfo sino de buscar y elegir caminos que lleven a más beneficios comunes para la Humanidad. El libro apuesta por un nuevo modelo de relaciones donde sea posible *elegir entre las alternativas de futuro y comprender la elección*.

***

Es bonito observar que muchos de nuestros conceptos den pie a usos interdisciplinarios tan diversos. Lo último que se pierde es la esperanza.

Para pensar un rato

Con este clip quisiera animar al lector para que explote didácticamente esta versatilidad de los conceptos matemáticos que les permite aparecer en situaciones muy dispares. También le invito a viajar por las webs de los servicios estadísticos y constatar las diferencias de datos sobre objetos idénticos y buscar interpretaciones positivas a las divergencias. ■

PARA SABER MÁS

WRIGHT, Robert (2005): *Nadie Pierde. La teoría de juegos y la lógica del destino humano*, Metatemas 89, Tusquets Ed. SA, Barcelona

STEEN, L.A. (1994) *For all practical purposes*, W.H. Freeman, New York (traducción Addison-Wesley-UAM, *Matemáticas en la vida cotidiana*).

http://www.idescat.net

http://www.ine.es

SUMA 55
Junio 2007, pp. 83-89

Cauchy : El triunfo del rigor

*H*ace 150 años, el 23 de mayo de 1857, a la edad de 68 años, moría inesperadamente en Sceaux, pueblecito cercano a Paris, Augustin Louis Cauchy, uno de los primeros matemáticos modernos, y de los más prolíficos que han existido. Sus últimas palabras, dirigidas al arzobispo de París que había ido a visitarle fueron:

> Los hombres pasan; pero sus obras quedan.

Cauchy había nacido en Paris, en plena época revolucionaria, pocas semanas después del asalto y caída de la Bastilla, el 21 de agosto de 1789. Primogénito de seis hermanos de una familia modesta, su padre, Louis-François, era jurista y se encargó personalmente de la educación de su hijo, dada la poca efectividad de las escuelas en aquella época. Louis-François, profundamente religioso, cercano a los jesuitas, monárquico ultra, inculcó a su hijo sus propias ideas.

> *Pero sería un grave error pensar que se puede encontrar certeza con sólo las demostraciones geométricas o el testimonio de los sentidos.*
> Cauchy

Augustin Louis Cauchy

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

El 1 de enero de 1800, recién instalado el Consulado por Napoleón, a raíz del golpe de estado, Louis-François, es elegido secretario del Senado, con lo que el aún niño Augustin Louis continúa sus clases en el despacho de su padre. En este lugar tiene ocasión de conocer a dos de los grandes matemáticos de la época, Lagrange y Laplace. Ambos se quedan asombrados de la capacidad para las matemáticas mostrada por el niño. Incluso Lagrange llegó a decir de él: *Este nos va a reemplazar a todos como matemático*. No obstante, su padre decide llevarlo a la Escuela Central del Panteón, con solo trece años, donde pudiera adquirir una formación humanística. Le bastaron dos años para destacar en el dominio del Griego y del Latín.

En 1804 deja la escuela y se dedica al estudio intensivo de las matemáticas, bajo la dirección de un tutor, con el fin de ingresar en la Escuela Politécnica. Al año siguiente, en efecto,

Litografía por Rudolf Hoffmann, ca. 1840

obtiene el número dos en las pruebas de admisión de la Escuela. De la Escuela Politécnica pasa a la Escuela de Ingenieros Civiles. Cuando todavía no había cumplido los 21 años obtiene el título de *Ingeniero de Caminos*. Inmediatamente es destinado a Cherburgo, donde participa en las obras de construcción del puerto, pero se diría que había sacado *billete de ida y vuelta*, pues, según cuentan, al iniciar su viaje a Cherburgo llevaba consigo el *Tratado de las funciones analíticas* de Lagrange y la *Mecánica Celeste* de Laplace. Lo cierto es que dedica buena parte de su tiempo al estudio y la investigación matemática. Fruto de esta dedicación es su trabajo sobre los poliedros, que presenta en 1811, y en el que muestra la inexistencia de otros poliedros regulares distintos a los de 4, 6, 8, 12 o 20 caras. Aun presenta una segunda memoria sobre este tema en 1812. Siguiendo los consejos de Lagrange y Laplace, debilitado su estado de salud, decide abandonar los trabajos como ingeniero y regresar a Paris para dedicarse enteramente a las Matemáticas.

En 1813, con veinticuatro años, vuelve a París y atrae ya el interés de los matemáticos más eminentes de la época por sus investigaciones. En 1814, presenta el trabajo *Sur les intégrales defines* (Sobre las integrales definidas). A pesar de todo, desde el punto de vista profesional, no logra Cauchy una ocupación científica oficial.

En el año 1815, derrotado Napoleón en Waterloo y exiliado en Santa Elena, se restaura en Francia la monarquía en la figura de Luis XVIII y corren vientos favorables para la antirepublicana familia Cauchy. Es en este periodo, durante los reinados de los borbones Luis XVIII y Carlos X, hasta la revolución de 1830, cuando alcanza Cauchy sus más importantes resultados científicos. En 1815 publica una memoria sobre los *grupos de sustituciones*, título análogo al de Galois, así como una demostración del importante *teorema de Fermat* relativo a los *números figurados* (la posibilidad de expresar cualquier entero positivo como suma de tres números triangulares, cuatro números cuadrados, cinco números pentagonales..., *n* números *n*-gonales), completando de este modo lo que Gauss había logrado solo para los números triangulares y cuadrangulares.

En 1816, se le otorga el Gran Premio de la *Academia francesa*, por su trabajo *Une théorie des ondes sur la surface d'un fluide dense de profondeur infinie* (Una teoría de las ondas sobre la superficie de un fluido denso de profundidad infinita). Ese mismo año, es nombrado académico, por decreto, ocupando el lugar dejado por Monge que había sido destituido por Napoleón en el breve periodo de tiempo, conocido como los *cien días*, en que recuperó el poder desde el regreso de la isla de Elba (1814) hasta su exilio definitivo en Santa Elena (1815). Así mismo, en 1816, es nombrado profesor titular de Análisis y de Mecánica en la Escuela Politécnica. En 1817, imparte clases de Física en el *Collège de France*, cosa que interrumpe al curso siguiente y retoma entre 1825 y 1830. Da también clases de álgebra en la Facultad de Ciencias, como profesor sustituto, a partir de 1821.

En 1818, se casa con Aloise de Bure, con la que tiene dos hijas.

En 1815 publica una memoria sobre los grupos de sustituciones, *título análogo al de Galois, así como una demostración del importante* teorema de Fermat *relativo a los* números figurados*.*

Si hay algún rasgo dominante en la vida de Cauchy ese es la búsqueda de la verdad, la necesidad de lo absoluto.... esa misma necesidad de verdad, de alcanzar lo absoluto, es lo que determina su forma de abordar las matemáticas. No es de extrañar que la búsqueda del rigor se convirtiera así en su objetivo prioritario de trabajo.

Cauchy por C. H. Reutlinger

El análisis

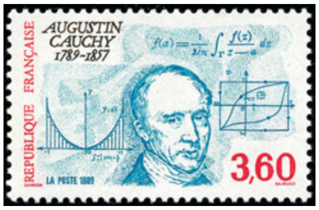
Si hay algún rasgo dominante en la vida de Cauchy ese es la búsqueda de la verdad, la necesidad de lo absoluto. Considera que en la búsqueda de la verdad consiste precisamente el trabajo del sabio:

> La verdad –escribe en 1842– constituye un tesoro inestimable, cuya adquisición no va seguida de remordimiento alguno y no perturba jamás la paz del alma. La contemplación de estos celestes encantos, de su belleza divina, basta para compensarnos de los sacrificios que hacemos para descubrirla, y la bondad misma del cielo no consiste sino en la posesión completa y plena de la verdad.

Pues bien, esa misma necesidad de verdad, de alcanzar lo absoluto, es lo que determina su forma de abordar las matemáticas. No es de extrañar que la búsqueda del rigor se convirtiera así en su objetivo prioritario de trabajo. El rigor se hace especialmente patente en sus cursos de análisis, impartidos en la Escuela Politécnica, y por demás fructíferos, ya que estos cursos van a ejercer una influencia decisiva en el posterior desarrollo del análisis hasta nuestros días.

Efectivamente, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz había adquirido un gran impulso por parte de un matemático tan genial como Euler. Pero los conceptos básicos, como el de infinito, el de infinitamente grande o el de infinitamente pequeño, permanecían todavía en el terreno de la intuición geométrica, así como los métodos de trabajo tan frecuentemente motivo de objeciones en cuanto al rigor se refiere, tal el caso de los desarrollos en serie, por ejemplo. La necesidad, pues, de poner orden en los fundamentos del ya por entonces inmenso edificio del análisis preocupaba a no pocos matemáticos de la época... Abel, en carta dirigida al profesor Christoffer Hansteen, en 1826, se lamentaba de la situación:

> ...la tremenda oscuridad que incuestionablemente encuentra uno en el análisis. Carece completamente de todo plan y sistema, y el hecho de que tantos hayan podido estudiar-



Sello dedicado a Cauchy

> lo es notable. Lo peor del caso es que nunca ha sido tratado rigurosamente. Hay muy pocos teoremas en el análisis superior que se hayan demostrado de una manera lógicamente sostenible. En todas partes encuentra uno esta manera miserable de concluir lo general partiendo de lo especial y es extremadamente peculiar que tal procedimiento haya llevado a tan pocas de las así llamadas paradojas.

Gauss y Bolzano mostraban una preocupación similar. Algunos habían intentado remediarlo, como Lagrange con su *Théorie des fonctions analytiques*, sin lograrlo totalmente.

En estas condiciones, aunque Bolzano había dado pasos importantes, sus resultados no fueron conocidos hasta mucho tiempo después, así que es Cauchy el primero que emprende la tarea con fortuna y su trabajo es conocido. Para ello hace una verdadera revolución en la estructura del desarrollo del análisis, sometiéndolo desde el principio al espíritu del rigor, tanto en lo que se refiere a los conceptos como a los métodos.

En 1821, siguiendo la tradición de la Escuela Politécnica, recoge sus lecciones en unos apuntes que titula *Cours d'analyse* (Curso de análisis). En él explica su proyecto:

> En lo tocante a los métodos, he tratado de darles todo el rigor que se exige en geometría, de forma que no se recurra jamás a la generalidad del álgebra. Las razones de este tipo, aunque bastante aceptadas por lo común, no pueden considerarse, me parece, sino como inducciones adecuadas para hacer presentir la verdad en ocasiones, pero concuerdan poco con la exactitud de que tanto se jactan las ciencias matemáticas. Es preciso observar además que propenden a atribuir a las fórmulas algebraicas una amplitud indefinida, cuando, en realidad, la mayoría de ellas sólo son válidas bajo ciertas condiciones y para ciertos valores de las cantidades que contienen. Al determinar estas condiciones y estos valores, y al fijar de forma precisa el significado de las notaciones que utilizo, hago desaparecer toda incertidumbre.

Por aquella época ya era importante la reputación de Cauchy y numerosos los oyentes que acudían desde Berlin, San Petesburgo, Madrid,...para oír en directo los resultados de sus

> *...la tremenda oscuridad que incuestionablemente encuentra uno en el análisis. Carece completamente de todo plan y sistema, y el hecho de que tantos hayan podido estudiarlo es notable. Lo peor del caso es que nunca ha sido tratado rigurosamente.*
>
> Abel

investigaciones. De este modo, su *Cours d'analyse,* cuando lo hace público, se difunde como la pólvora por toda Europa, y se convierte en el modelo a seguir por todos los autores de tratados de análisis del siglo XIX. Hasta el propio Abel, tan crítico con el estado de cosas, alaba esta obra de Cauchy:

> La distinguida obra debiera ser leída por todo aquel que ame el rigor en las investigaciones matemáticas.

> *Por aquella época ya era importante la reputación de Cauchy y numerosos los oyentes que acudían desde Berlin, San Petesburgo, Madrid... para oír en directo los resultados de sus investigaciones.*

La clave del rigor

¿Cómo ha sido posible, para Cauchy, encontrar el cauce del rigor en una materia tan sumamente difícil, que se había resistido a los más grandes matemáticos del siglo XVIII y primer cuarto del XIX?

La base del éxito de Cauchy hay que buscarla en dos estrategias. Por una parte, aritmetizar el análisis, independizarlo de su apoyo geométrico, y, por otro lado, basar todo su desarrollo en el concepto de límite. Hasta entonces, se manejaba la noción de límite de una forma intuitiva y como herramienta auxiliar de las relaciones entre cantidades implicadas en problemas geométricos, incluso, cuando se aplicaba a los números, no se dejaba de recurrir a la intuición geométrica, lo que entonces se conocía como *la metafísica del cálculo.* Si bien Euler y Lagrange se esforzaron por establecer el cálculo sobre su concepto de función analítica, no lograron demasiado éxito en la tarea. Para encontrar un intento serio de hacer del concepto de límite la base de todo el desarrollo del cálculo hay que llegar a D'Alembert, que llama la atención sobre la importancia del concepto de límite en un artículo de la enciclopedia, y a Lacroix, que lo utiliza en sus cursos al presentar el cálculo infinitesimal. Precisamente, con este último había dado Cauchy sus primeros pasos en el estudio del análisis.

En su *Cours d'analyse,* Cauchy se desprende de toda *metafísica* geométrica, coloca al concepto de límite en la base del cálculo y lo sitúa en el campo de las funciones numéricas. Define el límite de una sucesión de números reales del siguiente modo:

> Cuado los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de modo que acaben por diferir de él tan poco como se quiera, a este último se le denomina límite de todos los demás.

En 1823, publica el *Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (Compendio de las lecciones de cálculo infinitesimal), y en 1829 ven la luz las *Leçons sur le calcul différentiel* (Lecciones sobre el cálculo diferencial). Estos dos libros, junto con el *Cours d'analyse*, constituyen la obra en que Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con todo rigor.


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

En sus textos, Cauchy aplica la nueva definición de límite a las nociones de derivada y continuidad. Define la derivada para funciones continuas como el límite, si existe, del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, tal y como lo hacemos en la actualidad. En cambio el concepto de diferencial, que había sido clave en el desarrollo del cálculo para Leibniz, lo relega Cauchy a un segundo plano. Si para una función *y=f(x)*, designamos por *dx* una cantidad finita, entonces *dy = f'(x) dx*. En cuanto a la continuidad, señala que la función *y = f(x)* es continua, entre ciertos límites de la variable *x*, si un incremento infinitamente pequeño de *x* proporciona un incremento infinitamente pequeño en la función.

Del mismo modo, aborda el concepto de integral desde la noción de límite, en contra de lo habitual durante todo el siglo XVIII, que consistía en considerar la integración como el proceso inverso de la diferenciación. Esta forma de enfocar la integración había tropezado con grandes dificultades, pues no siempre era posible encontrar la función primitiva. Ya Euler reconocía las limitaciones de semejante concepción de la integral, y escribía, cuando no conseguía encontrar la primitiva de una función:

> ...no nos queda otra cosa que tratar de encontrar para ella un valor tan próximo al verdadero como se quiera.

La base del éxito de Cauchy hay que buscarla en dos estrategias. Por una parte, aritmetizar el análisis, independizarlo de su apoyo geométrico, y, por otro lado, basar todo su desarrollo en el concepto de límite.

Y esta idea de resolver el problema por la vía de la aproximación es la que sugiere a Cauchy su forma de definir la integral. Lo hace, partiendo de la integral definida, que él define, para toda función continua sobre un intervalo dividido en *n* subintervalos, como el límite (una vez más entra el límite en escena) de sumas de productos cuando la amplitud del mayor de los subintervalos tiende a cero. Esto es:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,(x_i-x_{i-1}),$$

cuando $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero.

Para ser rigurosos, comenta:

> ...es importante notar que si los valores numéricos de estos elementos son muy pequeños y el número *n* muy grande, el modo de subdivisión tendrá solo una influencia imperceptible en el valor de *S*.

Y aún escribe Cauchy:

> ...me parece que esta manera de concebir la integral definida debe ser adoptada con preferencia a otras, ya que es igualmente válida en todos los casos, incluso cuando no podamos pasar de la función que aparece bajo el signo de integral a la función primitiva. Además, de esta manera puede fácilmente demostrarse que una integral tiene un valor finito único, si la función es continua entre los dos valores en los que se toma la integral.

Desde esta definición de integral llega a la noción de primitiva de una función como la integral definida con el límite superior variable.

A partir de 1823, Cauchy empieza a tener problemas en la Escuela Politécnica. Los alumnos se quejaban de que sus lecciones eran largas y difíciles, los profesores se mostraban de acuerdo con tales críticas, y Cauchy se defendía:

> ...la experiencia demostrará pronto que los nuevos métodos (es decir, su forma de orientar el análisis) lejos de entorpecer la instrucción de los alumnos, les permiten aprender en menos tiempo y con menos esfuerzo todo lo que aprendían anteriormente.

Por otra parte, sus lecciones parecían demasiado teóricas para lo que debe ser la formación de un ingeniero. Fuera como fuese, el caso es que la Escuela, en 1825, elaboró nuevos programas que daban una orientación más aplicada a los temas de análisis.

En 1826, publica una especie de diario personal, bajo el título de *Exercices de mathématiques*, en el que da a conocer mensualmente sus trabajos de Matemáticas. Después de 1830, la publicación adoptará el nuevo título de *Exercices d'analyse mathématique et de physique.*

Teoría de funciones de variable compleja

En sus textos, no se limita Cauchy a las funciones reales de variable real sino que generaliza sus definiciones al campo complejo. Los primeros pasos de esta teoría aparecen en su *Mémoire sur la théorie des intégrales defines* (Memoria sobre la teoría de las integrales definidas), leída en la Academia en 1814 pero cuya publicación se retrasaría hasta 1827. En ella trata de hacer riguroso (siempre el rigor) el paso de la variable real a la variable compleja que utilizaban Euler, desde 1759, y Laplace, desde 1782, para calcular integrales definidas mediante variables complejas.

Antes que Cauchy, ya Gauss, en una carta a su amigo F. W. Bessel de 1811, comenta el significado de la integral de una función de x cuando la variable x es compleja, y le indica que tiene un teorema muy bello sobre que el valor de una integral, en ciertas condiciones, es independiente del recorrido utilizado para calcularla. Pero, no publica sus consideraciones, cosa habitual en él, como ocurrió con las geometrías no euclideanas, por poner un ejemplo. En cambio, Cauchy era todo lo contrario, publicaba, en cuanto podía, todo lo que iba haciendo. De ahí que haya que otorgar a Cauchy la gloria de haber construido la teoría de funciones de variable compleja.

En su *Mémoire sur la théorie des intégrales defines,* al tratar de generalizar la noción de integral al caso de la variable compleja, hace notar que en este caso hay muchas maneras de realizar la partición por lo que es necesario demostrar, y lo demuestra, que la definición es independiente del camino seguido.

A partir de este resultado, y en sucesivos escritos, construye Cauchy buena parte del edificio de la teoría de funciones de variable compleja. Para semejante hazaña no bastaría solo con aritmetizar el análisis de funciones de variable real, como era su primer intento, despojándolo de todo recurso a la intuición geométrica, sino que sería necesario elevar un peldaño el nivel de abstracción. Efectivamente, así como la variable compleja exige un espacio bidimensional para ser representada, la función de variable compleja requeriría un espacio de cuatro dimensiones, es decir quedaría fuera de cualquier apoyo intuitivo ya desde sus comienzos.

El exilio

A los 41 años, cambia radicalmente la vida de Cauchy. La revolución de 1830 depone al rey Carlos X de Borbón, y le sucede la casa de Orleáns en la persona de Luis Felipe. Entonces Cauchy, ferviente seguidor de los Borbones, se niega a prestar juramento de fidelidad al nuevo monarca, pierde su empleo, abandona Paris, dejando allí a su familia con los suegros, se dirige a Suiza, y a pesar de que se va sólo por unas semanas acaba autoexiliándose en este país, abandonando toda actividad pedagógica durante casi un año. De allí, al cabo de un año, pasa a Turín, donde se había creado una cátedra especialmente para él, de modo que puede volver a ejercer la docencia.

Entretanto, Carlos X se había trasladado con su Corte a Praga, y desde allí cursa una invitación a Cauchy para que acepte el puesto de preceptor del heredero de la Corona, el Duque de Burdeos. Cauchy acepta, y en 1833 se traslada a Praga, a donde hace venir a su familia. Desempeña el cargo durante cinco años, en los que experimenta una notable reducción su producción científica. Eso si, Carlos X le concede el título de Barón como premio a su fidelidad.

En 1839, regresa a Paris, y enseña en varios establecimientos religiosos. Es propuesto como miembro del *Bureau des Lon-*

gitudes (Oficina de pesas y medidas), y si bien el rey Luis Felipe no lo aprueba, lo cierto es que Cauchy trabaja para esta institución de una forma semilegal.

La proclamación de la segunda República, tras la Revolución de 1848, con Carlos Luis Napoleón como presidente, facilita el regreso de Cauchy a la actividad docente, al suprimir el juramento de fidelidad, siendo nombrado Cauchy profesor de Astronomía matemática en la Sorbona. Incluso en 1852, cuando el Presidente de la República, bajo el nombre de Napoleón III, instaura de nuevo el Imperio y restaura el juramento de fidelidad, Cauchy puede continuar su actividad, al hacer el Emperador con él una singular excepción. De este modo sigue trabajando sin cortapisas, en las instituciones estatales hasta el fin de su vida.

Además de lo expuesto sobre el análisis, Cauchy da un gran impulso a la teoría de determinantes, hace contribuciones originales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, sobre teoría de grupos, sobre álgebra, donde un trabajo suyo sobre de la imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones de grado superior al cuarto, prepara el terreno a la demostración posterior que realizaría Abel, entre 1824 y 1826...

Las obras completas de Cauchy, cuya edición se prolongó de 1882 a 1975, consta de 27 volúmenes y contiene 789 artículos y memorias, además de cinco textos dedicados a la enseñanza.

El siglo XIX produjo una gran cantidad de buenos matemáticos, pero dos destacaron por encima de todos los demás, Gauss y Cauchy, de modo que ambos pueden ser considerados como los grandes dominadores del siglo.

Litografía de Gregoire et Deneux

Helecho. Foto Cristina Torcal, 2007

SUMA 55
Junio 2007, pp. 91-92

M.ª Ángeles Ortiz: una vocación docente

Que la memoria vuestra sea
la última cosa que me quede,
y que ella sea para mí
salvación y rescate de la muerte.

A. Saura. Las horas, *1986*

Hace unos meses, el 19 de febrero de 2007, falleció en Madrid nuestra compañera M.ª Ángeles Ortiz. Y aunque en esta ocasión no hayan transcurrido 100 o 150 años, queremos dedicar esta sección al recuerdo de su persona, sabedores de que María Ángeles era muy cercana a muchos lectores de SUMA, que su trayectoria, tanto personal como profesional, ha estado entrelazada con la historia de la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país en los últimos treinta años.

M.ª Ángeles nació en el Madrid de la década de los cincuenta y, quizá por eso, su carácter muestra y amplifica positivamente los mejores rasgos de ese Madrid que ella adoraba y que no dejaba de pasear y disfrutar: abierta, optimista, alegre, sonriente, algo pícara, risueñamente irónica, amante de la vida, de las personas y de la calle, sociable, acogedora, multicultural...

Tras estudiar bachillerato en una filial del instituto *Lope de Vega*, elige estudiar Matemáticas porque *se le daban bien y sacaba buenas notas.* Licenciada en Matemáticas por la Universidad Complutense en 1974, estudia también allí los cursos de doctorado. Sus intereses e inquietudes se dirigían fundamentalmente a la docencia desde la época de estudiante de bachillerato –echando una mano a los compañeros y amigos menos preparados para las matemáticas.

Su vocación docente la llevó a buscar en las matemáticas un sentido humano y social. Durante la etapa universitaria empieza a preocuparse por buscar recursos que le permita aprender y aportar algo en el campo de la enseñanza. Buscaba personas que la relacionasen con la enseñanza de las matemáticas y se *metía* por todas partes con el fin de lograr aprender sobre su didáctica.

Terminada la carrera empieza su etapa formativa como futura profesora. En unos años en los que la formación inicial y permanente del profesorado de Enseñanza Media se reducía al Curso de Aptitud Pedagógica (CAP), M.ª Ángeles se inscribe en los pocos cursos de formación que entonces se ofrecen, como el organizado por el Instituto de Cultura Hispánica orientado a estudiantes latinoamericanos, en el que ella fue uno de los dos únicos españoles que asistieron.

Comienza su trabajo como profesora en el año 1974-75 en la Escuela de Formación del Profesorado de EGB *María Díaz Jiménez* de Madrid. Su afán por aprender le impulsa a estudiar la carrera de maestra que termina en 1977. Compatibiliza estos años de estudio, trabajando como profesora de matemáticas en un colegio y escribiendo temas para las oposiciones a profesores de EGB. Años después decide estudiar también Ciencias de la Educación, licenciatura que finaliza en la Universidad Complutense en el año 1982, casi coincidiendo con el nacimiento de su hija Violeta.

En 1978 obtiene la plaza de profesora de matemáticas de instituto, estudiando frecuentemente en el castizo café *Comercial.* M.ª Ángeles necesitaba la calle, el ruido, para concentrarse; era el silencio lo que la desconcertaba.

Grupo Azarquiel
hace.suma@fespm.org

Su primer destino fue el Instituto *Gabriela Mistral* de Madrid. Después siguieron otros hasta llegar al *Cardenal Cisneros*, en el que trabajaba cuando le sobrevino la enfermedad. María Ángeles la afrontó con la misma fuerza, valentía, alegría y ganas de vivir que siempre tuvo… aunque esta vez la enfermedad fue más fuerte que ella.

Como persona preocupada por la enseñanza de su materia acude a diversos foros y seminarios, contribuyendo desde el principio al naciente movimiento de renovación de la didáctica de las matemáticas. Al comienzo de la década de los 80, asistiendo a la Escuela de Verano de Acción Educativa (Madrid, 1980) participa en la gestación del Grupo Azarquiel en septiembre de ese año.


M.ª Ángeles Ortiz, en el ICME 8, Sevilla 1996

En diciembre asiste en Sevilla al primer encuentro de representantes de los grupos y sociedades de Innovación y Didáctica de las Matemáticas. Allí se decide la organización en Barcelona de las Primeras Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (I JAEM), que se celebraron en 1981. Acude ese año también al encuentro de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques en Pallanza(Italia). Inicia allí el contacto con colegas extranjeros, con los que desde entonces mantuvo profundos vínculos profesionales y personales.

En el Grupo Azarquiel encuentra el cauce para desarrollar su actividad de investigadora en enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Entre los años 1983 y 1985 trabaja con el grupo Azarquiel sobre los errores persistentes de los alumnos y su importancia en el aprendizaje. Si para todos nosotros esa investigación fue un punto de inflexión profesional, para Ángeles resultó, además, un trabajo apasionante. Estudiar los procesos mentales de los alumnos era para ella una aventura muy grata. En estos trabajos ponía en juego toda su capacidad, tan especial, para conocer a las personas observándolas, su capacidad de penetrar y entender las relaciones entre las personas, de hacerse una idea del conjunto de las situaciones, de adaptar su exposición a las capacidades e intereses de los que la escuchaban, de crear comunicación y empatía.

Sus deseos de aprender a enseñar no disminuían con los años, sino más bien al contrario, de modo que todos los temas de trabajo que nos proponíamos en el Grupo Azarquiel siempre los encontraba muy interesantes y participaba en ellos con entusiasmo, animando y *tirando* siempre que era necesario. En los últimos años se dedicó a trabajar sobre la enseñanza de la Medida y el Álgebra.

Su ánimo e interés se matuvieron vivos durante las tres décadas de ejercicio de la profesión. Con la sólida preparación que supo forjarse y con la madurez y experiencia que dan los años dedicados a estudiar y a ejercer la profesión, M.ª Ángeles ha sido protagonista de la Enseñanza de las Matemáticas en nuestro país en estos años.

Asistente habitual a las JAEM, desde aquellas primeras del 1981 hasta las últimas en Albacete, en 2005, era fácil verla com o ponente en muchos curos y congresos regionales, recorriendo Centros de Profesores de casi toda España. También se la podía ver en las reuniones de la CIEAEM [por ejemplo, Pallanza, 1981; Southampton, 1986; Bruselas, 1989] y en varios ICME [Budapest, 1988; Sevilla, 1996].

Participó activamente en la puesta en marcha de la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*, constituida en el año 1991.

En 1988 participó en el primer curso de Formador de Formadores de Matemáticas, en Valencia. Sus compañeros en ese curso, provinientes de toda España, guardarán siempre un grato recuerdo de su trabajo y su persona.

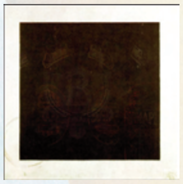
En agosto de 2003 colabora con la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) impartiendo en Bolivia unos cursos de formación de profesores. A raíz de este viaje escribía a Luis Balbuena:

> (...) Los cursos de Bolivia han sido un éxito si se mide por el interés y dedicación de los asistentes y también por lo que yo he disfrutado dándolos. En cuanto a eficacia espero que también pero eso es más difícil de predecir. (...) Todos te envían un saludo especial y yo te agradezco una vez más haber tenido esta oportunidad para recibir y dar afectos y contribuir un poquito a ilusionar a gente que todavía cree en estas cosas.

Y porque fue capaz de ilusionarnos deseamos desde aquí dedicarle estas líneas como homenaje de gratitud por la entrega a la docencia que fue su vida... ■

SUMA 55
Junio 2007, pp. 93-99

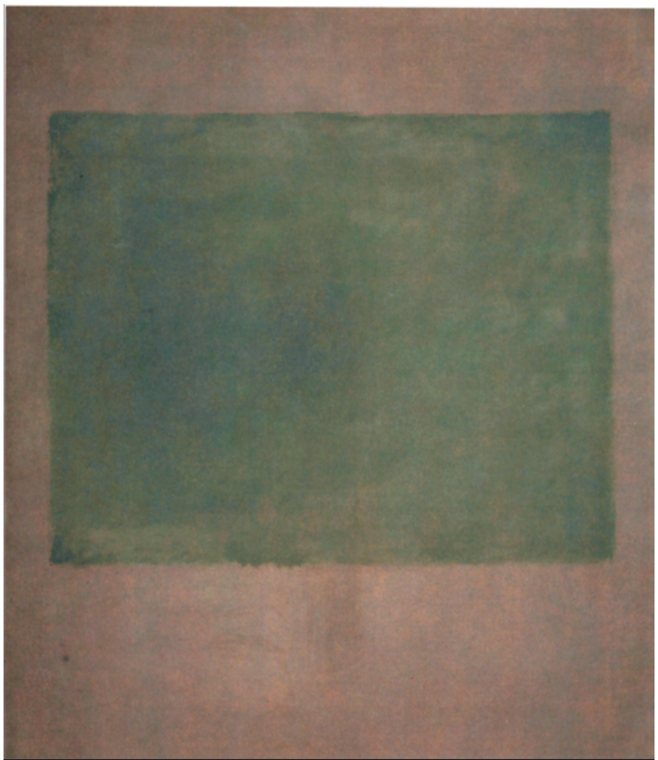
Matemáticas con algunos cuadros



En esta sección hemos intentado describir con ayuda de la representación artística, especialmente la pintura, algunos aspectos del proceso seguido a lo largo de los últimos cuatro siglos por el imaginario espacial matemático en su salto de la caja a la red. Nos gustaría cerrar nuestra colaboración ofreciendo algunos ejemplos del tipo de ejercicios que se pueden llevar a cabo en el aula de Matemáticas con cuadros y el alumnado de Bachillerato.

Para facilitar el acceso, tanto a las imágenes de nuestros ejercicios como a otras que puedan servir al profesorado para elaborar los suyos propios, todos los lienzos que utilizaremos forman parte del recorrido que nos propone Javier Navarro, arquitecto y profesor de la Escuela de Bellas Artes de la Universidad Complutense de Madrid, en su libro *La representación del espacio en las colecciones del Museo Thyssen-Bornemisza*, al que se puede acceder de forma directa a través de la página *web* del Museo Thyssen-Bornemisza (EducaThyssen).

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org



Verde sobre marrón, 1961
Marc Rothko

La llave de los campos, 1936
Rene Magritte

Ejercicio 1

Estos dos cuadros se encuentran ambos en la sala 48 del Museo Thyssen-Bornemisza; uno es fruto de llevar a cabo sobre la realidad física un proceso de abstracción análogo al proceso de abstracción matemático –esto es, abstraer de un objeto los aspectos esenciales de ese objeto que, bajo el punto de vista que se esté considerando, lo caracterizan y distinguen de los demás objetos, dejando de lado los demás–, el otro es fruto de abstraerse de la realidad, de ignorarla.

Reflexionar sobre la diferencia entre hacer abstracción a partir de la realidad y abstraerse de esa realidad, y buscar otras parejas de cuadros que ilustren la diferencia entre hacer abstracción con la realidad y abstraerse de esa realidad.

Analizar diversos cuadros previamente seleccionados por el profesorado, y clasificarlos según sean fruto de hacer abstracción con la realidad o abstraerse de ella.

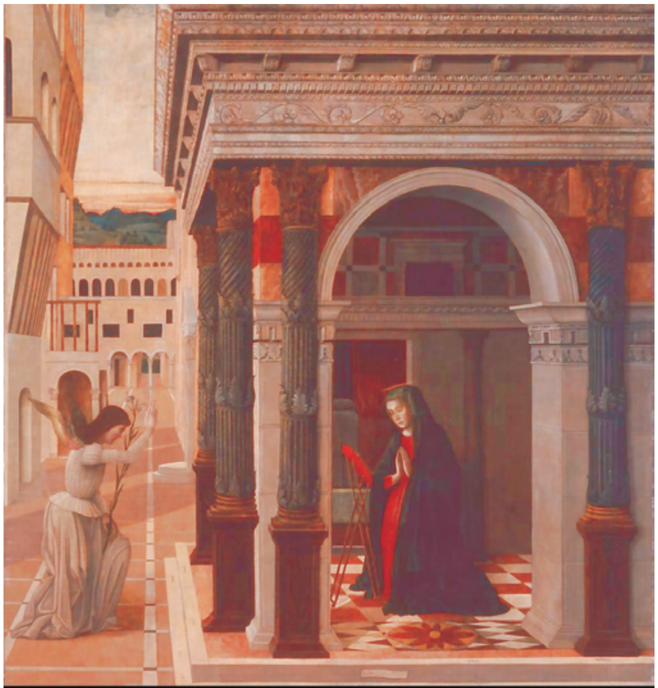
Cristo y la Samaritana, 1311
Duccio dei Buoninsegna

New York con luna, 1925
Georgia O'Keeffe

Ejercicio 2

Estos dos lienzos lo que está más lejano aparece más pequeño, y lo que está cerca más grande. En su cuadro, Duccio de Buininsegna es un observador externo que dibuja la ciudad desde fuera. En su cuadro, Georgia O'Keefe está dentro de la ciudad, y compara su propio tamaño con el de los rascacielos a su alrededor; de esta manera establece una relación de tamaño entre ella misma y los edificios.

Seis siglos separan estos dos cuadros. Buscar otros seis lienzos (uno por siglo), que describan, de una manera coherente, la evolución seguida por la mirada científica, y concretamente de las matemáticas utilizadas por los científicos para describir el mundo que nos rodea, desde el uno hasta el otro.



La Anunciación, 1465
Gentile Bellini

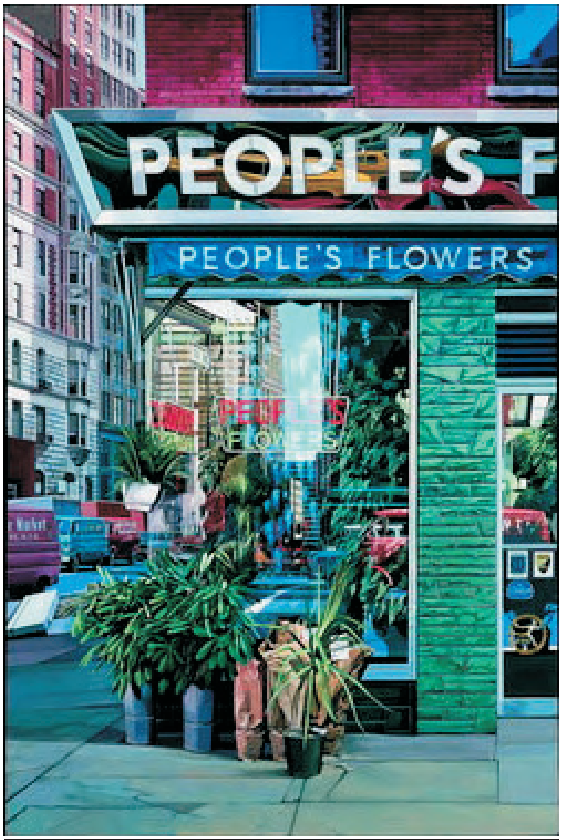
Ejercicio 3

Estos tres cuadros describen una escena similar. En todos ellos, no se notan casi las pinceladas, y los lienzos parecen fotografías tomadas desde delante del edificio. Sin embargo, tres siglos separan cada una de las representaciones.

Analizar cómo se refleja, en el paso de una a otra, la evolución seguida por el concepto de *espacio* en nuestra cultura durante el tiempo transcurrido entre ellas.

A continuación, explicar en cada lienzo aquellos aspectos del tema que la manera específica en que el cuadro está pintado permite poner de manifiesto y que sería imposible describir utilizando las herramientas utilizadas en los otros dos.

Capricho con columnata, 1765
Giovanni Antonio Canal, Canaletto



People's Flower, 1971
Richard Estes

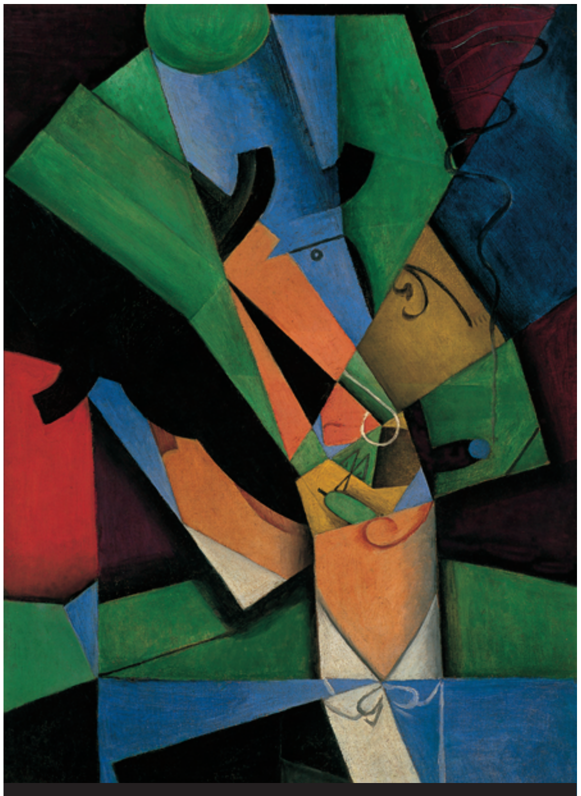
Ejercicio 4

Estos tres retratos de un hombre son muy distintos, tanto por cómo miran al retratado como por las herramientas que se utilizan para describirle. Analizar cómo el cambio en la manera de mirar al hombre que encontramos al pasar de un cuadro a otro, refleja el cambio experimentado por la manera en que la ciencia considera al ser humano a lo largo de los cuatro últimos siglos.

En cada uno de estos lienzos encontramos formas geométricas muy diversas. Describirlas, y reflexionar sobre cómo estas formas y la manera en que están utilizadas, ilustran la evolución experimentada por la geometría desde Euclides hasta hoy.

Finalmente, explicar en cada lienzo aquellos aspectos del retratado o sus costumbres que la manera específica en que el cuadro está pintado permite poner de manifiesto, y que sería imposible describir utilizando las herramientas utilizadas en los otros dos.

El dogo Francesco Vernier, 1554-1556
Tiziano



El fumador, 1913
Juan Gris

El fumador, 1913
Juan Gris

Mañana de Pascua, 1830-35
Caspar David Friedrich

Ejercicio 5

Estos dos cuadros ilustran el proceso que tuvo lugar en nuestra cultura durante el siglo XIX, de entrar en la caja y colocarse sobre la superficie de las cosas.

Analizar las semejanzas y diferencias entre ambas representaciones del espacio físico y ennumerar aquellas características que la descripción de Monet comparte con sus contemporáneos científicos y que no aparecen aún reflejadas en el lienzo de Friedrich. Buscar otros cuadros de artistas contemporáneos a estos dos pintores, que ilustren este proceso.

La cabaña en Trouville, 1881
Claude Monet

Ahora bien; no hay nada más opuesto al realismo que el impresionismo. Para éste no hay cosas, no hay res, no hay cuerpos, no es el espacio un inmenso ámbito cúbico. El mundo es una superficie de valores luminosos. Las cosas, que empiezan aquí y acaban allá, son fundidas en un portentoso crisol, y comienzan a fluir las unas dentro de los poros de las otras.

Ortega y Gasset, *Del realismo en la pintura, 1916*

Ejercicio 6

Describir lo que imaginamos, describir exactamente aquello que el ojo ve, elegir dónde y cómo miramos. Estos tres lienzos ilustran dónde se coloca el ser humano como observador antes de la revolución científica, durante la revolución científica y tras la segunda guerra mundial.

Analizar de qué manera estas tres descripciones ilustran también el papel que, en la cultura científica de estos tres momentos,ocupa el ser humano respecto al resto de las cosas que hay en el universo cotidiano que le rodea.

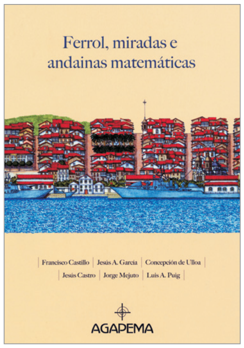
Buscar otros lienzos que reflejen e ilustren cómo ha ido evolucionando desde el medievo hasta ahora, el lugar que el ser humano considera que ocupa en el universo cotidiano que le rodea. ■

La Anunciación, 1520
Jan de Beer

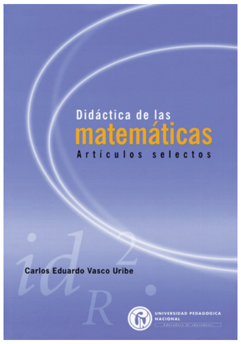
Interior con una mujer cosiendo y un niño, 1662-68
Pieter Hendricksz de Hooch

Butaca, 1967
Domenico Gnoli

Libros recibidos

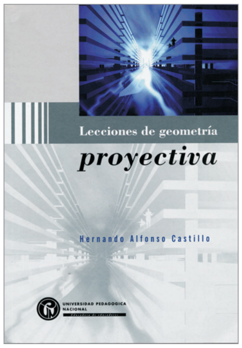


FERROL, MIRADAS E ANDAINAS MATEMÁTICAS
F. Castillo et al.
Agapema
ISBN: 84-611-6232-1
152 páginas

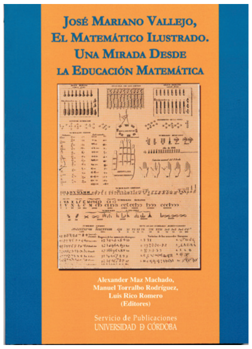


DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
ARTÍCULOS SELECTOS
Carlos Eduardo Vasco Uribe
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, 2006
ISBN: 958-8226-85-6
148 páginas

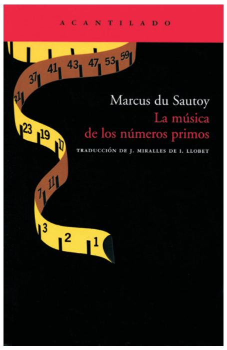
INFINITUM
CITAS MATEMÁTICAS
Juan Guirado
Eneida
Madrid, 2007
ISBN: 978-84-95427-79-3
320 páginas



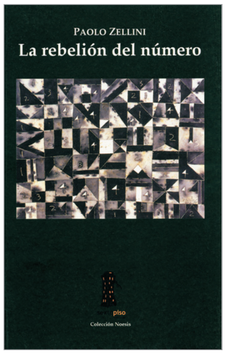
LECCIONES DE GEOMETRÍA PROYECTIVA
Hernando Alonso Castillo
J.M. Vegas Montaner
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, 2006
ISBN: 958-8226-86-4
160 páginas



JOSÉ MARIANO VALLEJO, EL MATEMÁTICO ILUSTRADO. UNA MIRADA DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
A. Maz, M. Torralbo y L. Ricos (Ed.)
Servicio de Publicaciones, Universidad Córdoba
Córdoba, 2006
ISBN: 978-84-7801-847-5
138 páginas



LA MÚSICA DE LOS NÚMEROS PRIMOS
Marcus du Sautoy
Acantilado
Barcelona, 2007
ISBN: 978-84-96489-83-7
527 páginas



LA REBELIÓN DEL NÚMERO
Paolo Zellini
Sextopiso
Madrid, 2007
ISBN: 978-84-935204-2-7
280 páginas

SUMA 55
Junio 2007, pp. 101-108

En las ciudades invisibles II

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Los futuros no realizados son sólo ramas del pasado: ramas secas.

El modelo del presente como un punto que recorre la recta del tiempo dejando el pasado a la izquierda y el futuro a la derecha, es demasiado simple. Calvino admite más de un posible futuro aunque al final sólo vivamos uno de ellos, ya sea por voluntad propia o impuesta. Los demás dejan inmediatamente de pertenecer tanto a nuestro futuro como a nuestro pasado.

Todo el mundo tiene alguna rama seca. La felicidad o infelicidad presentes endulzan o amargan su recuerdo. El sistema de Calvino es el de las bifurcaciones de las ramas de un árbol y como tal, las bifurcaciones en cada momento pueden ser múltiples. En cada instante t podemos considerar dos funciones. Una, $F(t)$, el número de futuros posibles que se nos plantean. La otra, $D(t)$, la capacidad de decisión para elegir uno de esos futuros, es decir, el número de futuros sobre los que tenemos poder para decidir.

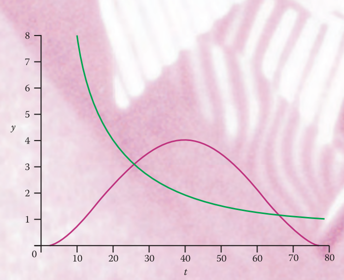
Si la esperanza de vida de una persona es de a años. Podemos suponer que nacemos con una infinidad de futuros posibles, pero morimos con uno solo ($F(0)=\infty$, $F(a)=1$). Además, los futuros posibles decrecen a lo largo de la vida ($F'(t)<0$). No es difícil hallar una función continua con estas características:

$$F(t)=\frac{a}{t}$$

Por lo que respecta a $D(t)$:

1. Nacemos y morimos con nula capacidad de decisión ($D(0)=D(a)=0$).
2. Hacia la mitad de la vida, cénit de la madurez, la capacidad de decisión es máxima ($D'(a/2)=0$, $D''(a/2)<0$).
3. Si n es el valor de ése máximo, es decir, el mayor número de futuros a considerar y sobre los que podemos decidir, entonces: $D(a/2)=n$.
4. Tanto el aumento de la capacidad de decisión tras el nacimiento como su mengua previa a la muerte comienzan y acaban en 0: $D'(0)=D'(a)=0$.

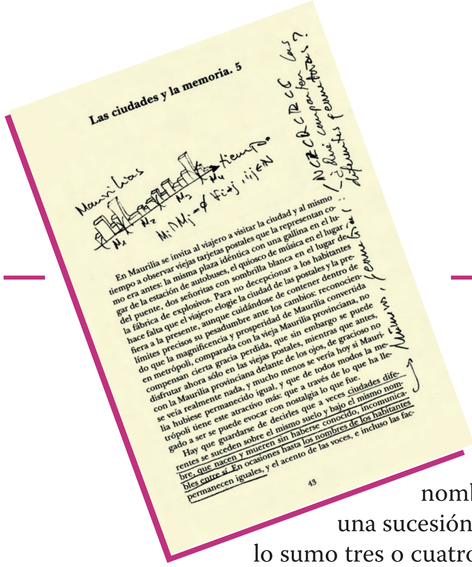
Existe un polinomio que verifica esas premisas: $D(t)=\frac{16n}{a^4}t^2(a-t)^2$



Si a=80 años y n=4, la capacidad de decisión está por encima de los futuros posibles en el intervalo [26, 67], aproximadamente la del gráfico. ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es


Las ciudades y la memoria. 5

Maurilias

$M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4$ tiempo

$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \; i,j \in N$

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

En Maurilia se invita al viajero a visitar la ciudad y al mismo tiempo a observar viejas tarjetas postales que la representan como era antes: la misma plaza idéntica con una gallina en el lugar de la estación de autobuses, el quiosco de música en el lugar del puente, dos señoritas con sombrilla blanca en el lugar de la fábrica de explosivos. Para no decepcionar a los habitantes hace falta que el viajero elogie la ciudad de las postales y la prefiera a la presente, aunque cuidándose de contener dentro de límites precisos su pesadumbre ante los cambios: reconociendo que la magnificencia y prosperidad de Maurilia convertida en metrópoli, comparada con la vieja Maurilia provinciana, no compensan cierta gracia perdida, que sin embargo se puede disfrutar ahora sólo en las viejas postales, mientras que antes, con la Maurilia provinciana delante de los ojos, de gracioso no se veía realmente nada, y mucho menos se vería hoy si Maurilia hubiese permanecido igual, y que de todos modos la metrópoli tiene este atractivo más: que a través de lo que ha llegado a ser se puede evocar con nostalgia lo que fue.

Hay que guardarse de decirles que a veces ciudades diferentes se suceden sobre el mismo suelo y bajo el mismo nombre, que nacen y mueren sin haberse conocido, incomunicables entre sí. En ocasiones hasta los nombres de los habitantes permanecen iguales, y el acento de las voces, e incluso las fac-

43

Maurilia

La Maurilia M_n del instante n es distinta de su sucesora M_{n+1}. Comparten únicamente el nombre y el lugar en el que se desarrollan formando una sucesión disjunta, cada uno de sus términos abarcando a lo sumo tres o cuatro generaciones:

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

...ciudades diferentes se suceden sobre el mismo suelo y bajo el mismo nombre, ..., incomunicables entre sí.

Una ciudad acorde con la idea de las Matemáticas que tenía Poincaré, para quien consistían en *dar el mismo nombre a cosas diferentes*. Un guante, un pañuelo, una canica, un folio, una cuerda, un calcetín, todos son homeomorfos a un punto.

Pero no es necesario ir al ámbito topològico para ver que cosas de apariencia distinta tienen fondos comunes. Bajo el mismo nombre de *número* se han sucedido a lo largo de la Historia multitud de concepciones distintas de la cantidad.

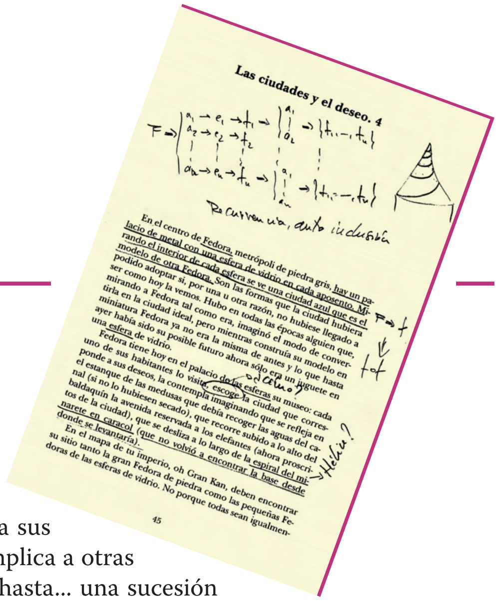
Es inútil preguntarse si éstos son mejores o peores que los antiguos, dado que no existe entre ellos ninguna relación, (...)

En eso Maurilia se distingue del mundo matemático. Cierto es que no hay ninguna relación entre las personas que tienen las ideas y que han hecho que el *número* se desarrollase, pero aunque nuestros abuelos pitagóricos no lograsen digerir los irracionales ni imaginar siquiera los complejos, y a pesar de que, generación tras generación, los niños siguen encontrando dificultades para asimilar los enteros, la relación entre ellos no puede ser más sólida:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

No es el tiempo lo que determina ese orden, sino su capacidad. Los números situados más a la derecha resuelven problemas irresolubles para los que están a su izquierda aunque éstos les sirvieron de base. ■

La incomunicación entre ***Maurilias*** *sucesivas imposibilita su progreso confundiéndolo con el cambio.*



Las ciudades y el deseo. 4

Recurrencia, auto inclusión

En el centro de Fedora, metrópoli de piedra gris, hay un palacio de metal con una esfera de vidrio en cada aposento. Mirando el interior de cada esfera se ve una ciudad azul que es el modelo de otra Fedora. Son las formas que la ciudad hubiera podido adoptar si, por una u otra razón, no hubiese llegado a ser como hoy la vemos. Hubo en todas las épocas alguien que, mirando a Fedora tal como era, imaginó el modo de convertirla en la ciudad ideal, pero mientras construía su modelo en miniatura Fedora ya no era la misma de antes y lo que hasta ayer había sido su posible futuro ahora sólo era un juguete en una esfera de vidrio. F⇒f f⇒f

Fedora tiene hoy en el palacio de las esferas su museo: cada uno de sus habitantes lo visita, escoge la ciudad que corresponde a sus deseos, la contempla imaginando que se refleja en el estanque de las medusas que debía recoger las aguas del canal (si no lo hubiesen secado), que recorre subido a lo alto del baldaquín la avenida reservada a los elefantes (ahora proscritos de la ciudad), que se desliza a lo largo de la espiral del minarete en caracol (que no volvió a encontrar la base desde donde se levantaría). ¿cómo? Hélice?

En el mapa de tu imperio, oh Gran Kan, deben encontrar su sitio tanto la gran Fedora de piedra como las pequeñas Fedoras de las esferas de vidrio. No porque todas sean igualmen-

45

Fedora

(...), hay un palacio de metal con una esfera de vidrio en cada aposento. Mirando el interior de cada esfera se ve una ciudad azul que es el modelo de otra Fedora.

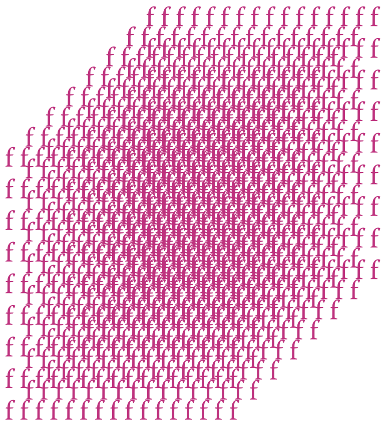
Caracterizándose Fedora por tener un palacio de las esferas cabe suponer que también las fedoras envidriadas lo poseen, lo que desata la recurrencia. La primera Fedora (F) implica sus representaciones (F⇒f), cada una de éstas implica a otras fedoras a su vez (f⇒f), y así sucesivamente, hasta... una sucesión ilimitada de fedoras:

[F⇒f] ⇒ [f⇒f] ⇒ [F⇒ f, f, f…]

Esta capacidad iguala el carácter existencial de la primera ciudad con el de las demás, por lo que absolutamente todas comparten el mismo grado de ficción o realidad, algo que de haber pasado por alto la interpretación recurrente quedaría más en entredicho. Lógico es, por tanto, que esa configuración *autoinclusiva* sólo tenga sentido considerando que todas ellas son, como dice Marco Polo, *supuestas*.

En el mapa de tu gran imperio, oh Gran Jan, deben encontrar su sitio tanto la gran Fedora de piedra como las pequeñas Fedoras de las esferas de vidrio. No porque todas sean igualmente reales, sino porque todas son sólo supuestas.

La primera Fedora no se distingue de sus reproducciones. Es tan virtual como ellas. Un mapa que registre la primera debe registrar también aquellas que poseen su naturaleza. El mapa las iguala. ■



***Fedora**: encerrada en sí misma hasta la saciedad.*

Zoe

Crear esa ciudad de diferencias no supone tanto esfuerzo como uno se imagina, ya que no es necesario visitar todos los posibles pares de ciudades para establecer las diferencias. De hecho, de las diferencias entre ciudades consecutivas se desprenden todas las demás. Si c_1, c_2, c_3, y c_4 son las ciudades visitadas, conociendo tres diferencias $c_1-c_2=a$, $c_2-c_3=b$, $c_3-c_4=c$, se obtienen las restantes:

Cada hombre lleva en su mente una ciudad hecha sólo de diferencias...

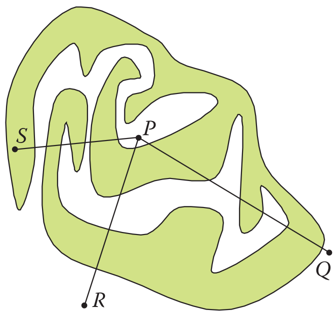
$$
\begin{array}{lll}
c_1-c_2=a & & \\
 & c_1-c_3=a+b & \\
c_2-c_3=b & & c_1-c_4=a+b+c \\
 & c_2-c_4=b+c & \\
c_3-c_4=c & &
\end{array}
$$

Las otras diferencias se hallan sumando las tres primeras ya conocidas. Lo mismo vale para más de cuatro.

La pregunta puede interpretarse de varias formas. ¿Se refiere a la existencia de tal línea? ¿Quizá a qué línea concreta de una serie de líneas? ¿O tal vez al carácter de la línea ya existente?

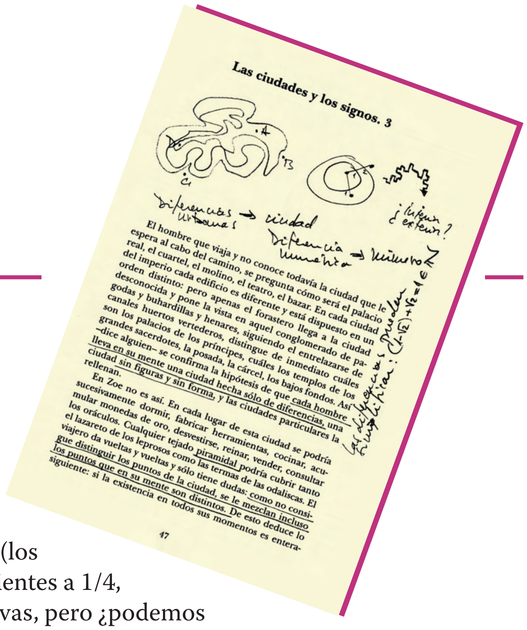
¿Qué línea separa el dentro del fuera...?

La frontera de un recinto bidimensional conexo suele ser una curva tradicional continua y cerrada. El teorema de Jordan dice que una curva semejante que no se corte a sí misma divide el plano en dos regiones disjuntas y conexas. Una es acotada –llamada interior–, y la otra no es acotada –llamada exterior. Decidir si un punto determinado pertenece a una región o a la otra depende de si es par o impar el número de cortes (intersecciones no tangenciales) de un segmento que una el punto dónde nos hallamos con un punto cualquiera de la región exterior. En la figura de la derecha el punto P se halla en el exterior de la curva porque el segmento PQ la corta un número par de veces: seis. Igual sucede con PR, que la corta en cuatro ocasiones. En cambio S está dentro porque el segmento PS corta la curva siete veces.



Pero determinar el número de intersecciones puede ser difícil. En el caso de una curva fractal las intersecciones pueden ser infinitas, como en la frontera del conjunto de Mandelbrot. Además, de esas curvas no se puede tener una imagen completa y definitiva, ya que son curvas recurrentes en las que cualquier representación, por muy afinada que sea, es sólo un estadio de los infinitos que se necesitan para completarla. No se pueden contar los cortes y debemos basarnos en su expresión analítica para ver si un punto verifica o no la descripción correspondiente.

Zoe



Las ciudades y los signos. 3

Diferencias urbanas → ciudad

Diferencia numérica → número $\mathbb{Z}$

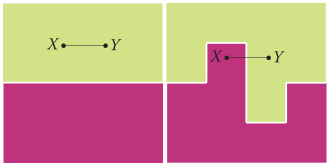
¿Interior exterior?

El hombre que viaja y no conoce todavía la ciudad que le espera al cabo del camino, se pregunta cómo será el palacio real, el cuartel, el molino, el teatro, el bazar. En cada ciudad del imperio cada edificio es diferente y está dispuesto en un orden distinto: pero apenas el forastero llega a la ciudad desconocida y pone la vista en aquel conglomerado de pagodas y buhardillas y henares, siguiendo el entrelazarse de canales huertos vertederos, distingue de inmediato cuáles son los palacios de los príncipes, cuáles los templos de los grandes sacerdotes, la posada, la cárcel, los bajos fondos. Así –dice alguien– se confirma la hipótesis de que cada hombre lleva en su mente una ciudad hecha sólo de diferencias, una ciudad sin figuras y sin forma, y las ciudades particulares la rellenan.

En Zoe no es así. En cada lugar de esta ciudad se podría sucesivamente dormir, fabricar herramientas, cocinar, acumular monedas de oro, desvestirse, reinar, vender, consultar los oráculos. Cualquier tejado piramidal podría cubrir tanto el lazareto de los leprosos como las termas de las odaliscas. El viajero da vueltas y vueltas y sólo tiene dudas: como no consigue distinguir los puntos de la ciudad, se le mezclan incluso los puntos que en su mente son distintos. De esto deduce lo siguiente: si la existencia en todos sus momentos es entera-

Las diferencias se pueden simplificar: $(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1\in\mathbb{Z}$

47



Por ejemplo, en una orilla semejante a una versión de la curva de von Koch (véase la figura de la izquierda), podemos asegurar que los cinco puntos que dividen en cuatro partes cada segmento (los extremos 0 y 1, y los interiores correspondientes a 1/4, 2/4 y 3/4) estarán en todas las orillas sucesivas, pero ¿podemos asegurar que los puntos X e Y que al principio flotan en el agua estarán al final de la iteración en la orilla? Sólo podemos saberlo si conocemos su posición exacta, sus coordenadas, y averiguar si acabarán siendo capturados por el proceso recursivo que traza la curva.

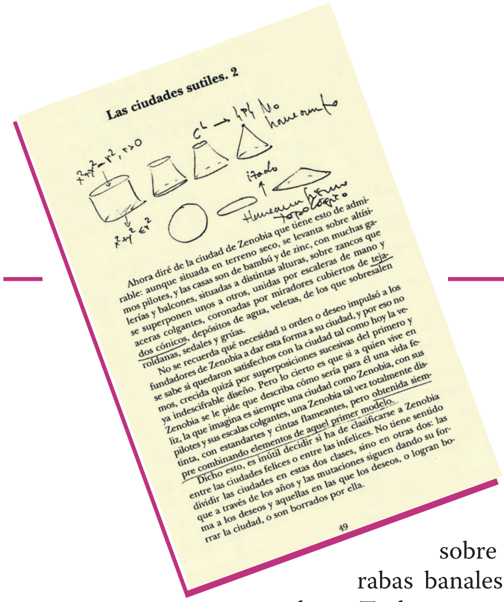
¿Cuál es la línea que separa el dentro del fuera?

La otra dificultad no está en la topología de la curva, sino en saber cuál de una serie de líneas es la que separa el dentro del fuera, como en la foto del margen.

¿Qué línea separa el dentro del fuera, el estruendo de las ruedas del aullido de los lobos?

Calvino acaba por aclararnos las dudas. Los carros y su ruido pertenecen a la ciudad, están dentro de ella. El aullido de los lobos pertenece al exterior, está fuera de Zoe. Pero entre el lugar en el que únicamente se oye aullar a los lobos y el lugar en el que sólo se escuchan los carros hay una franja en la que ambos sonidos penetran nuestros oídos. ¿Estamos dentro o estamos fuera de Zoe? No hay línea divisoria, sino una franja confusa y oscilante. No siempre son los mismos lobos ni los mismos carros. Ni los mismos lugares ni las mismas horas. Un punto por el que pasaste ayer y que era exterior porque sólo oíste a los lobos, hoy es interior porque sólo escuchas el rodar de los carros. Estamos en la tercera dificultad. No existe una línea que separa el dentro del fuera, sino una zona difusa y variable de perfiles imprecisos como los de una nube o como el vaivén del oleaje en la orilla. ■

*El interior y exterior de **Zoe** están separados por una franja de límites invisibles, pero audibles.*



Las ciudades sutiles. 2

Ahora diré de la ciudad de Zenobia que tiene esto de admirable: aunque situada en terreno seco, se levanta sobre altísimos pilotes, y las casas son de bambú y de zinc, con muchas galerías y balcones, situadas a distintas alturas, sobre zancos que se superponen unos a otros, unidas por escaleras de mano y aceras colgantes, coronadas por miradores cubiertos de tejados cónicos, depósitos de agua, veletas, de los que sobresalen roldanas, sedales y grúas.

No se recuerda qué necesidad u orden o deseo impulsó a los fundadores de Zenobia a dar esta forma a su ciudad, y por eso no se sabe si quedaron satisfechos con la ciudad tal como hoy la vemos, crecida quizá por superposiciones sucesivas del primero y ya indescifrable diseño. Pero lo cierto es que si a quien vive en Zenobia se le pide que describa cómo sería para él una vida feliz, la que imagina es siempre una ciudad como Zenobia, con sus pilotes y sus escalas colgantes, una Zenobia tal vez totalmente distinta, con estandartes y cintas flameantes, pero obtenida siempre combinando elementos de aquel primer modelo.

Dicho esto, es inútil decidir si ha de clasificarse a Zenobia entre las ciudades felices o entre las infelices. No tiene sentido dividir las ciudades en estas dos clases, sino en otras dos: las que a través de los años y las mutaciones siguen dando su forma a los deseos y aquellas en las que los deseos, o logran borrar la ciudad, o son borrados por ella.

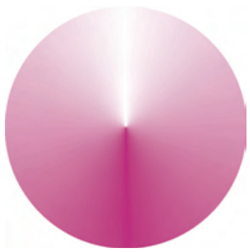
49

Zenobia

En Zenobia te sorprendes de ti mismo cuando al levantar la vista te quedas embelesado por el vértice culminante de un techo. Mirando a lo alto reflexionas sobre cuestiones que hasta ese momento considerabas banales, pero que ahora no puedes quitarte de la cabeza. Te das cuenta de que el cono hueco divide el espacio tridimensional en dos semiespacios, uno cóncavo y otro convexo, y de que el punto en el que termina certifica una paradoja. Pese a ser finito y limitado, el cono propone un punto como límite de las sucesivas circunferencias de nivel que lo conforman. Es el cierre del cono. Pero eso ocurre sin que dicho vértice sea topológicamente isomorfo a ninguno de los anillos circulares de los que es límite.

(...), coronadas por miradores de techos cónicos,(...)

También piensas en el techo cónico como límite de una serie de cilindros huecos y abiertos cuya circunferencia superior se estrecha hasta colapsar en un punto. Tampoco ahí hay equivalencia topológica. Pero un instante después caes en la cuenta de que sustituyendo la circunferencia por un círculo, es decir, cubriendo su agujero superior, el límite puntual sí es isomorfo a cada uno de los discos que se le aproximan.



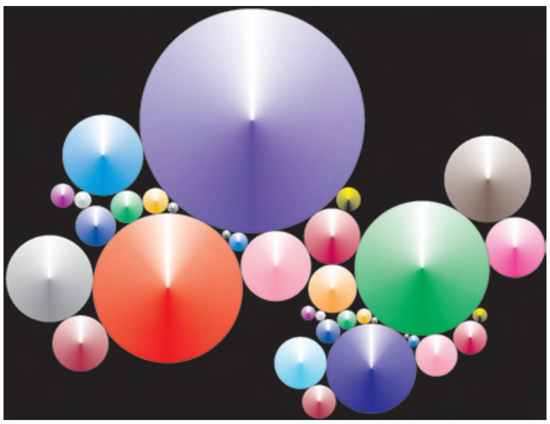
Otra opción es hacer girar un segmento inclinado alrededor del eje vertical definido por su extremo más elevado. Y todavía se te ocurre otra. Obtener el cono pellizcando el centro de un disco e izándolo hasta la altura deseada, añadiéndole una dimensión.

Este isomorfismo topológico entre el disco D de radio 1 y su cono hueco Ch de altura 1:

$$D=\{(r\cos\alpha,\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ 0)\in \mathbf{R}^3 \mid \alpha\in[0,2\pi],\ r\in[0,1]\} \quad Ch=\{(r\cos\alpha,\ r\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ 1-r)\in \mathbf{R}^3 \mid \alpha\in[0,2\pi],\ r\in[0,1]\}$$

te satisface hasta el punto de preguntarte cuál de todas esas formas de pensamiento refleja con mayor fidelidad la realidad de los techos cónicos de Zenobia.

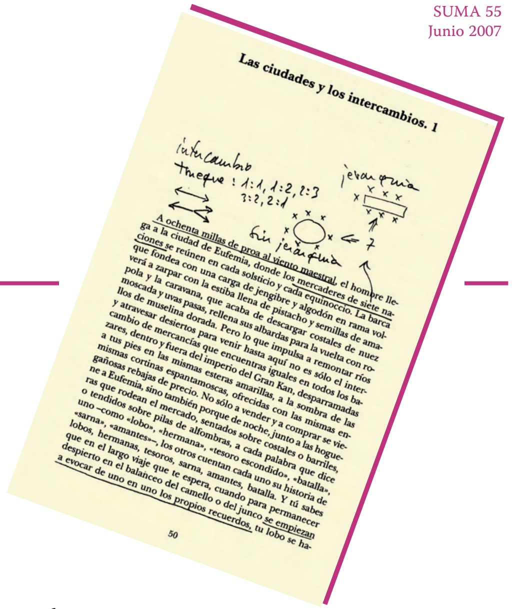
Marco Polo te da la respuesta. Si Zenobia se levanta del suelo con altos pilotes, es decir, con segmentos verticales, es izando el centro del disco como hay que interpretar el cono. ■



***Zenobia**: ciudad de isomorfismos circulares.*

(...), se levanta sobre altísimos pilotes, (...)

SUMA 55
Junio 2007



Las ciudades y los intercambios. 1

intercambio
trueque: 1:1, 1:2, 2:3
3:2, 2:1
jerarquía
sin jerarquía
7

A ochenta millas de proa al viento maestral, el hombre llega a la ciudad de Eufemia, donde los mercaderes de siete naciones se reúnen en cada solsticio y cada equinoccio. La barca que fondea con una carga de jengibre y algodón en rama volverá a zarpar con la estiba llena de pistacho y semillas de amapola y la caravana, que acaba de descargar costales de nuez moscada y uvas pasas, rellena sus albardas para la vuelta con rollos de muselina dorada. Pero lo que impulsa a remontar ríos y atravesar desiertos para venir hasta aquí no es sólo el intercambio de mercancías que encuentras iguales en todos los bazares, dentro y fuera del imperio del Gran Kan, desparramadas a tus pies en las mismas esteras amarillas, a la sombra de las mismas cortinas espantamoscas, ofrecidas con las mismas engañosas rebajas de precio. No sólo a vender y a comprar se viene a Eufemia, sino también porque de noche, junto a las hogueras que rodean el mercado, sentados sobre costales o barriles, o tendidos sobre pilas de alfombras, a cada palabra que dice uno –como «lobo», «hermana», «tesoro escondido», «batalla», «sarna», «amantes»–, los otros cuentan cada uno su historia de lobos, hermanas, tesoros, sarna, amantes, batalla. Y tú sabes que en el largo viaje que te espera, cuando para permanecer despierto en el balanceo del camello o del junco se empiezan a evocar de uno en uno los propios recuerdos, tu lobo se ha-

50

Eufemia

A ochenta millas, de proa al viento maestral, el hombre llega a la ciudad de Eufemia, donde los mercaderes de siete naciones se reúnen (...)

El viento maestral sopla del noroeste. Puesto que la proa se le opone, las componentes del sentido y dirección de la navegación son, tomando la milla como unidad, $(-80/\sqrt{2}, 80/\sqrt{2})$.

Al ser siete los mercaderes no pueden llevar solamente un producto cada uno porque el intercambio no sería posible (si nadie quiere irse de vacío). Lo lógico es que cada mercader traiga consigo varios productos que le faciliten el intercambio y el regateo.

No sólo a vender y a comprar se viene a Eufemia (...), la ciudad donde en cada solsticio y en cada equinoccio intercambiamos nuestros recuerdos.

El trueque es primordial en Eufemia, pero no lo único. La ventaja de los recuerdos sobre las mercancías es que ni pesan ni ocupan lugar alguno y que el relato que uno cuenta se lo llevan todos aquellos que lo escuchan.

A diferencia de lo que ocurre con los productos comerciales en los que el precio o el trueque se establece en base a una relación proporcional acordada, como 1:1, 1:2 o 2:3, el intercambio de relatos es gratuito y las únicas reglas a obedecer son disponer de uno, contarlo y escuchar los de los demás. La relación es la misma para todos los del corro, 1:n. Y puesto que n·(1:n)=1, el trueque es justo y se duerme en paz.

Este es ya el juego de las permutaciones, no sólo el del intercambio. Los recuerdos no se borran. ■

***Eufemia**, donde el trueque esencial destaca que* n·*(1:*n*)=1.*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Este es el esfuerzo exigible y que debe llevar a cabo el que aprende. Interpretar palabras, símbolos y objetos que articulados de forma, en órdenes distintos y en contextos diferentes generan nuevos conceptos y significados.

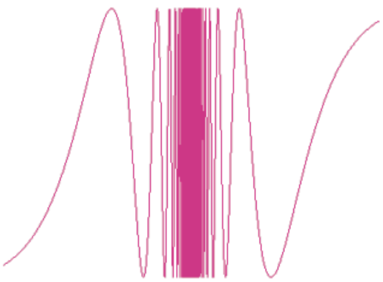
No siempre las conexiones entre un elemento y otro del relato eran evidentes para el emperador; los objetos podían querer decir cosas diferentes: (...)

Topamos con la filosofía taoísta que ve en el vacío circundante la esencia de las cosas: *Modelando el barro se hacen las vasijas, y es de su vacío del que depende la utilidad de las vasijas de barro (Zi, 1983, p. 111)**. El Tao sitúa la utilidad de algo en su complementario. Hay que prestar atención no sólo a la parte tangible de las palabras, su sonido y significado, sino a su complementario, el silencio y la reflexión.

Colmando los intervalos silenciosos de un discurso con elaboraciones propias de las ideas que transmite, lejos de perdernos, construimos conocimiento: aprendemos.

(...) lo que hacía precioso para Kublai cada hecho o noticia (...) era el espacio que quedaba en torno, un vacío no colmado de palabras. Las descripciones (...) tenían esa virtud: que se podía dar vueltas con el pensamiento entre ellas, perderse (...)

Pensar con palabras y articularlas lógicamente distingue el pensamiento y conocimiento racional del irracional. No hay gestos, objetos ni imágenes capaces de describir con suficiente claridad lo que ocurre en el punto x=0 de la curva y=sen(1/x):



Solamente las palabras y la argumentación tienen ese poder:

$$\nexists a \in R : \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = a$$

(...) es cierto que las palabras servían mejor que los objetos y los gestos para catalogar las cosas más importantes (...)

* Zi, Lao (1983): *El libro del Tao*, Edición Bilingüe, traducción, prólogo y notas de Juan Ignacio Preciado, Alfaguara, Madrid.

SUMA 55
Junio 2007, pp. 109-116

El problema de Basilea. El año de Euler: 1707-2007

Sobre la base de un diseño de la RSME

El pasado 15 de abril se cumplían 300 años del nacimiento de uno de los cuatro matemáticos más geniales de la historia, Leonhard Euler. Para mí, los otros tres, y que cada cual elija su orden, son Arquímedes, Newton y Gauss. Si la calificación la hiciésemos atendiendo a la cantidad de los trabajos de primer orden realizados por cada uno de ellos, sin duda Euler ocuparía el primer lugar. A lo largo de su extensa vida Euler produjo más de ochocientos libros y miles de artículos y trabajos. Sus obras completas *Opera Omnia* ocupan más de 80 volúmenes. Sin lugar a dudas es el matemático más prolífico de la Historia. Pero, con ser importante la cantidad de trabajos, el aprecio de los matemáticos contemporáneos y posteriores a él se debe más a la riqueza, originalidad, belleza y genial agudeza de su obra que a su volumen.

> *Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros.*
>
> Pierre Simón de Laplace

Y sin embargo, Leonhard Euler, un genio equiparable a William Shakespeare, a Johann Sebastian Bach o a Miguel

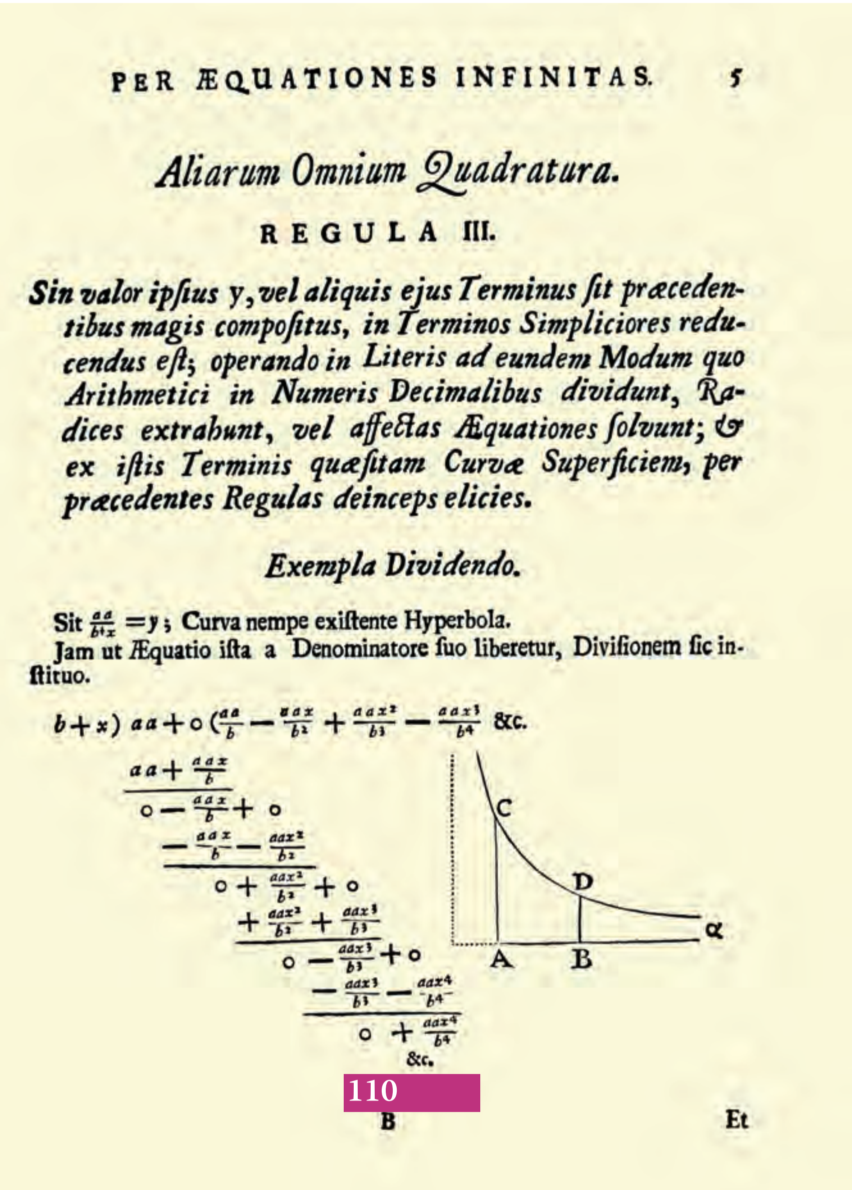
Antonio Pérez Sanz
decabezaz@fespm.org

Angel, es un gran desconocido para el gran público y lo que es peor para muchos estudiantes y profesores de matemáticas. Si los estudiantes de enseñanza secundaria y de los primeros cursos universitarios de matemáticas sospechasen cuántos de los resultados que estudian y aplican se deben al matemático suizo, su figura se agigantaría hasta ocupar el lugar que realmente le corresponde, la cima de la Historia de las Matemáticas.

Desde esta sección, y continuando con el artículo de Santiago Gutiérrez del número anterior, *Hace...*: *Euler. El maestro de todos los matemáticos*, nos queremos sumar a William Dunham, uno de los más populares divulgadores científicos de la actualidad, que desde hace años viene levantando la bandera de Euler y reivindicando su figura en un más que loable intento, además de justo, de colocarle en el pedestal que le corresponde. Como él, este año de forma especial, encarecemos a los lectores a formar clubes de seguidores entusiastas de Euler, a escribir pancartas y a popularizar la figura de uno de los matemáticos más influyente y más ingenioso que han existido.

Siglo XVII. La fiebre de las series infinitas

En 1668 Nicolás Mercator plantea en su obra *Logarithmotechnia* la posibilidad de cuadrar un arco de hipérbola mediante una serie infinita, obteniendo el desarrollo en serie del logaritmo. Newton había resuelto este problema algunos años antes y así se lo había mostrado a Barrow, pero no sólo para la hipérbola sino para cualquier curva. Para reivindicar la paternidad de sus ideas escribe el tratado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*[1], que será leído por John Collins en su nombre en una sesión en la Royal Society. Collins aprovechó la ocasión para realizar algunas copias que circularon entre un reducido grupo de personas en Londres. El *De analysi* no se publicaría hasta 1711. Algo similar a lo que ocurrió con el Cálculo, ya que aunque Newton desarrolló su sistema de cálculo diferencial y cálculo integral entre 1670 y 1671 en una extensa *obra Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, esta se publicó en 1727, después de su muerte. El cálculo de fluxiones aparece brevemente en un apéndice de su *Óptica*, *titulado Tractatus de quadratura curvarum* en 1704.


PER ÆQUATIONES INFINITAS. 5

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.

Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x}=y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x)\ aa+0\ (\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.$$

$$\begin{array}{l} aa+\frac{aax}{b} \\ \hline 0-\frac{aax}{b}+0 \\ -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\ \hline 0+\frac{aax^2}{b^2}+0 \\ +\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\ \hline 0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\ -\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\ \hline 0+\frac{aax^4}{b^4} \\ \&c. \end{array}$$

B Et

De analysi... Newton 1711

En la Regla III, el primer ejemplo resuelto por Newton de cálculo de áreas encerradas por la curva corresponden a la hipérbola

$$y = \frac{a}{b+x}$$

de la que da el desarrollo:

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} \text{ etc.}$$

El área encerrada por la curva, es según bien dice Newton:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} \text{ etc.}$$

Está claro que para los valores de a=b=1, obtenemos el desarrollo de la función

$$y = \frac{1}{1+x}$$

cuya área corresponderá al desarrollo en serie del logaritmo:

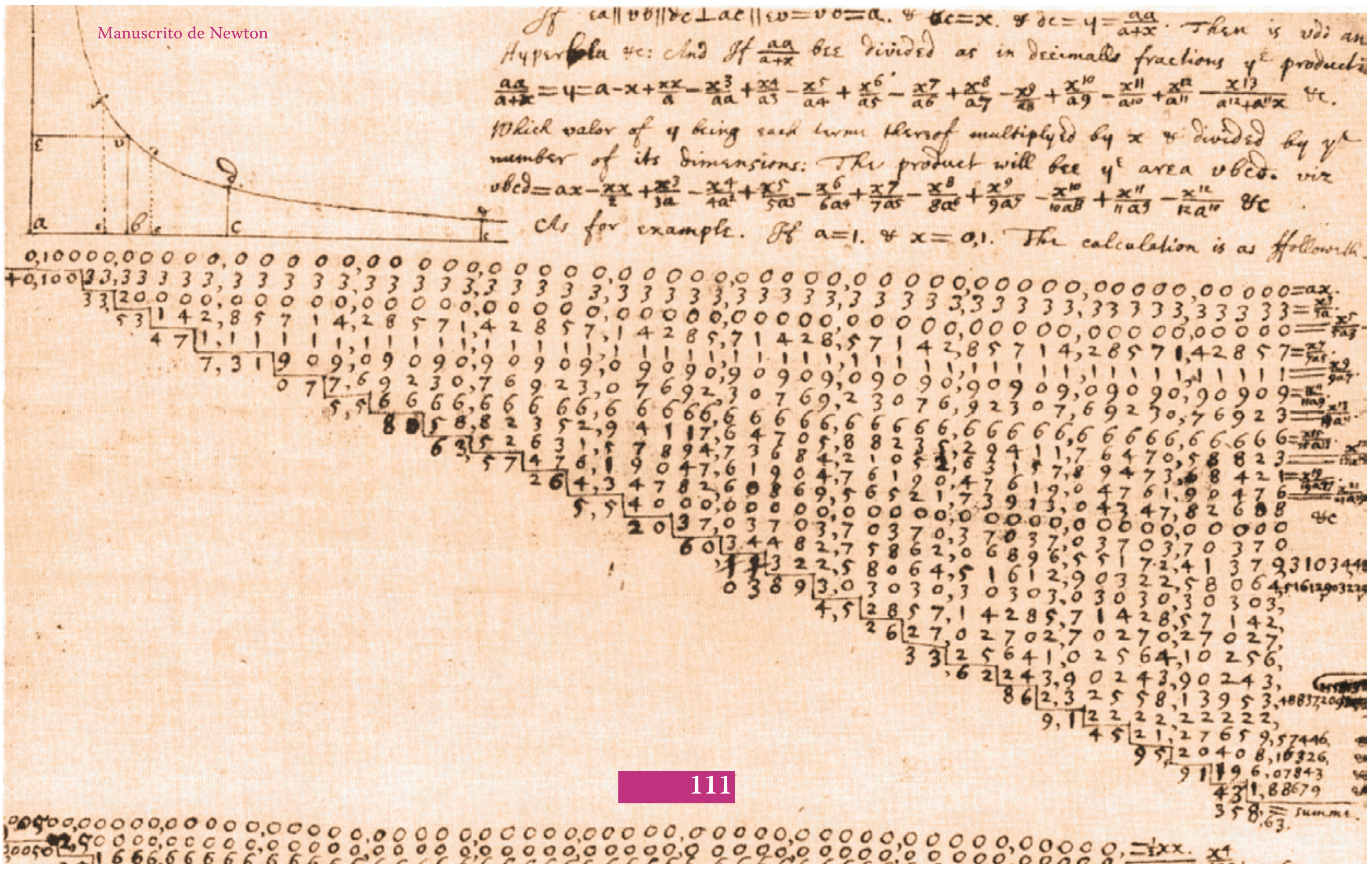
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Desarrollo obtenido por Mercator aproximando el área de la curva $\frac{1}{1+t}$ entre 0 y x, mediante n rectángulos de base $\frac{x}{n}$ y altura $\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$ con $k = 1,\ldots n-1$

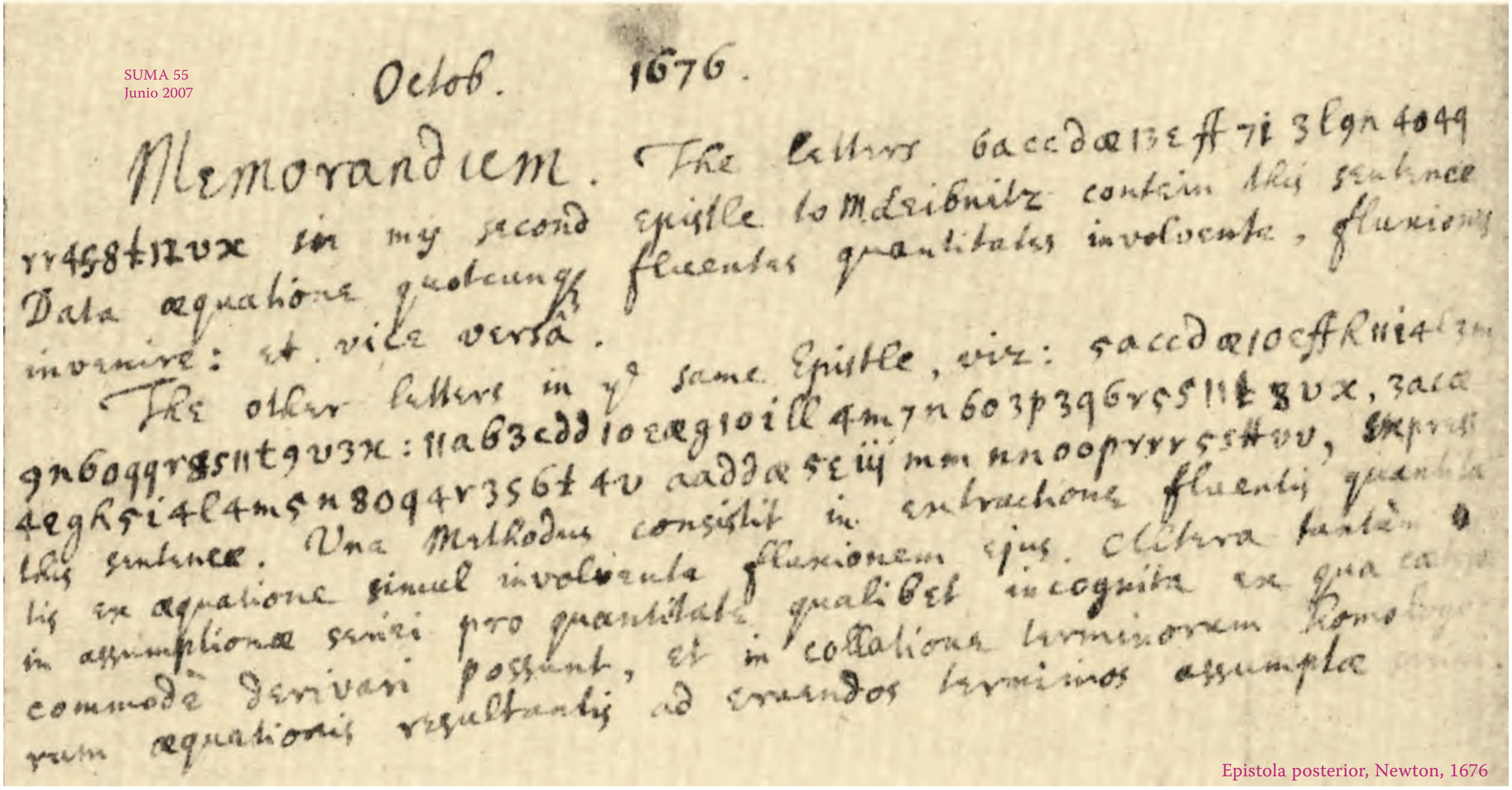
En la década 1660-70 Mercator y Newton se habían embarcado en el fascinante mundo de las series infinitas. Este último completando el proceso para la extracción de la raíz cuadrada $y = \sqrt{1+x^2}$, aplicando su famoso binomio para exponentes racionales, y para la resolución literal de ecuaciones.

De hecho, el jeroglífico que Newton escribe a Leibniz en la *Epístola posterior*, en octubre de 1676 hace una famosa referencia *encriptadada* al método de desarrollos en series infinitas. Y que en versión de Wallis[2] dice: *la asunción, en lugar de una cantidad incógnita cualquiera, de una serie a partir de la cual puédanse derivar cómodamente las demás; y en la comparación de los términos homólogos de la ecuación resultante con los términos a descubrir de la serie asumida...*

Leibniz reproducirá el método de coeficientes indeterminados en un artículo publicado en las *Acta Eruditorum* en 1693, sin citar en ningún momento la información de la *Epístola posterior*, aunque reconociendo a Mercator y a Newton la paternidad del invento. Lo que seguramente viene a demostrar que Leibniz nunca descifró el mensaje cifrado.



Manuscrito de Newton


Octob. 1676.
Memorandum. The letters [illegible] in my second Epistle to Mr Leibnitz contein this sentence Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire: et vice versa.
The other letters in ye same Epistle, viz: [illegible] this sentence. Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus. altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae [illegible]

Epistola posterior, Newton, 1676

La suma de los inversos de los números triangulares

La fiebre de Leibniz por las series infinitas le viene de su viaje a Paris en 1672. Leibniz es un joven abogado, diplomático al servicio del Elector de Mainz, en Alemania, va a quedar deslumbrado por el ambiente artístico, literario y científico que rodeaba la corte del rey Sol. Leibniz se presenta con su famosa máquina mecánica de calcular, diseñada y construida por él mismo y que tantas puertas le abrió en Paris. Allí, además de cosechar un notable éxito en los salones más prestigiosos de la Corte conocerá al prestigioso físico y matemático, Christian Huygens.

Huygens sólo acogerá a Leibniz y le pondrá en contacto con el círculo de científicos parisinos notables después de someterle a una prueba de acceso para demostrar su auténtica valía matemática. Y le plantea este reto:

> Calcular la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots$$

La respuesta de Leibniz, tras unos pocos días, fue original y reflejó una mente ingeniosa, ya que su formación matemática en ese momento era más bien pobre.

$$S = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\right]$$

Pero podemos escribir esas fracciones de esta otra forma (el ingenio de Leibniz):

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2};\quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

Sustituyendo en la serie obtuvo:

$$S = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\right]$$

O lo que es lo mismo:

$$S = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots\right] = 2 \cdot 1 = 2$$

Como se puede ver en la respuesta, la convergencia de las series no era en ese momento la principal inquietud de los matemáticos...

De cualquier manera, Leibniz pasó su examen y los medios científicos y matemáticos parisinos le abrieron sus puertas de par en par y quizás gracias a ello, pudo nacer el cálculo diferencial e integral.

El problema de Basilea. Los malditos inversos de los cuadrados...

En este ambiente matemático, a principios del siglo XVIII las series infinitas pasan a ser uno de los temas estrellas dentro del universo matemático de la época. Estudiar si convergen hacia un número o si se hacen cada vez más grandes será uno de los retos de cualquier matemático que se precie. Y encontrar el número hacia el que converge una serie determinada de cierta dificultad puede aportar reconocimiento a su descubridor.

Jakob Bernoulli ya había demostrado que la serie armónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}...$$

formada por los inversos de los números naturales, no es convergente.

Si la suma de los inversos de los números triangulares constituyeron un problema fácil para Leibniz, no ocurrió lo mismo con la suma de los inversos de los números cuadrados.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+...$$

El problema le fue planteado a Leibniz por Oldenburg, secretario de la *Royal Society* en 1673, aunque ya había sido abordado veinte años antes por Pietro Mengoli y por el mismo Wallis (que dió el valor de 1,645 como aproximación de la suma de la serie). Leibniz se va a estrellar contra el muro de esta serie. Pero no será el único.

En apariencia la solución debe ser tan simple como la de los triangulares. Y así lo pensaron Jakob y Johann Bernoulli, pero pronto se dieron cuenta de que algo iba mal.

La serie llegó a obsesionar a Jakob Bernoulli, que en su *Positiones aritmeticae de seriebus infinitus earumque summa finita* obtiene el resultado de la suma de las series de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-k^2} \quad \text{con } k\in\mathbb{N}.$$

Nuestra serie es casi de esa misma familia, basta hacer $k = 0$. Jakob consiguió demostrar que era convergente, pero el resultado de la suma se le negaba, hasta tal punto que en esa misma obra lanza públicamente este grito de socorro:

> Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos.

El genial Euler

¿Quién podría acudir a esta llamada de socorro? Sólo una persona: el genial Euler.

En 1731 Euler calculó la suma de los primeros términos hasta encontrar un resultado con más de 20 decimales.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{1000^2}=1{,}643934...$$

Para ello utilizó la integral $I=\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\ln(1-t)}{t}dt$

Que calculó de dos formas distintas.

Por una lado sustituyendo ln(1-t) por su desarrollo en serie y haciendo las integrales de cada término de la serie,

$$\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-\ldots$$

obtiene que

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^k}.$$

Por otro lado, haciendo el cambio $z=1-t$, y desarrollando en serie el cociente $\frac{1}{1-z}$, la integral queda:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\ln z}{1-z}dz=\int_1^{\frac{1}{2}}\ln z(1+z+z^2+z^3+...)dz$$

Con unas manipulaciones algebraicas *atrevidas* de estas series infinitas, Euler obtiene:

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^k}-(\ln 2)^2$$

Igualando los dos resultados de la misma integral, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^{k-1}}+(\ln 2)^2$$

La serie del segundo miembro converge rápidamente y Euler dispone de los logaritmos naturales de los primeros números naturales con decenas de cifras...

1,643934... Pero, ¿quién o qué era este número?, ¿cómo encontrar la solución del enigma?

Hasta aquí, el problema en términos de suma de una serie infinita rebelde.

1735-36

La genialidad de Euler va a consistir en relacionar esta serie con una función, la función seno, cuyo desarrollo era conocido desde los tiempos de Newton. Y el ingenio, utilizar el desarrollo del seno, no como sumas, sino como producto de infinitos factores.

Estos desarrollos de productos los usó Euler para calcular la suma de algunas series fijándose en la relación entre los coeficientes de las potencias y las raíces del producto. Esto mismo intentará con la serie de los inversos de los cuadrados. Partiendo del desarrollo del seno:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Euler introduce la función:

$$P(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots$$

Sacando *x* factor común, en el desarrollo del seno.

Utilizando el hecho de que los ceros de la función *P(x)* se producen para los valores en que el numerador se anula, es decir para $x = n \cdot \pi$ donde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

Factoriza

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \ldots$$

Compara los términos de segundo grado en ambas expresiones:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots\right)$$

Y despejando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}$$

> *He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1.*
>
> Leonhard Euler

Así le comunicaba Euler su extraordinario hallazgo a Daniel Bernoulli, el hijo de Johann, en una carta fechada en 1735 o 1736 y lamentablemente perdida. En septiembre de ese mismo año, Daniel le respondía planteándole alguna duda y pidiéndole alguna aclaración sobre el proceso. El mismo Johann le comunicó en abril de 1737 alguna deficiencia, en concreto, la ausencia de una demostración de que las únicas raíces de la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

eran las de la forma

$$x = n \cdot \pi \quad \text{donde } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

Nicolás Bernoulli también le criticaría ese salto *sin red* de las relaciones de los coeficientes de un polinomio finito y sus raíces al caso de infinitos términos.

Euler es muy consciente de estas limitaciones pero su alegría es completa, pues él sólo perseguía al fantasmagórico 1,6449340668482264364... y así se lo hace saber a Johann Bernoulli en una carta de agosto de 1737, en la que reconoce que no es una verdadera demostración pero que al hacer el cálculo de la raíz cuadrada dell séxtuplo del valor calculado se obtienen las primeras cifras decimales de π.

Y ya puestos, utilizando las mismas armas, Euler va a encontrar la suma de las series de los inversos de todas las potencias pares de los números naturales.

Todos estos resultados los incorporará en 1748 al capítulo X del tomo primero de la *Introductio In analysin infinitorum*[3]. En la proposición 168 de ese capítulo, un pletórico Euler escribe una de las más llamativas páginas de la historia de las matemáticas:

> *Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general*
>
> $$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$
>
> *que, cada vez que* n *fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo* π*; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con* π*. Para que se perciba más claramente su valor, adjunto aquí varias sumas de tales series expresadas de manera más cómoda.*

IN DEFINIEND. SUMMIS SERIER. INFINIT. 131

CAP. X.

lem. Quo autem valor harum ſummarum clarius perſpiciatur, plures hujuſmodi Serierum ſummas commodiori modo expreſſas hic adjiciam.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\&c.=\frac{2^4}{1.2.3....7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\&c.=\frac{2^6}{1.2.3....9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\&c.=\frac{2^8}{1.2.3.....11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\&c.=\frac{2^{10}}{1.2.3.....13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\&c.=\frac{2^{12}}{1.2.3.....15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

Introductio in analysin infinitorum. Euler

Todo esto es sólo un pequeño botón de muestra de su manera original y atrevida de enfrentarse a problemas nuevos.

Euler consiguió una demostración *rigurosa* de este resultado utilzando el desarrollo en serie de la función *arco seno*, que *sin trampas* le permite obtener la suma de las serie de los inversos de los cuadrados de los números impares:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=$$
$$=\frac{\pi^2}{8}=\int_0^1\frac{\operatorname{arcsen} t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{(\operatorname{arcsen} 1)^2}{2}$$

Con este resultado basta hacer:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$

Es decir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Luego $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$ y despejando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Y la joya, la solución del problema de Basilea, recupera todo su esplendor. Aunque desde luego, Euler no lo hizo... *de cabeza*.

Reivindicación de Euler

La figura de Euler se hace gigantesca cuando exploramos en cualquier rama de las matemáticas. La cantidad y la importancia de sus descubrimientos nos hacen dudar a veces que puedan ser obra de una sola persona. Aunque Euler no era una persona normal, era un genio. Un genio al que muchos matemáticos actuales, haciendo caso omiso del contexto histórico y científico en el que desarrolla sus descubrimientos, critican por intuitivo y primitivo y carente del rigor necesario. Se olvidan de que, como los propios conceptos matemáticos, el concepto de rigor cambia con los tiempos.

Como dice Dunham, Leonhard Euler fue un inventor, un explorador y un artista. Con un entusiasmo inquebrantable se aventuró por zonas desconocidas; no sólo del mundo físico sino también del mundo interior. Como ocurrió con los grandes exploradores, de vez en cuando tomó el camino equivocado y se olvidó de alguna referencia importante. Sin embargo Euler se merece nuestra total admiración. Trabajando en la semioscuridad de su ceguera, y sólo con el poder de su inigualable imaginación, llegó hasta las fronteras de las matemáticas de su época y las amplió de forma increíble.

Hoy, en cualquier camino matemático que sigamos nos encontraremos tarde o temprano con él, con sus resultados: relación de Euler de los poliedros convexos, teoría de grafos, recta de Euler, constante de Euler, funciones, logaritmos, variable compleja... Y si no aparece alguno de sus resultados compartiremos con él, ignorándolo muchas veces, alguna de sus omnipresentes notaciones: *f(x)*, **e**, π, **i** ...

De hecho Euler está presente, como si de un guiño de la naturaleza se tratase, en la relación más hermosa de las matemáticas; una relación que liga de forma sutil las cinco constantes numéricas universales más populares, los números 0, 1, π, **e**, **i**.

Y que es el compendio de todo el Análisis. Una relación, por supuesto descubierta por el genial Leonhard Euler:

$$e^{\pi i}+1=0$$

Un homenaje que el Universo le hace a las Matemáticas a través de uno de sus hijos más ilustres.

Aún hoy, trescientos años después de su nacimiento, tiene plena vigencia la frase de Laplace

Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros.

Y ahora no hay pretexto, en la web **The Euler Archive** puedes encontrar muchas de sus obras:

http://www.math.dartmouth.edu/~euler/ ■

NOTAS

1 *De Analyis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias*, Isaac Newton, Ed. facsímil, SAEM Thales y RSME, Sevilla, 2003.

2 Tomo II de la *Opera* de Wallis

3 Edición facsimil y comentada de la SAEM Thales y la RSME, Sevilla 2000

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CASTRO CHACID, I. (1996): *Leonhard Euler*, Grupo Editorial Iberoaméricano, México DF.

EULER, L. (2000): *Introducción al análisis de los infinitos*, Editores A.J. Durán y F.J. Pérez. SAEM Thales, Sevilla

CONDORCET, Marqués de: *Eulogy to Mr. Euler*
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/historica/condorcet.html

DUNHAM, W. (2000): *Euler el maestro de todos los matemáticos*, Ed. Nivola, Madrid

DUNHAM, W. (1993): *Viaje a través de los genios*, Ed. Pirámide, Madrid

DURÁN, A.J. (1996): *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo,* Alianza Univ. Madrid.

FUSS, N.: *Eulogy of Leonhard Euler*
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/historica/fuss.html

NEWTON, I. (2003): *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias* Editores Editores A.J. Durán y F.J. Pérez, SAEM Thales, Sevilla.

PÉREZ SANZ, A. (2001): *Euler: Una superestrella*, Documental de la serie *Universo matemático*, RTVE.

SÁNCHEZ, C. y VALDÉS C. (2004): *De los Bernoulli a los Bourbaki*, Ed. Nivola, Madrid .

Las obras de Euler on-line: *http://www.math.dartmouth.edu/~euler/*

SUMA 55
Junio 2007, pp. 117-125

Gazapos matemáticos en el cine y en la televisión

Incluir este dibujo de Alberto Durero puede ser considerado como un gazapo de *SUMA*.

Escuchado en un autobús (viajan juntos un chico y una chica; ella, con libros bajo el brazo):

–Hoy hemos estudiado los números romanos.
–Y eso, ¿para qué sirve?
–Para muchas cosas. Fíjate, por ejemplo, en la talla de tu camiseta: XL.

Parece que cuanto trata o, como en este caso, simplemente roza las Matemáticas deja pronto en evidencia la incultura matemática de bastante gente, sea por confusión de conceptos, vicios extendidos de razonamiento o torpeza en el cálculo y expresión de cantidades. Cine y televisión no escapan a estos errores; pero su transcendencia social los amplifica y difunde, dándoles mayor arraigo en la población.

José María Sorando Muzás
decine.suma@fesmp.org

ZERO GRAVITY TOILET

PASSENGERS ARE ADVISED TO READ INSTRUCTIONS BEFORE USE

1. The toilet is of the standard zero-gravity type. Depending on requirements, System A and/or System B can be used, details of which are clearly marked in the toilet compartment. When operating System A, depress lever and a plastic dalkron eliminator will be dispensed through the slot immediately underneath. When you have fastened the adhesive lip, attach connection marked by the large “X” outlet hose. Twist the silver colored ring one inch below the connection point until you feel it lock.
2. The toilet is now ready for use. The Sonovac cleanser is activated by the small switch on the lip. When securing, twist the ring back to its initial-condition, so that the two orange line meet. Disconnect. Place the dalkron eliminator in the vacuum receptacle to the rear. Activate by pressing the blue button.
3. The controls for System B are located on the opposite wall. The red release switch places the uroliminator into position; it can be adjusted manually up or down by pressing the blue manual release button. The opening is self adjusting. To secure after use, press the green button which simultaneously activates the evaporator and returns the uroliminator to its storage position.
4. You may leave the lavatory if the green exit light is on over the door. If the red light is illuminated, one of the lavatory facilities is not properly secured. Press the “Stewardess” call button on the right of the door. She will secure all facilities from her control panel outside. When green exit light goes on you may open the door and leave. Please close the door behind you.
5. To use the Sonoshower, first undress and place all your clothes in the clothes rack. Put on the Velcro slippers located in the cabinet immediately below. Enter the shower. On the control panel to your upper right upon entering you will see a “Shower seal” button. Press to activate. A green light will then be illuminated immediately below. On the intensity knob select the desired setting. Now depress the Sonovac activation lever. Bathe normally.
6. The Sonovac will automatically go off after three minutes unless you activate the “Manual off” over-ride switch by flipping it up. When you are ready to leave, press the blue “Shower seal” release button. The door will open and you may leave. Please remove the Velcro slippers and place them in their container.
7. If the red light above this panel is on, the toilet is in use. When the green light is illuminated you may enter. However, you must carefully follow all instructions when using the facilities during coasting (Zero G) flight. Inside there are three facilities: (1) the Sonovac, (2) the Sonoshower, (3) the toilet. All three are designed to be used under weightless conditions. Please observe the sequence of operations for each individual facility.
8. Two modes for Sonowashing your face and hands are available, the “moist-towel” mode and the “Sonovac” ultrasonic cleaner mode. You may select either mode by moving the appropriate lever to the “Activate” position.
   If you choose the “moist-towel” mode, depress the indicated yellow button and withdraw item. When you have finished, discard the towel in the vacuum dispenser, holding the indicated lever in the “active” position until the green light goes on...showing that the rollers have passed the towel completely into the dispenser. If you desire an additional towel, press the yellow button and repeat the cycle.
9. If you prefer the “Sonovac” ultrasonic cleaning mode, press the indicated blue button. When the twin panels open, pull forward by rings A & B. For cleaning the hands, use in this position. Set the timer to positions 10, 20, 30 or 40...indicative of the number of seconds required. The knob to the left, just below the blue light, has three settings, low, medium or high. For normal use, the medium setting is suggested.
10. After these settings have been made, you can activate the device by switching to the “ON” position the clearly marked red switch. If during the washing operation, you wish to change the settings, place the “manual off” over-ride switch in the “OFF” position. you may now make the change and repeat the cycle.

Gazapos de situación

Si un género cinematográfico resulta especialmente proclive al error científico, es el de Ciencia Ficción. No es raro que se obvien las leyes físicas más básicas. En las seis entregas de la saga *La Guerra de las Galaxias* (*Star Wars*. George Lucas, 1977 a 2005), Luke Skywalker y el resto de personajes recorren diferentes planetas de La República moviéndose siempre en las mismas condiciones de gravedad terrestre. Más inverosímil es que tal cosa ocurra también en el interior de las naves, surcando el espacio exterior. ¿O es que la nave *El Halcón Milenario* desarrolla una fuerza de atracción sobre sus tripulantes de igual magnitud que la ejercida por la Tierra?

Stanley Kubrick sí que prestó atención a ese detalle esencial. En *2001: Odisea del espacio* (*2001: A space odissey*. 1968) los tripulantes de la nave espacial *Discovery* deben reaprender a caminar sobre guías y se muestra una prolija lista de 10 instrucciones para utilizar la toilette con gravedad cero que, según se comprueba al congelar la imagen, han sido redactadas cuidadosamente.

En el caso de las películas de *serie B* donde monstruos gigantescos recorren el mundo destruyendo todo a su paso, hay una grave objeción matemática de base; de hecho, toda una *enmienda a la totalidad* del subgénero. Los protagonistas se ven amenazados por animales semejantes a los reales, pero de grandes dimensiones. Su éxito ha propiciado sucesivos *remakes* e imitaciones. Entre ellas: el gorila gigante King Kong, con tres versiones (Merian C. Cooper y Ernest B. Schoedsack, 1933 – John Guillermin, 1976 – Peter Jackson, 2005) y sus parientes (*Konga*, *King Gorila*...); las hormigas gigantes que aterrorizan a la feliz América en *La humanidad en peligro* (*Them!* Gordon Douglas, 1954); *La invasión de las tarántulas gigantes* (*The giant spider invasión*, Hill Rebane, 1975); *El ataque de la mujer de 50 pies de altura*, en dos versiones (*Attack of the 50 ft. woman,* Nathan Juran, 1958; Christopher Guest, 1993); y *La Mosca*, con tres versiones (*The Fly*, Kart Newmann, 1958; David Cronenberg, 1986; Chris Wales, 1989). Dejamos aparte a Godzilla, cuya clasificación zoológica no está clara.

Si alguna vez encontraron esos monstruos en sus pesadillas, tranquilícense: la Geometría demuestra que no sólo no existen, sino que además no pueden existir. Y ello debido a la *Ley cuadrado-cúbica*, enunciada por Galileo Galilei en 1600: *Cuando un objeto crece sin cambiar de forma, su superficie aumenta como el cuadrado de una longitud característica del mismo (por ejemplo, su altura), en tanto que su volumen se incrementa como el cubo de dicha longitud.* Nuestros alumnos que estudian Semejanza en 2º y 3º de ESO lo saben, o deberían saberlo.

Supongamos que el *bicho* ha crecido cien veces en longitud. A la vez, lo habrá hecho diez mil veces en superficie y un millón de veces en volumen (también en peso). Pensemos en las patas. La presión por unidad de superficie se ha multiplicado por cien en el monstruo. Se quebrarían sus patas, aparte de otros contratiempos. Por eso, en la realidad, el hueso de un animal grande no es geométricamente semejante al correspondiente de un animal pequeño; es mucho más grueso, comparado con su longitud, a causa del peso que debe soportar.

El cine también ha recorrido el camino inverso, empequeñeciendo a seres humanos para quienes lo inofensivo y cotidiano pasaba a convertirse en fuente de aventuras y amenazas. Así: *El increíble hombre menguante* (*The incredible shrinking man*. Jack Arnold, 1957) lucha con su propio gato; y en la comedia *Cariño he encogido a los niños* (*Honey, I shrunk the kids.* Joe Johnston, 1989) el césped del jardín se convierte en selva. Esta última tendría su continuación en *Cariño he agrandado al niño* (*Honey, I blew up the kid.* Randal Kleiser, 1992). Por cierto, en la escena final de *El increíble hombre menguante*, tras liquidar a la araña que le amenazaba, el protagonista sólo, bajo la luna llena y sin esperanza de volver a ser quien fue, piensa (voz en off): "Yo debo tener un significado. Para Dios el cero no existe. Yo sigo existiendo". Problemas ontológicos con el cero…

Pero tampoco estos empequeñecimientos son viables, según la *Ley cuadrado-cúbica.* Mientras la superficie de esos infortunados se dividiría por el cuadrado de la razón de semejanza, el volumen lo haría por su cubo. ¿Resultado?: mucha superficie en relación a poca masa, lo cual generaría unos graves problemas metabólicos. Con tanta superficie perderían calor rápidamente y sólo una exagerada voracidad les permitiría mantener el calor corporal.

Las leyes de la proporción y la semejanza hacen que, ante un brusco cambio de tamaño, una forma que era válida en otras dimensiones pase a ser inviable. En la Naturaleza cada ser vivo tiene una forma adecuada para su tamaño, pero no para otro. Y, aún con formas diferentes, distintos tamaños ofrecen distintas prestaciones. En palabras de Galileo: "Si un caballo cayera desde una altura de 3 ó 4 pies, podría romperse los huesos, mientras que un perro no sufrirá daño alguno. Lo mismo sucede con un gato que cayera de una altura de 8 ó 10 pies; o un saltamontes desde lo alto de una torre; y una hormiga desde la Luna. La opinión general de que las estructuras grandes o pequeñas tienen la misma resistencia es evidentemente errónea". En estos casos, *el tamaño sí que importa.*

Pero no hay que ir a la fantasía pseudocientífica para encontrar en la gran pantalla gazapos "de profundidad". Los hay incluso en la recreación de hechos históricos. En *El Reino de los Cielos (Kingdom of Heaven.* Ridley Scott 2005), las catapultas de Saladino lanzan rocas ardiendo contra las murallas de Jerusalén en un ataque nocturno (fuego inútil contra la piedra, por otra parte). Las rocas llegan a las murallas en vuelo horizontal, como si de misiles autopropulsados se tratara. Nuevamente Galileo fue quien formuló la ecuación del tiro parabólico, ignorada en este caso. Además, esos proyectiles, al impactar en la muralla, ¡explotan! y vemos a guerreros lanzados por los aires por la onda expansiva. En el sitio de Jerusalén (1187) aún no había pólvora (no es conocida por los europeos hasta bien entrado el s. XIII), pero las trayectorias trazaban parábolas, como siempre.

Incluso cuando aparecen las Matemáticas de forma explícita en el Cine, no siempre se cuidan los detalles matemáticos. No es rara la presentación de fórmulas para transmitir una idea de complejidad, aunque sean carentes de sentido. Hasta una película de nombre tan matemático como es *Pi. Fe en el Caos* (*Pi. Faith in Chaos*, Darren Aronofsky, 1998) presenta en los títulos de crédito una larga expresión del número pi donde sólo son correctas las 8 primeras cifras, como desvela Alfonso Jesús Población en su completísimo libro *Las Matemáticas en el cine* (Proyecto Sur–RSME, 2006, Pág.78). Parece que los trastornos del protagonista Max Cohen se hubieran transferido a su ordenador.

Gazapos de concepto, de cálculo y de razonamiento

Específicamente matemáticos son los gazapos en que se incurre cuando hay que razonar o expresarse mediante números.

> Tienes 47 horas para escribir 10 canciones. Así que, ya sabes, 4 horas y 7 minutos para cada canción. (*Sal gorda.* Fernando Trueba 1980).

> Hay una posibilidad del 68,4% de que tenga razón. (*Tron.* Steve Lisberger, 1982).

Confusión muy usual entre posibilidad y probabilidad, como en este anuncio de prensa:

Los dos gazapos anteriores parecen involuntarios. El siguiente, es voluntario, buscando la comicidad (*Granujas de medio pelo.* Woody Allen 2000). Cuatro ladrones discuten cómo hacer el reparto del botín, contando con una chica que está ausente de la escena:

> –Que la chica cobre una parte, pero no una parte entera.
> –¿Qué tal si todos cobramos un cuarto y ella, digamos, un tercio?
> –¡Tú estás *chinao*! Entonces cobraría más que nosotros.
> –¿Cómo lo sabes?
> –Además, ¿de dónde sacas cuatro cuartos y un tercio? ¿No sabes sumar?
> –Mira, yo en quebrados no me meto, ¿vale?

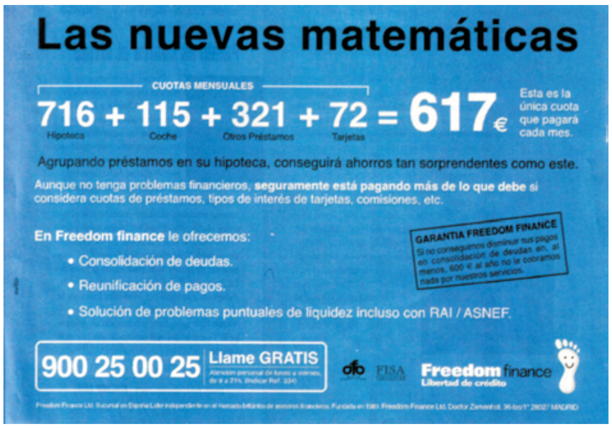
Este reparto guarda similitud con otros de la realidad y de la ficción. En diciembre de 2006 conocemos la conversación grabada a un concejal de Tres Cantos (Madrid), reclamando su parte de la comisión por votar en contra del Plan General de Ordenación Urbana local:

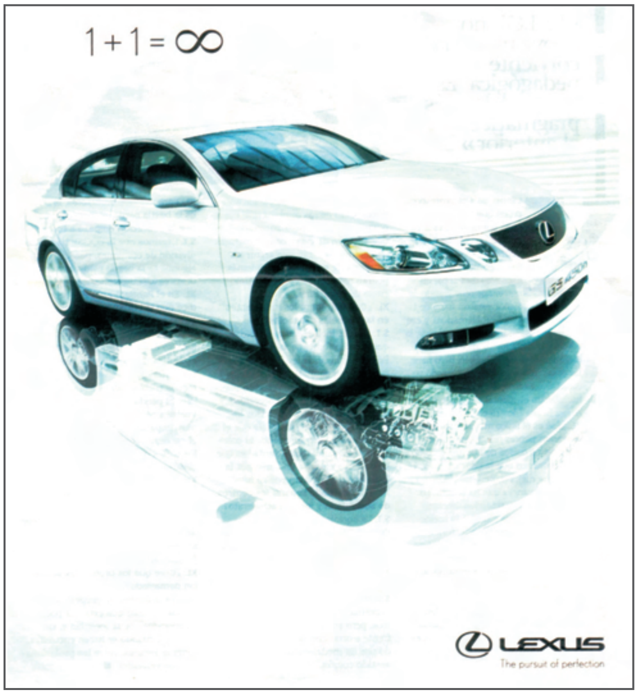
> Somos once, yo quiero mi 11%.

Tampoco salen las cuentas de Mario Vargas Llosa en *El Paraíso en la otra esquina* (Editorial Alfaguara, Capítulo V, pág. 88):

> Más grave que el número de oyentes era su composición social. Desde el proscenio, decorado con un jarroncito de flores y una pared llena de símbolos masónicos, mientras monsieur Lagrange la presentaba, Flora descubrió que tres cuartas partes de los asistentes eran patrones y sólo un tercio obreros.

En poco tiempo hemos conocido varias muestras de publicidad que recurre al gazapo matemático intencionado como recurso para llamar la atención:





En la propagación de gazapos, más influyente que el Cine es la TV; los trae a domicilio. Se encuentran en todo tipo de programas.

En los deportes:

> En el circuito de Fórmula 1 de Interlagos en Brasil es difícil correr mucho, porque la recta principal es en curva. (Luis Pérez Sala. Telecinco 21-10-2006).

En los programas del corazón:

> Nos conocemos hace muchos años, pero tú tienes que ser mucho mayor que yo, porque ya cuando era niña me llevabas 25 años. Así que, fíjate ahora... (entrevista de Lolita a El Cordobés).

Por supuesto, en los concursos, espejo de sabiduría:

> Pregunta: ¿Cuánto es el quince por ciento de cien? Empieza por Q…
> Respuesta: Cuarenta.
> (Verano 2000)

> Pregunta: ¿Cuál es al ángulo máximo con que puede abrir sus mandíbulas un hipopótamo?
> Respuesta: ¡Trescientos sesenta grados!
> (*Grand Prix*. Televisión Española 13-07-2005 –respondía el alcalde de uno de los pueblos concursantes).

En los informativos:

> Se han conocido las cifras del paro correspondientes al último mes. Se han creado diecisiete mil trescientos cuarenta y dos mil ochocientos cincuenta y tres nuevos empleos, lo cual supone que el número total de empleos ha aumentado en un cincuenta y siete mil novecientos veintitrés por ciento. El número total de parados queda así en dieciocho coma sesenta y cuatro. (José María Carrascal, Antena 3 Televisión, Mayo 1998).

> (...) los restos estaban esparcidos en un radio de un kilómetro cuadrado. (Federico Trillo, Ministro de Defensa, ante la Comisión del Congreso, 04-06-2003).

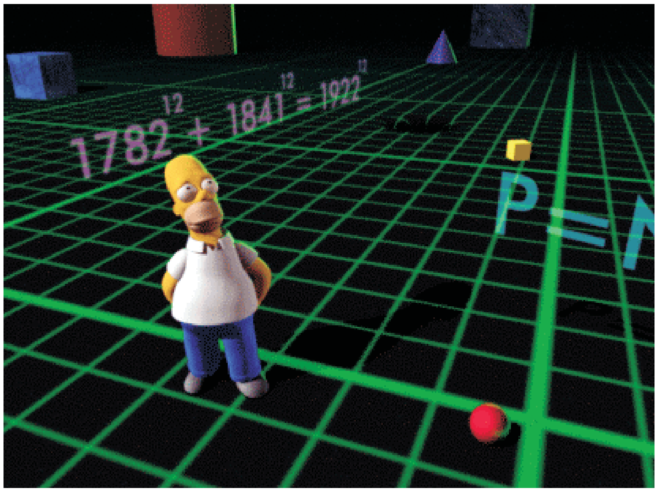
Su predecesor, Eduardo Serra, declaraba en noviembre de 1997 a propósito de uno de los últimos (y polémico) sorteos de la Mili:

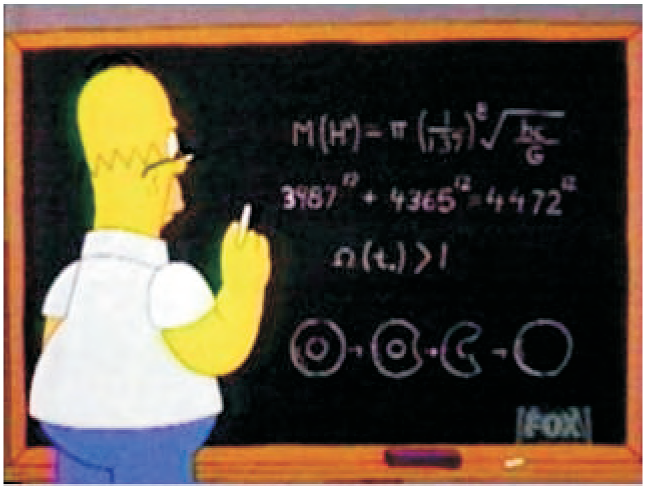
> (...) según me han dicho los técnicos del Ministerio de Defensa, es un sorteo equiproporcional.

¡Incluso en los documentales, refugio de la cultura en TV!:

> En Asia, 2 billones de personas basan su alimentación en el arroz. (*El arroz*. Canal Odisea 21-10-2005).

Habitual error de traducción; en este caso de *two billion*, en realidad dos mil millones o dos millardos.





Problemas con el infinito

En *Toy Story* (John Lasseter, 1995) Buzz Lightyear, héroe galáctico de juguete, se lanza a cada misión con el famoso grito de *¡Hasta el infinito y más allá!* La realidad suele imitar a la ficción. Personajes con relevancia social, transfieren al infinito expresiones ligadas a conceptos de precisión, orden y proximidad propias de lo finito:

> Ante estos hechos, el número de opiniones expresadas es casi infinito (locutor en un informativo de la Cadena SER. 17-9-1998).
>
> A partir de ahora, Cantabria es más infinita. (Miguel Ángel Revilla, Presidente de la Comunidad, en la inauguración del acondicionamiento para visitantes de la Cueva de *El Soplao*. Informativos 01-07-2005).
>
> Viendo lo que está pasando ahora en España, la figura del señor Aznar se multiplica por 150 millones, o casi por el infinito (Declaraciones de Mariano Rajoy, Informativos 20-10-2005).

Homer Simpson vs Fermat

La popular serie *Los Simpsons* contiene bastantes referencias matemáticas (hay una página web dedicada al tema *http://www.simpsonsmath.com*). No en vano cinco de sus guionistas son licenciados o doctores en Matemáticas, Física o Informática (algunos con doble titulación). Y no nos referimos sólo a la conocida frase *¡Multiplícate por cero!* de Bart Simpson, sino a otras alusiones, a veces veladas. Así ocurre en el episodio en que Homer Simpson pasa de su mundo plano a la tercera dimensión (se puede ver en esta dirección de Internet *http://www.youtube.com/watch?v=pDIeIpcqiVY*):

Homer pasea sobre una trama cartesiana tridimensional y al fondo a la izquierda se observa por breves instantes una igualdad que pasará desapercibida para la mayoría de los espectadores:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

De ser cierta esa igualdad, el Teorema de Fermat, que ha ocupado durante 350 años a los mejores matemáticos de la historia, sería falso. ¿Será posible que Homer Simpson refute este famosísimo teorema? Si hacemos la comprobación en la calculadora, obtenemos:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 2.541210259 \cdot 10^{39}$$

$$1922^{12} = 2.541210259 \cdot 10^{39}$$

¡Parece que Homer tenga razón! Pero, hagamos los cálculos con todas las cifras:

$$1782^{12} + 1841^{12} =$$
$$= 2.541.210.25\mathbf{8}.614.589.176.288.669.958.142.428.526.657$$

$$1922^{12} =$$
$$= 2.541.210.25\mathbf{9}.314.801.410.819.278.649.643.651.567.616$$

El redondeo de la calculadora en la 10ª cifra (en negro) se produce en el primer caso por exceso y en el segundo por defecto, dando una engañosa apariencia de igualdad.

Alguien se dirigió al artífice de la serie, Matt Groenig, aduciendo que esa igualdad era además imposible porque en su primer miembro aparecen potencias de un número par y de un número impar que siempre son, respectivamente, números a su vez par e impar. Pero en el segundo miembro aparece la potencia de un número par, que a su vez es par. Y la suma de un par y un impar no pude ser par.

Como reacción a ese comentario, en un episodio posterior vemos a Homer escribir en una pizarra:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

...donde, impar más impar da par; y se sigue contradiciendo (aparentemente) el Teorema de Fermat.

En ambos casos, se trata de gazapos intencionados, en realidad *guiños* para entendidos.

Asesoría científica

En 2005, Jonathan Farley, profesor de Harvard, ha fundado la compañía *Hollywood Math and Science Film Consulting* (http://www.hollywoodmath.com/) una asesoría para ayudar a corregir errores matemáticos en los guiones y para enfocarlos desde una cultura científica correcta, aunque *sin destruir la fantasía de los filmes.*

Esta compañía trabaja como consultora en una nueva versión cinematográfica de *Planilandia* (*Flatland)*

http://www.flatlandthemovie.com/

que está en fase de producción. El conocido actor Martin Sheen pone voz al personaje Athur Square, el cuadrado protagonista de este relato de Edwin Abott que trasciende la fábula matemática para ser una fábula social.

También han colaborado en la presentación de *Primer*

http://www.primermovie.com/

y en la serie *Numb3rs*

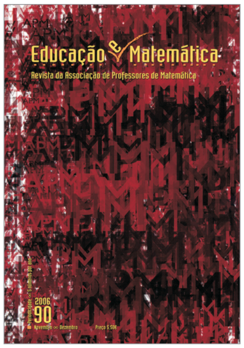
http://www.numb3rs.org/

promoviendo además la colaboración de *Numb3rs* con el National Council of Teachers of Mathematics para desarrollar actividades de aula relacionadas con los tópicos matemáticos citados en cada episodio semanal de la serie.

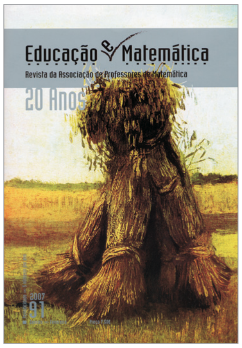
Dicha asesoría es igual o más necesaria para periodistas y, desde luego, para políticos:

> Yo soy doctor en Ciencias Políticas con estudios en economía europea. Pero desgraciadamente no soy bueno en matemáticas.
>
> Pedro Solbes. Ministro de Economía.
> *El Periodista Digita,* 28-03-07. ■

Revistas recibidas

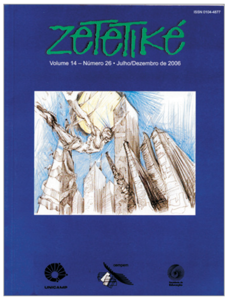


Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 90, Novembro-Dezembro 2006
ISSN: 0871-7222

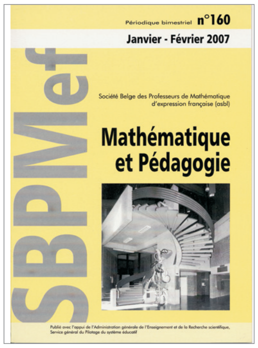


Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 91, Janeiro-Fevereiro 2007
ISSN: 0871-7222

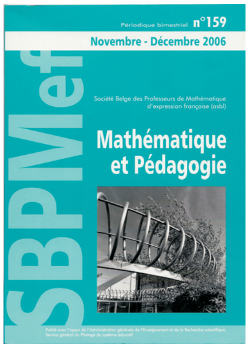
Revista Matemática Complutense
Vol. 20, Núm.1, 2007
Madrid, 2007
ISSN: 1139-1138



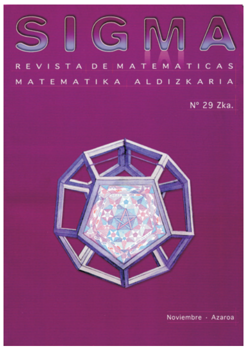
Zetetiké
Círculo de Estudio, Memória e Pesquisa em Educação Matemática
UNICAMP
Campinhas(Brazil)
Vol. 14, Núm. 26 Jul./Dez. 2006
ISSN: 0104-4877



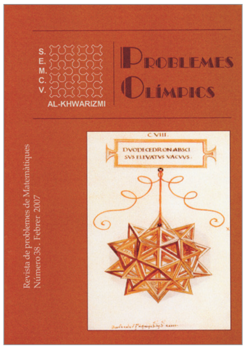
Mathématiques et Pédagogie
SBPMeF
N.º160, Janvier-Fevrier 2007
ISSN: 0773-7378



Mathématiques et Pédagogie
SBPMeF
N.º159, Novembre-Décembre 2006
ISSN: 0773-7378



Sigma
Gobierno Vasco
Departamento de Educación, Univ. e Investigación
N.º 29, Vitoria 2006
ISSN: 1131-7787



Problemes Olímpics
SEMCV Al Khwarizmi
N.º 38, Febrer 2007
Valencia
ISSN: 1578-1771

SUMA 55
Junio 2007, pp. 127-135

Biblioteca

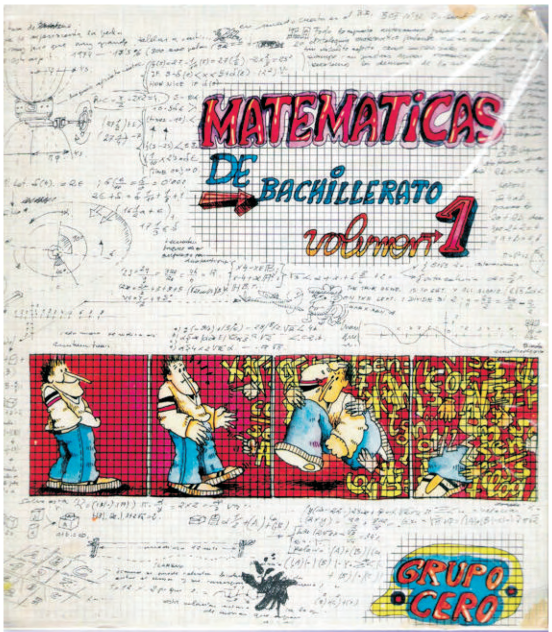
Mi biblioteca particular

José Muñoz Santonja

Destaca unos pocos libros de matemáticas (o de su enseñanza) que a lo largo de tu vida te hayan influido de forma especial y explica por qué fue, así como si crees que siguen de actualidad.

Como cualquier licenciado en matemáticas, por mis manos han pasado muchos libros de matemáticas superiores, incluso ya en COU manejaba los *Elementos* de Rey Pastor y otros *tochos* típicos de la carrera y aunque muchos de esos libros siguen teniendo su sitio en las cajas de mis armarios, muy pocos tienen un lugar en mi corazón. Desde hace muchos años me considero más profesor que matemático, ya que me interesa mucho más la didáctica y la divulgación que la matemática superior en sí misma. Por ello, no debe extrañar que en mi biblioteca particular tengan sitio de preferencia los libros sobre enseñanza de las matemáticas o su popularización, antes que otros más sesudos.

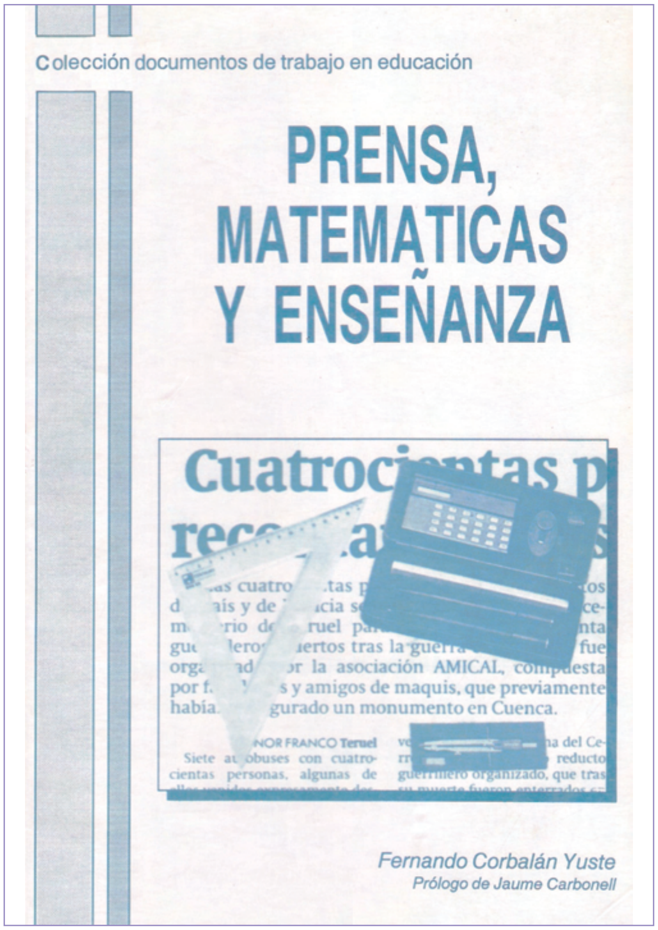
Tras acabar la carrera, y mientras daba clase de prácticas en la universidad, estaba realizando el Curso de Aptitud Pedagógica para preparar las oposiciones de instituto. Al llegar al seminario del centro donde realizaba las prácticas, me encontré encima de la mesa con dos libros que acababan de ser editados, los volúmenes 1 y 2 de las *Matemáticas de Bachillerato*

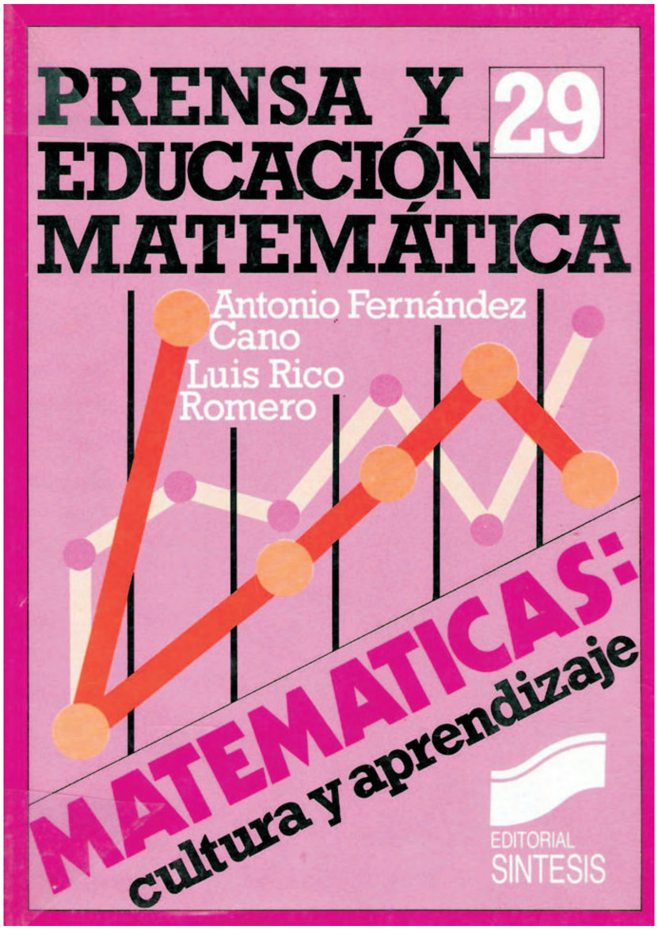


Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

del Grupo Cero de Valencia (de los que Jose M.ª Gairín hace una recensión en el número 38 de SUMA). La visión de aquellos textos significó para mí un choque brutal con respecto a los esquemas mentales que yo tenía respecto a la enseñanza de las matemáticas y que, como es habitual, reproducían el camino sufrido como estudiante. Esos libros planteaban una estructura tan diferente de lo existente hasta el momento, que hoy en día es difícil explicar la ruptura que significó su aparición. Tanto influyeron en mí que un año después ya formaba parte del Colectivo de Didáctica de las Matemáticas que se creó en Sevilla, en la línea de los grupos ceros de Valencia y Barcelona y aplicaba en mis clases de BUP el trabajo en grupo con ese tipo de materiales. No quiero extenderme más sobre ellos pues el artículo de SUMA citado desarrolla muy bien todo lo que yo podría añadir. Y aunque son libros clásicos que han sido superados, entre otros por los propios autores, todavía tengo un guiño cómplice cuando mi vista coincide con ellos en mi estantería.

Durante mis años de enseñanza han existido dos líneas de trabajo que me han atraído especialmente, y que han enfocado la elección de los libros que aquí recuerdo. En primer lugar el tema de los medios de comunicación, sobre todo el trabajo con la prensa diaria. A partir del 1992 y de forma interdisciplinar en mi centro, comencé a utilizar los periódicos como recurso en el aula y fue gracias a la lectura de dos libros, *Prensa, matemáticas y enseñanza* de Fernando Corbalán (Mira, Zaragoza, 1991) y *Prensa y educación matemática* de Antonio Fernández y Luis Rico de la editorial Síntexis (cuya colección *Matemáticas: cultura y aprendizaje* manejábamos en esa época con pasión, muchos de esos textos siguen guardando sitio de honor en mi biblioteca). Pienso que esos libros son perfectamente actuales para cualquier persona que quiera adentrarse en la utilización de la prensa en clase de matemáticas, a pesar de que las noticias que aparecen en ellos quedan un poco desfasadas después de tres lustros, sin embargo la estructura y las ideas que se sacan de ellos siguen perfectamente de actualidad. Soy de la opinión de que la Prensa debe ser usada con bastante regularidad en el aula de matemáticas. Últimamente se observa en los centros que muchos alumnos traen y consumen la prensa gratuita que se reparte por las calles. Esto es una novedad, ya que hace unos años no se podía encontrar casi ningún joven que leyera otra Prensa que no fuese la deportiva, salvo para buscar la cartelera de espectáculos.





Por otra parte, algo con lo que siempre he trabajado y disfrutado han sido los juegos y su aplicación a las matemáticas. Partiendo de muchos materiales, por ejemplo *De 12 a 16. Un proyecto de currículo de matemáticas,* del propio Grupo Cero de Valencia, o los libros del Grupo Azarquiel, comencé a incorporar los juegos a mis clases de BUP incluso antes de que empezara la Reforma de la LOGSE. Sin embargo, los libros fundamentales para mí, y a los que suelo seguir acudiendo hoy en día periódicamente, son *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato* de Fernando Corbalán (Síntesis, Madrid, 1994) y *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: Números y álgebra* de Ana García Azcarate (edición de la autora, Madrid, 1999).

Cita algún (o algunos) párrafo de ellos que nos permita apreciar su sentido y nos induzca a leerlo.

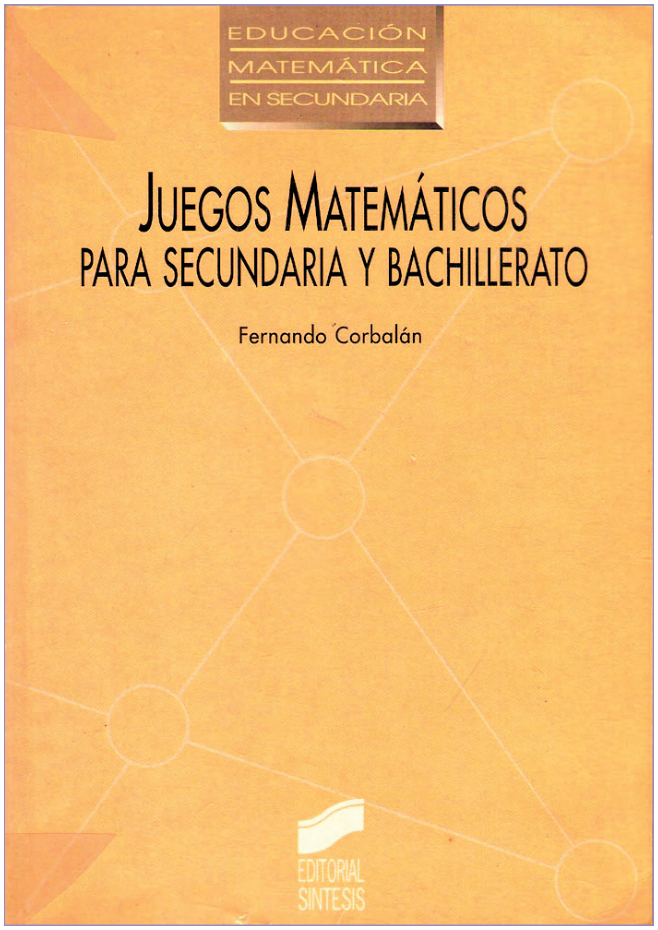
Si releemos en el artículo aparecido en el número 38 de SUMA sobre los libros del grupo Cero, el párrafo en el que se habla de las intenciones de esa publicación, creo que estaríamos de acuerdo que esos puntos siguen siendo muy actuales. En el primer capítulo del libro de Antonio Fernández y Luis Rico se hace una afirmación que muchos compartimos:

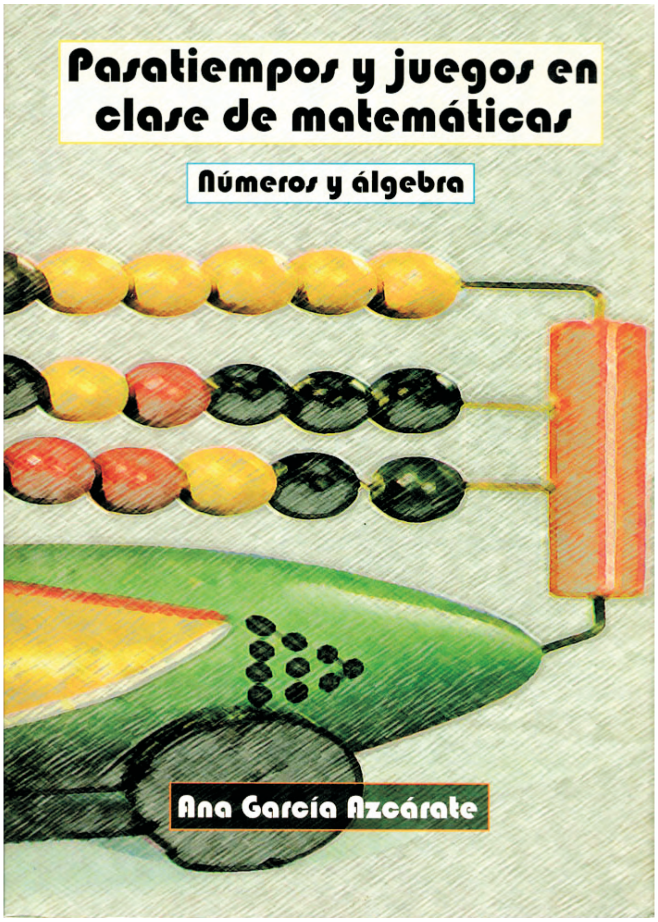
> Nuestro punto de vista es que, en nuestra sociedad actual (española y europea de comienzos del siglo XXI), las matemáticas son un ingrediente básico de cultura.
>
> Las matemáticas existen en un medio social y humano determinados. Constituyen un modo importante de relación y comunicación entre personas, que da forma y permite expresar múltiples actividades del hombre actual.

Más adelante nos dan justificaciones por las que utilizar la prensa.

> La Prensa, por sus especiales características: difusión, *disponibilidad, regularidad, ubicuidad, accesibilidad* y *sencillez*, se presta a presentarse como elemento integrador de una nueva visión en la enseñanza de las matemáticas, abierta y no académica.
> Conseguir un sujeto que utilice asiduamente la Prensa es lograr hoy día el paradigma de persona alfabetizada teórica y prácticamente. También se logra un sujeto *numeratizado*, ya que entiende y expresa información numérica; hace uso de los números en contextos variados.

Por su parte, en el libro de Fernando Corbalán sobre juegos, se da una argumentación muy clara de por qué los juegos son





un buen recurso en nuestras aulas:

> Los juegos constituyen un buen instrumento para desarrollar el idioma matemático, para hacer matemáticas, para interiorizar los procesos propios del pensar matemático. Y además, por sí mismos y más comparándolos con las actividades habituales de las clases de matemáticas, tienen un atractivo añadido; apetece dedicarse a ellos. No hay que empujar a los alumnos para que comiencen el análisis de los mismos; lo hacen voluntariamente.

Esto lo puede comprobar cualquiera que utilice el juego en sus clases, como se cometa la torpeza de repartir el juego antes de explicar lo que se pretende, es casi imposible volver a captar la atención de los alumnos para poder hacerlo.

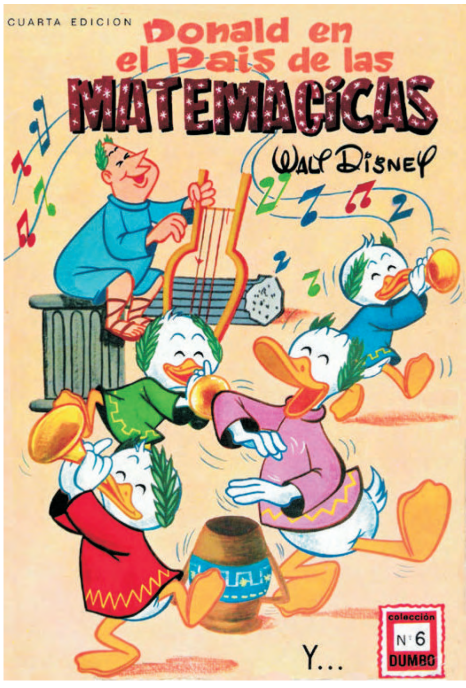
Especialmente ahora que estamos tan revolucionados con la importancia de las competencias matemáticas, su incorporación al currículo y su relación con la vida cotidiana y la resolución de problemas, la argumentación de la relación entre los juegos y este último aspecto sigue siendo de actualidad.

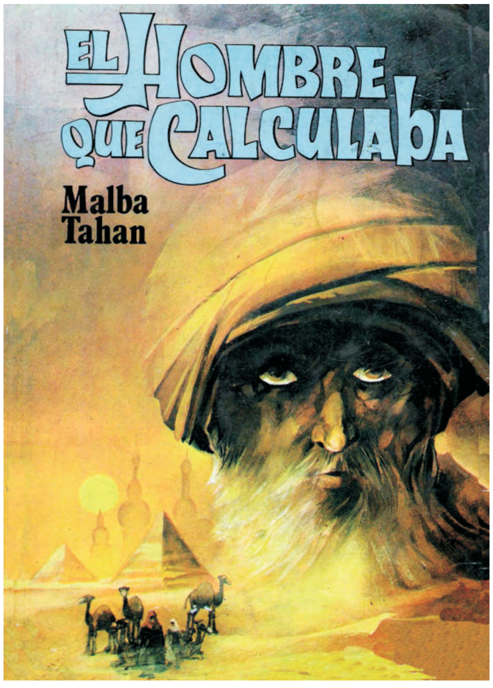
> (...) pensemos que una de las mejores formas de abordar la resolución de problemas (o más profundamente, de intentar desarrollar teorías matemáticas) es con un espíritu de desafío, de superación de dificultades, de retos. Algo muy parecido a afrontar una partida en un juego, en el que sin salirse de las reglas, en el entorno marcado por las mismas hay que procurar ganar.

En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte...), ¿has encontrado algún libro interesante en el que las matemáticas (como resultados o como inspiración) jueguen un papel importante? Indícalos y recoge algún párrafo de los mismos que nos indiquen su "espíritu".

Como ya comenté anteriormente, han existido muchos libros de divulgación de las matemáticas que también han sido muy importantes para crear mi visión de ellas. Aunque pueda pensarse que los libros que voy a decir son propiamente de matemáticas (que lo son) hay que tener en cuenta que mi acercamiento a ellos fue más como lectura que como matemáticas y por eso me quiero referir a ellos aquí.

En mi tierna infancia, tanto mi hermano como yo éramos muy aficionados a los tebeos de todo tipo, especialmente del Pato Donald y demás parafernalia de Disney. Por eso no era raro que nos regalaran algún cuento en fechas especiales. De esa manera cayó en nuestras manos un ejemplar de *Donald en el país de las matemágicas*, coincidiendo con que ese corto lo habíamos visto en el cine como complemento de una de las superproducciones Disney. Mi visión de las matemáticas como algo cercano, patente a nuestro alrededor e importante para nuestra sociedad, empezó a forjarse sin duda con ese primer encuentro y mi visión de las matemáticas siempre fue distinta a la de muchos de mis compañeros. Y esos mismos dibujos me han servido posteriormente para trabajar actividades a partir de la proyección de la película en mis clases.
Hubo varios libros que me permitieron, desde el punto de vista literario, comprobar que se podía disfrutar de las matemáticas de muy diversas formas. Por ejemplo, los libros de





Alicia o *Planilandia*. Pero un libro que me hizo entrar en las matemáticas recreativas y disfrutar a la vez de la lectura fue *El hombre que calculaba* de Malba Tahan (seudónimo del profesor de matemáticas brasileño Julio César de Mello e Souza). Es éste un libro que aconsejo a todos –especialmente a los no matemáticos– y que puede servir a los profesores como fuente para hacer comentarios de textos matemáticos en clase.

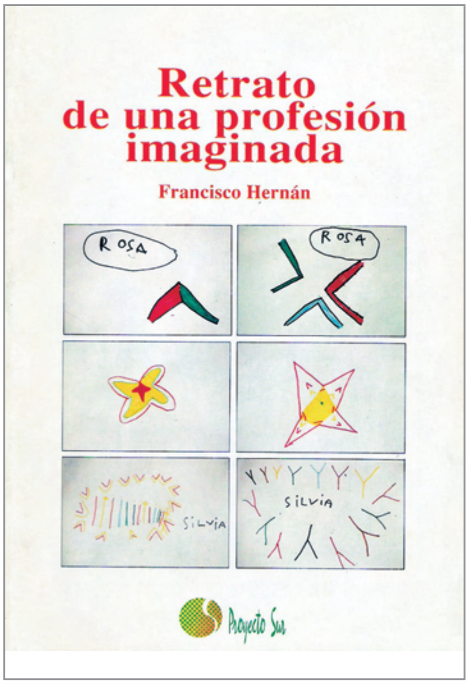
¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias vitales?

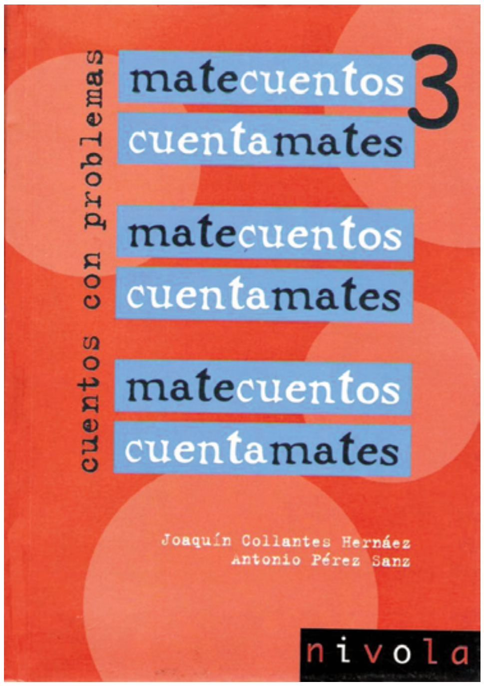
Hay un libro –que creo sigue siendo de actualidad para quien se quiera dedicar a la enseñanza: *Retrato de una profesión imaginada* de Francisco Hernan (Proyecto Sur, Granada, 1991). La lectura de este libro hace flexionar sobre muchos aspectos de la educación y las matemáticas. Aunque el libro tiene muchas frases interesantes, hay una que captó expresamente mi interés. Hay veces que encontramos en un libro una frase que nos llama la atención porque presenta una idea que nos ronda la cabeza, pero parece que al verla escrita toma más realidad. Hablando de la relación con los alumnos en clase dice .. *no puede darse la circunstancia de que nosotros nos aburramos y ellos no*. Yo creo que esa debería ser una máxima de nuestro trabajo, si nosotros no disfrutamos con él, difícilmente podemos hacer disfrutar a nuestros alumnos, en cierta forma la frase me recuerda a la despedida en muchas conferencias de nuestro querido Claudi Alsina: *Sean felices*. Puede pensarse que la frase que he elegido es una perogrullada y que es algo evidente, pero para mí no está tan claro, me basta mirar alrededor en mi claustro de profesores y veo que no es algo asumido por todos los compañeros de profesión.

Hay otra frase que, aunque no la he leído en su ubicación natural, siempre tengo presente y que me la entregó como un regalo (para un artículo que estaba preparando sobre poesía y matemáticas, SUMA n.º 22) una persona muy querida y añorada, Gonzalo Sánchez Vázquez, presidente fundador tanto de la SAEM *Thales*, como de la FESPM. La frase aparecía en una carta que enviaba Weierstrass a Sofia Kovalesky, *Un matemático no es digno de ese nombre, si no es un poco poeta*, quizás por ello siempre me ha gustado conectar las matemáticas con la literatura, la pintura, la música, el teatro, etc…

El último libro que has leído sobre matemáticas que consideras destacable y porqué.

Supongo que como pasa a muchos compañeros, se me van acumulando los libros encima de la mesa y siempre voy leyendo con retraso, por eso el libro que quiero comentar fue publicado el año pasado. He disfrutado con *Matecuentos, cuentamates 3*, de Joaquín Collantes y Antonio Pérez Sanz (Nivola, Madrid, 2006), tercero de una colección de cuentos dirigidos a los alumnos y que siguiendo una historia entretenida (a veces basada en personajes familiares como Gladiator, Charlie el chocolatero o el capitán Flint en busca del Tesoro) entremezclan acertijos y problemas para retar al lector. Destaco este libro porque llevo muchos años interesado en el tema de la



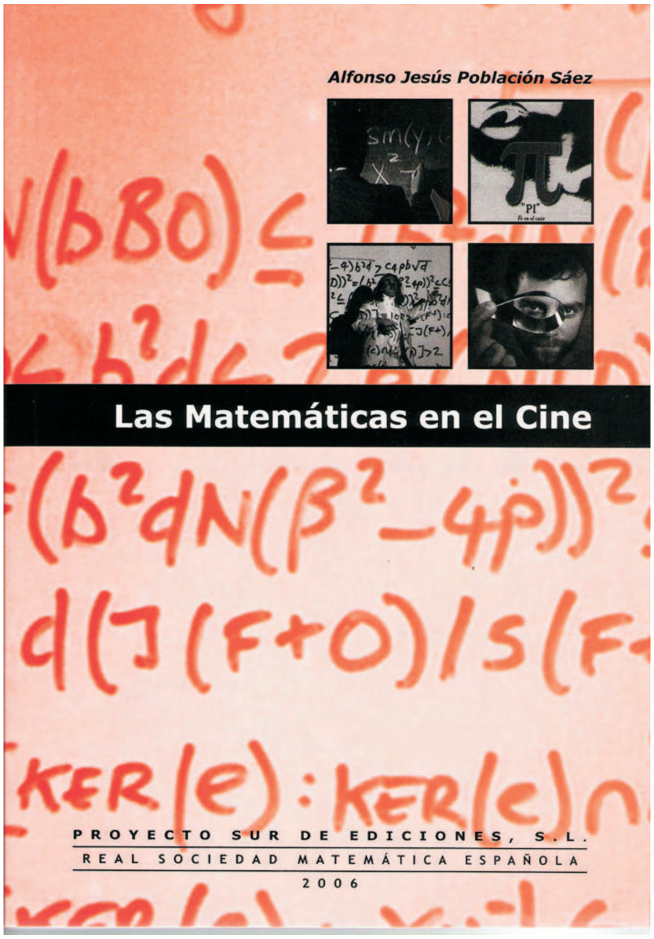


lectura y el comentario de textos matemáticos en clase, más aún en este último curso, ya que mi centro se ha incorporado a un proyecto de animación a la lectura. Es también labor de los profesores de matemáticas hacer que nuestros alumnos lean y comprendan, lo que repercute positivamente en nuestras clases. Si además podemos hacerlo con lecturas matemáticas amenas –de las que hay muchas y buenas– mejor que mejor.

Estoy leyendo actualmente con tranquilidad otro libro que no es para agotarlo de un tirón. Aborda también el tema de la divulgación y la popularización de las matemáticas. Me refiero a *Las matemáticas en el cine,* de Alfonso Jesús Población Sáez (Proyecto Sur y RSME, Granada, 2006). El propio autor (que dirige la sección de matemáticas y cine de la página *www.divulgamat.net* de la RSME) deja clara en la introducción cuál es la intención del libro y cuya idea parte de un ciclo de películas matemáticas que se realizó en Valladolid durante el año 2000.

> No fue sencillo localizar películas en las que las matemáticas fueran algo más que una mera anécdota de un par de minutos. Hasta conseguirlo fue necesario encontrar y ver muchas, algunas de las cuales contienen también aspectos interesantes en relación con el tema. Todos estos datos, a los que se han ido añadiendo otros de producciones más recientes, constituyen el capítulo más amplio, en el que se ha realizado un somero análisis acerca del tratamiento que el cine ha dispensado a las matemáticas, a los matemáticos y a los profesores en general de esta asignatura.
>
> ... el libro pretende ser también divulgador de lo que las matemáticas constituyen; por ello, cuando se ha creído conveniente, se ha añadido una breve explicación (en un lenguaje asequible para la mayor parte de los lectores) de conceptos, instituciones o personalidades mencionados en cada película, integrándolos en la rama de las matemáticas correspondiente. En algunos casos, se añaden referencias bibliográficas y/o direcciones de internet en las que el lector interesado puede ampliar la información suministrada.

Se trata de un estudio serio sobre películas con referencias matemáticas, que pueden servir para preparar las sesiones de un videoclub en el centro o incluso para hacer matemáticas viendo trozos de alguna de esas películas.



Mi último libro no matemático destacable

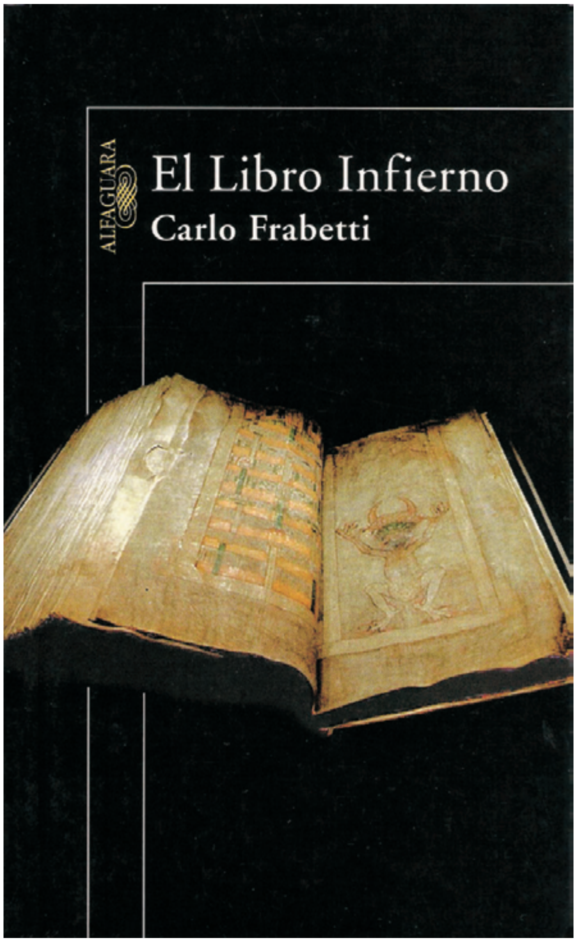
Mientras escribía estas líneas me he *bebido* un librito que me han regalado recientemente, *El libro Infierno* del escritor italiano afincado en España Carlo Frabetti (Alfaguara, Madrid, 2002). En la contraportada del libro se nos informa de lo que va:

> Como Dante, el protagonista de este libro (infierno) tiene que recorrer nueve círculos escalonados, nueve niveles infernales correspondientes a otros tantos crímenes y penas. Pero en esta Biblioteca Infierno sólo hay un demonio, el bibliotecario, y los condenados son los propios libros.

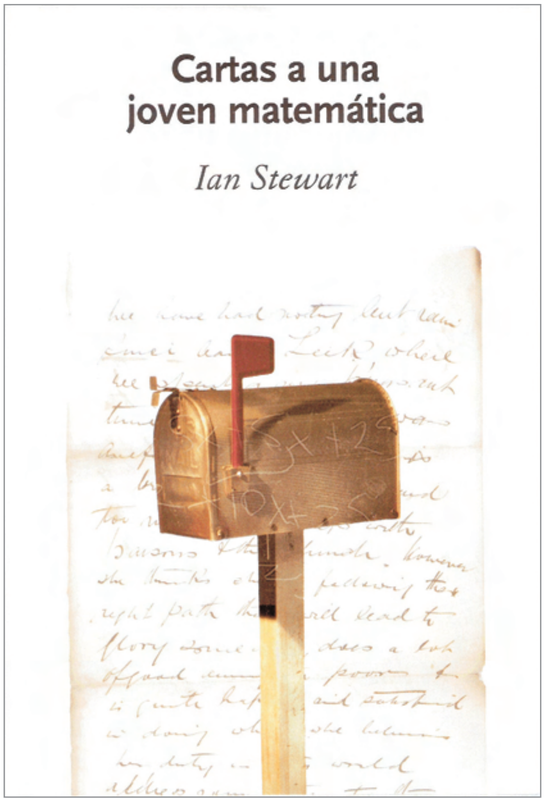
El personaje (el autor del libro) tiene que recorrer los círculos del infierno. En cada uno de ellos hay libros de un determinado tipo; en uno los plagios, en otro aquellos que han sufrido una nefasta traducción o a los que se les han añadido erratas que desvirtúan la intención del autor. También aparecen los libros de amor, o en otro lugar los violentos, etc.. El personaje debe superar distintas pruebas para poder pasar de un círculo a otro. Pruebas que a simple vista parecen imposibles (por ejemplo realizar un catálogo completo de toda la Pintura Universal) pero que gracias a un desbordante ingenio puede resolver de una forma sorprendente.

Con un lenguaje, en general muy ameno, el autor critica, con un fino humor, muchos aspectos del comportamiento humano (celos, lujuria, violencia, patriotismo, ira...).

A pesar de no ser un libro matemático, la obra no deja de estar impregnada de matemáticas por todos sus poros, no en vano el autor es matemático y ha publicado multitud de lecturas para adultos y jóvenes relacionadas con las matemáticas, como por ejemplo *El gran juego* (Premio Jaén 1998 de literatura Infantil y Juvenil) o la serie del enano Ulrico. Muchos de sus libros son apropiados e interesantes para los alumnos de educación secundaria, y se pueden realizar con ellos muchas actividades. En este libro muchas de las pruebas de las que hablamos tienen que ver con las matemáticas: adivinar varios números pensados por el bibliotecario (primero uno natural, luego un entero y subiendo…). Se pueden encontrar también muchas paradojas: una de ellas, por ejemplo, basada en la famosa del barbero que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos. No debe de extrañar, por tanto, que las referencias a Gödel y a Bertrand Russell sean frecuentes. En definitiva, es un libro con el que puede disfrutar cualquier matemático y muchas personas más. ■



Escaparate:
Cartas a una joven matemática



CARTAS A UNA JOVEN MATEMÁTICA
Ian Stewart
Crítica
ISBN: 84-8432-847-3
Barcelona, noviembre de 2006
240 pp.

Pertenece Ian Stewart a una estirpe que, aunque va arrancando poco a poco, tanto echamos de menos en nuestro país: la de los prestigiosos profesionales universitarios de las matemáticas que dedican tiempo y esfuerzos a su divulgación. Tarea que por cierto, además de fama, y suponemos dinero, le proporciona algo que tampoco estamos seguros que aquí fuera posible: el clásico 50% de docencia-50% de investigación, en su caso se he tornado 50% de divulgación--50% investigación. Puede ser una buena idea para arrancar.

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

El libro que nos ocupa, que se une a la ya larga lista del autor (traducidos todos en la misma editorial) adopta la forma epistolar, una serie de cartas cortas a Meg, una chica imaginaria que estudia secundaria y a la que le gustan las matemáticas. En cada una le responde a las posibles preguntas que a lo largo de su evolución alguien así le puede hacer a un matemático famoso. Y a la vez que lo va haciendo puede ir aportando reflexiones, eligiendo temas, opinando en controversias o describiendo situaciones relacionadas con las matemáticas, su estudio o la enseñanza en los diferentes niveles, así como la investigación con distintos estatus.

El propósito de Stewart es *actualizar algunas partes de* Apología de un matemático [El clásico libro de Hardy, publicado recientemente por Nivola], *aquellas que podrían influir* *en las decisiones de una persona joven que esté considerando la posibilidad de licenciarse en matemáticas y hacer carrera en esa disciplina*.

Lo hace de forma fácil y con aparente sencillez, dirigida de verdad a gente joven, y siguiendo todo el posible camino que va desde la secundaria, pasando luego por los estudios universitarios y continuando por la inserción en un grupo de investigación, la realización de la tesis y las dificultades de desenvolvimiento para poder tener un puesto de matemático o matemática *profesional*.

A lo largo de ese trayecto va respondiendo a preguntas importantes que alguien responsable no puede dejar de hacerse y aportando anécdotas personales que le dan una mayor proximidad al discurso. Todo eso le permite tocar los grandes temas.

La presencia social de las matemáticas: *Nuestra sociedad consume muchas matemáticas, pero todo sucede entre bastidores (...) A veces pienso que la mejor manera de cambiar la actitud de la gente hacia las matemáticas sería pegar una etiqueta roja que rezara* Matemáticas en el interior *en cualquier cosa que necesita de las matemáticas*.

La importancia de los buenos profesores: *El señor Radford [su profesor en secundaria] me abrió los ojos a lo que eran realmente las matemáticas: variadas, creativas, llenas de novedad y originales*.

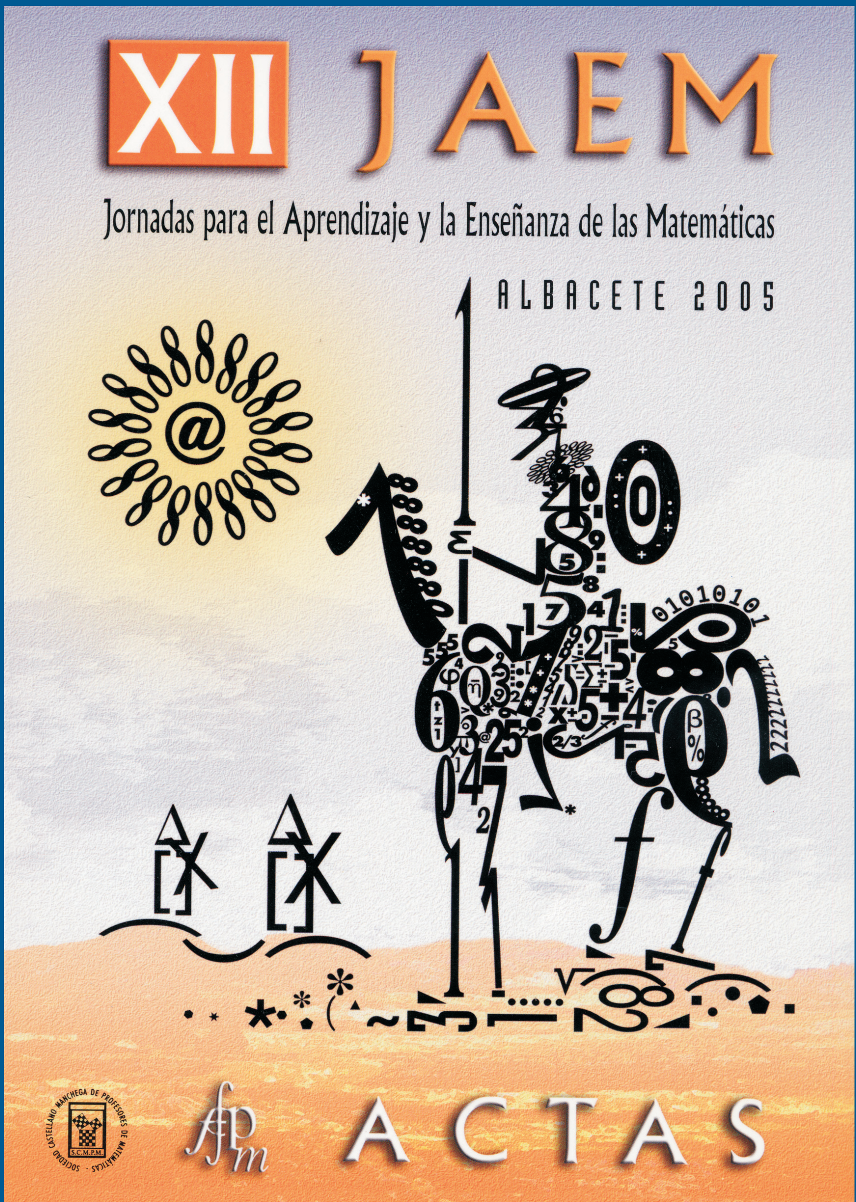
La necesidad de implicarse para saber qué son las matemáticas: *Como suele decir mi amigo David Tall: "Las matemáticas no son un deporte para espectadores"*.

Las matemáticas como una tarea permanente, frente a los que creen que todo está hecho: *Ollerenshaw (...) señala (...) en su autobiografía (...): "Cuando en la adolescencia le dije a una amiga que yo iba a investigar en matemáticas su respuesta fue: ¿Por qué hacer esto? Ya tenemos bastantes matemáticas con las que tratar, no queremos más"*.

La presencia femenina en el mundo matemático: *La idea de que las matemáticas no son una disciplina adecuada para mujeres es anticuada. El escalafón de la carrera está abierto a ambos sexos, aunque aún sigue desequilibrado en el extremo superior.*

Sobre muchos otros temas hay opiniones fundadas y buenos consejos. Como la necesidad de leer libros de divulgación matemática para todos los que estamos en la enseñanza y de que lo hagan los que están aprendiendo; tratando de responder a esa reflexión tan común fuera del ambiente, de cuál es la necesidad de los matemáticos si los ordenadores ya lo hacen todo; por dónde se mueven las relaciones entre las llamadas matemáticas *puras* y *aplicadas*; dónde buscar ideas para hacer investigación matemática así como las ventajas e inconvenientes de hacerlo de manera individual o en grupo; o haciendo una divertida y realista descripción de los escalafones de la investigación.

Un libro que se lee con facilidad –aunque son 240 páginas, el estilo es ágil y el tipo de letra grande–, que aporta ideas lúcidas sobre los grandes temas, lo que nos permite reflexionar a quienes ya llevamos tiempo pensando en estas cosas. Puede ser una buena base para tomar decisiones tanto para los estudiantes del final de secundaria que no tienen claras sus opciones futuras como para los de universidad que están empezando su carrera profesional. Y desde luego para cualquier ciudadano que detecte la importancia de las matemáticas en la sociedad y quiera conocer opiniones sobre cómo actúan y se manifiestan. ■



Servicio de Publicaciones de la FESPM

Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

Actas XII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas Albacete 2005

Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) Albacete, 2007
ISBN 978-84-689-5194-3
116 páginas + 1 DVD

SUMA 55
Junio 2007, pp. 137-142

XXV Aniversario de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*

23 y 24 de noviembre de 2006

Hemos recorrido un largo camino hasta aquí, pero no estamos exhaustos.

Han sido muchos años, muchas actividades, muchas ilusiones y muchas personas dedicando parte de su valioso tiempo a tratar de alcanzar los objetivos que la Sociedad Thales se marcó en sus estatutos. Pero han sido tantos los logros, tanta la difusión que han tenido nuestras actividades –no sólo entre el profesorado, sino en la sociedad andaluza en general: el año 2005 le ha sido concedida la placa al Mérito Educativo por la Junta de Andalucía– que el gran reconocimiento a nuestra labor nos ha animado siempre a continuar y a buscar nuevos modos, nuevas formas de seguir.

Siempre tratando de hacer más atractivas las matemáticas, acercándola a la sociedad, con propuestas de formación del profesorado que se ajusten a la realidad educativa del momento y a la facilidad que proporcionan hoy las nuevas tecnologías. y organizando en todos estos años actividades para los alumnos de todos los niveles. Hemos llegado al número 62 de nuestra revista Épsilon y, a lo largo de estos años, con una voluntad decidida de proporcionar a la comunidad educativa textos de gran valor, hemos llegado a disponer de un catálogo de publicaciones muy importante. Nuestras jornadas y congresos han ido desde el ámbito provincial y comarcal, hasta el iberoamericano e internacional, y en todos nuestros encuentros, aunque la organización pueda ser más o menos dificultosa y complicada, el entusiasmo ha sido el mismo y el objetivo también: encontrarnos y reconocenos como profesores de mate-

Concha García Severón
SAEM Thales

máticas preocupados por nuestra labor docente y ansiosos de escuchar y aprender de las iniciativas y experiencias de otros.

En una Comunidad Autónoma con las dimensiones de Andalucía, organizar un acto conmemorativo de fecha tan señalada, es complicado. Porque es muy difícil reunir en un par de días laborables, a tantos como querrían haber asistido a estos actos. Se han celebrado en Sevilla y en el Instituto Fernando de Herrera, en atención a que fue allí un 17 de noviembre de 1981 donde se celebró la Asamblea fundacional de la Sociedad. Además coincidían estas fechas con el décimo aniversario de la muerte de D. Gonzalo Sánchez Vázquez y hemos querido también rendir un homenaje a su memoria en esta ocasión, en este cumpleaños que tanto debe a figura tan valiosa y tan reconocida por todos.

Es preciso recordar que en el principio de nuestra historia, fuimos dos Sociedades: la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas *Thales*, cuya Asamblea fundacional es la que se ha citado al principio y que editaba la revista *Thales* y APMA (Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía) que se funda en Granada en 1984 y que editaba la revista *Épsilon*" En el año 1988 se produce la reunificación de la APMA y Thales, permaneciendo el nombre de Thales para la Sociedad y se adopta el de *Épsilon* para la nueva revista común. Desde hace casi 20 años caminamos juntos y nuestro alcance y nuestros logros son aún más amplios. Algunas veces, como ocurre en la actualidad con el Proyecto ESTALMAT, es preciso, dado el tamaño de Andalucía, recurrir al funcionamiento de dos sedes para llevar a cabo esta actividad. Así, funcionan con el mismo ideario y el mismo proyecto, las sedes de Andalucía occidental en Sevilla y la sede de Andalucía oriental en Granada.

Estos actos que nos han reunido durante dos días en Sevilla han tenido el propósito, sobre todo, de reconocer y agradecer a tantas personas como han estado implicadas en las tareas de esta Sociedad. Somos muchos socios y muchas, muchas, las personas que desde el comienzo de la andadura de Thales hasta la actualidad, han trabajado en todas las provincias andaluzas. Profesores que desde las ocho Juntas Directivas Provinciales han trabajado durante años proponiendo ideas brillantes, llevando a cabo todo tipo de gestiones, comprometiéndose con las instituciones, organizando Cursos de formación, ideando todo tipo de pruebas, montando exposiciones, enviando colaboraciones a la revista y, en definitiva, dedicando su ilusión, su entusiasmo y su tiempo a causa tan noble.

De verdad que la lista es interminable y también cuando se repasa, entrañable. Sobre todo por los que ya no están con nosotros: ya hemos nombrado a D. Gonzalo, pero también nos faltan Isabel Barragán, Antonio Martín Castilla, Paco Anillo, Concha García del Monte, Manuel Iglesias Cerezal..., dignos de nuestro reconocimiento y gratitud y presentes en nuestra memoria en estos días de celebración del aniversario de la Sociedad.

Jornadas de celebración XXV Aniversario

Hemos comenzado con el Acto de Inauguración en el que el Presidente de la Sociedad Manuel Torralbo que presidía la mesa, se ha dirigido a los presentes. Recogemos un extracto del texto con el que se dirigió a todos los socios en el díptico de las Jornadas:

> Me gusta recordarlo: nuestra asociación empezó desde abajo; fuimos los profesionales, los educadores, los que a pie de aula sentimos, allá en los finales de los 70, la necesidad de reconducir los enfoques de la enseñanza–aprendizaje de nuestra ciencia. Desde abajo, con las miras puestas en dignificar la profesión y la materia que da sentido a nuestro trabajo, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*, no ha dejado de crecer a lo largo de estos años. El arraigo que alcanza en Andalucía ha logrado, por ejemplo, que más de dos mil profesionales impulsen y desarrollen innovaciones relativas a la didáctica de la matemática en su quehacer diario; ha sabido difundir la necesidad de la investigación educativa en el ámbito de nuestra ciencia; ha conseguido divulgar y popularizar la matemática entre la población escolarizada en sus distintos niveles; ha contribuido a multiplicar la publicación de materiales curriculares idóneos y específicos para cada nivel; ha conducido el nuevo enfoque en la enseñanza de la ciencia a través del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación; y ha propiciado la aparición de otras asociaciones educativas, vinculadas a otros campos del saber, a imagen y semejanza de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Claudi Alsina, con su conferencia, *Iniciación a la pirología,* fue el encargado de iniciar propiamente las actividades de las Jornadas. Yo creo que Claudi ha tenido con Thales una debilidad especial, un *feeling* notable. No solo porque siempre ha atendido solícitamente cualquier requerimiento por nuestra parte, sino porque ha tenido siempre palabras de reconocimiento y ánimo con nuestra Sociedad y de auténtica admiración, respeto y cariño por D. Gonzalo. Como siempre, su disertación nos muestra aspectos desconocidos de lo que enseñamos desde hace años, y desde luego vistos bajo un prisma que sólo a él, con su ingenio y, sobre todo, con su amor por la enseñanza de las matemáticas, se le pueden ocurrir.

El recuerdo a la entrañable figura de D. Gonzalo Sánchez Vázquez corrió a cargo de dos profesores que tuvieron con él no sólo una relación de trabajo muy extensa en el tiempo, sino una amistad muy profunda y sentida: Antonio Aranda Plata que hizo al mismo tiempo que un precioso homenaje a la persona del primer Presidente de la Thales, un recorrido por la historia de la Sociedad y, yo misma, Concha García Severón, que quise reconocer al maestro que tuve desde los 13 años y del que fui sucesivamente alumna, compañera de seminario en el Instituto *Fernando de Herrera*, y amiga durante todos los años que desde un puesto u otro, trabajé junto a él en la *Thales*. Trascribo a continuación dos de los párrafos de estas intervenciones:

D. Gonzalo Sánchez Vázquez y la historia de *Thales*

> Al final de los años 70 andábamos los profesores metidos en grupos de trabajo, como el de Sevilla, *Colectivo de Didáctica de las Matemáticas*, surgido en el seno del Colectivo Andaluz de Pedagogía Popular, con José Antonio Alonso, Trini Bando, Antonio Martín, Manolo Martín, Pepe Muñoz, Antonio Pérez, entre otros, cuando se crea en Canarias la Sociedad de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*. Uno de sus fundadores y primer Presidente, Luis Balbuena, es amigo de Antonio Pérez, a quien transmite las expectativas de la asociación y la conveniencia del asocia-

cionismo para los diferentes grupos que, como el nuestro, venían trabajando en toda España desde hacía varios años. Antonio lo comentó en el grupo y juntos empezamos a madurar la idea de una asociación; aunque no todos lo tenían claro, el caso es que a finales del año 1980 existía ya formada una comisión gestora, unos estatutos provisionales, conocíamos los trámites que había que realizar… pero nos faltaba una *cabeza* y no me refiero a la de Thales, esa vino luego. Necesitábamos una persona conocida, con prestigio, con credibilidad… y esa *cabeza visible* era Gonzalo, un matemático con vocación de maestro, amante de su profesión y de las Matemáticas, con carisma entre alumnos, compañeros de Instituto y de la Facultad y buenas relaciones con la Universidad, Inspección, ICE, etc. (que no es cuestión baladí).

El 15 de noviembre de 1980 se constituyó en este Centro que hoy nos acoge, el entonces Instituto Nacional de Bachillerato *Fernando de Herrera*, la Junta Promotora de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas *Thales*, que preparó los estatutos y presentó la documentación para su inscripción el 28 de marzo de 1981. El Ministerio del Interior, en escrito del 11 de mayo de 1981, comunicó la legalización de la Sociedad y su inscripción en el Registro de Asociaciones.

De izquierda a derecha: Luis Balbuena, José A. Alonso, Trinidad Bando, Fernando Alonso, Enrique Camacho, Marta Berini, Carmina da Veiga, Antonio Martín (q.e.p.d.), Mª. Ángeles Ortiz (q.e.p.d.), Carmen Azcárate, Mª. Jesús Luelmo, Mª. Teresa Sierra, José Muñoz, Antonio Aranda y Antonio Pérez.

Entre esas dos fechas tuvo lugar un hecho importante: en diciembre de 1980 se reúnen en Sevilla diversos grupos de los que trabajaban en enseñanza de las Matemáticas (Zero de Barcelona, Gamma de Madrid, Colectivo Leonés, Didáctica de las Matemáticas de Cantabria, Didáctica de las Matemáticas de Sevilla, entre otros) y la Sociedad Canaria. En dicha reunión se tomaron dos acuerdos que marcarían el rumbo de los movimientos asociativos en Matemáticas: por un lado aceptar el ofrecimiento del ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona de organizar unas Primeras Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, y, en segundo lugar, continuar en contacto (a través de reuniones periódicas) para promover la renovación en la enseñanza de las Matemáticas, lo que sería el germen de la actual Federación, en la que Gonzalo jugaría un papel decisivo.

Pero D. Gonzalo empezó a ser Gonzalo para mí en el periodo en que siendo él Presidente yo era Secretaria General: pasamos muchas horas juntos, unas veces “despachando”, otras viajando, y otras degustando un sabroso menú. Entonces fue cuando empezó otro aprendizaje, fue ahora mi maestro en otras cosas bien importantes: aprendí como era su trato siempre considerado con personas de distinta condición, de diferentes estamentos; lo vi sopesar de manera reflexiva difíciles decisiones y de actuar con una gran amplitud de miras, lo vi escuchar a todos y ser sumamente diplomático en las respuestas, siempre cordial sin dejar de entrar en batalla si era necesario, con una facilidad para expresarse por escrito verdaderamente envidiable, y unas ganas de vivir y de disfrutar que nos agotaba a veces. En ocasiones, me hizo confidencias íntimas y cuando me leía sus poemas, me emocionaban muchísimo tanto la hondura de sus sentimientos como la confianza que me demostraba.

Yo creo que no puede cuestionarse que ha sido mi maestro, que le soy deudora de muchas enseñanzas y que mi consideración, respeto y cariño son incuestionables. Y aunque soy yo la que está ahora volcando, de manera sucinta, algunos de mis recuerdos de las diferentes etapas en que lo traté, sé que estas consideraciones de afecto las podrían hacer muchas de las personas que están aquí hoy.

Fue después Olivia Sánchez de Terán, hija de D. Gonzalo, la que continuó emocionada leyendo escritos de su padre, poemas que a lo largo de su vida le inspiraron diferentes personas, sucesos y circunstancias. Mientras Olivia leía, se iban sucediendo en la pantalla instantáneas en las que aparecía Gonzalo con muchos de los amigos de la Sociedad Thales y de otras sociedades, no sólo del ámbito nacional, sino también de otros países. Amigos que cosechó difundiendo sus ideas sobre la enseñanza de las matemáticas y animando a la creación de sociedades y asociaciones de profesores.

Con la inauguración de una placa conmemorativa del XXV Aniversario de la fundación de la SAEM *Thales* en el vestíbulo del Instituto y la lectura del acta de constitución de la SAEM Thales, a cargo de D. José Ferrer Rodríguez, se dio por finalizada la primera jornada de esta celebración.

La SAEM Thales en el Parlamento andaluz

El viernes, 24 de noviembre, las actividades revistieron una solemnidad especial al celebrarse en una magnífica sala del Parlamento de Andalucía. Después de la bienvenida al Parlamento, fue el Excmo. Sr. D. Juan José López Garzón, matemático y delegado del Gobierno en Andalucía, quien nos ofreció la primera disertación del día sobre *Mujeres y Matemáticas* en la que hizo tanto un repaso histórico a las más célebres aportaciones a esta disciplina por diferentes mujeres, como un resumen estadístico de la situación actual de los estudios científicos por parte de mujeres y hombres.

La persona que dictó la siguiente conferencia el profesor Luis Balbuena, es otra de las personas ligada a nuestra Sociedad desde sus inicios. Como comentaba Antonio Aranda al relatar la historia de la *Thales*, fue él quien después de haber tomado la iniciativa en Canarias, informó de los pasos que estaban dando y animó a los grupos andaluces a la creación de Sociedades de Profesores. Siempre hemos podido contar con él, su entusiasmo y dedicación son contagiosos y su valía personal incuestionable. Lo presentó Sixto Romero que como tantos otros socios de Thales podían haber hecho, elogió su trabajo continuado e hizo hincapié en su afecto por nuestra tierra.

Su conferencia: *Sociedades de Profesores: comunicación y colaboración* nos mostró, entre otras cosas, algunas de las iniciativas más novedosas y comprometidas que llevan a cabo los compañeros de la Sociedad Canaria *Isaac Newton*, para terminar sugiriendo al Presidente de la Sociedad Thales, que aprovechase la ocasión, el momento y el lugar en el que estábamos, para solicitar a la Junta de Andalucía la concesión de la Medalla de Oro de Andalucía para nuestra Sociedad. Hablaba con conocimiento de causa porque la Sociedad *Isaac Newton* la ha recibido ya del Gobierno de Canarias.

Manuel de León Rodríguez, Profesor del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española y miembro del Comité Ejecutivo de la *International Mathematical Union*, dictó la conferencia titulada *Las matemáticas, instrumento de paz, cooperación y desarrollo*. Él ha sido el Presidente del Comité Ejecutivo del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid durante el pasado mes de agosto y nos mostró la labor, los proyectos y las expectativas de la Unión Matemática Internacional (IMU).

Se procedió luego a la entrega de premios del concurso *Unidades didácticas con calculadora* y del concurso regional *Fotografía y matemáticas*.

Pasamos a continuación al Salón de Plenos donde la Presidenta de la Cámara, la Excma. Sra. D.ª M.ª del Mar Moreno Ruiz, nos dedicó un saludo institucional y unos comentarios muy acertados sobre nuestra labor educativa. El Presidente y el Secretario de la Sociedad, le agradecieron su acogida y sus palabras y le hicieron el obsequio de uno de los facsímiles que ha editado la *Thales*. Anunciando que íbamos a iniciar el proceso necesario para solicitar la Medalla de Oro de Andalucía.

Recuerdos entre amigos

Los actos académicos terminaron aquí. Lo que se hizo por la tarde fue casi una reunión de amigos que se convocó como: charla–coloquio: *25 años de Thales, ¡qué recuerdos!*, a cargo de Presidentes y Delegados de la Provincia de Sevilla y socios de otras provincias que participaron en la Sociedad desde sus inicios. Son tantos años… tantas horas e ilusiones compartidas.

Comentaron después varios de los alumnos colaboradores en tareas administrativas de la SAEM *Thales* sus experiencias y sus recuerdos de las muchas horas que habían compartido con nosotros. Siendo testigos de nuestros quehaceres, discusiones, sofocones y satisfacciones.

A continuación, se celebró la asamblea ordinaria de la SAEM *Thales*, donde se renovó parte de la Junta Directiva y se presentaron tanto la Memoria de Actividades como la Económica y el Presidente repasó los acontecimientos recientes más importantes, escuchó sugerencias y expuso sus intenciones y proyectos.

El fin de fiesta fue una cena donde se hizo entrega de algunos regalos de reconocimiento a su labor, a los socios que llevaban veinticinco años en la Sociedad, a los presidentes provinciales, a los diferentes directores de la revista, a los presidentes y secretarios generales, en fin… como se puso de manifiesto, a tantos y tantos como habíamos conseguido que la *Thales* sea lo que hoy es y de la que todos esperamos que se supere y alcance todos los objetivos que hoy por hoy tiene en su ánimo.

¡Animo y a por otros 25 años! ■

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: .... NIF/CIF: ....

Dirección: .... Teléfono: ....

Población: .... CP: ....

Provincia: .... País: ....

Correo electrónico: .... Fax: ....

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________	
☐ N.os sueltos ____________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 / IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: ....

Código Cuenta Cliente: Entidad: |_|_|_|_| Oficina: |_|_|_|_| DC: |_|_| Cuenta: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

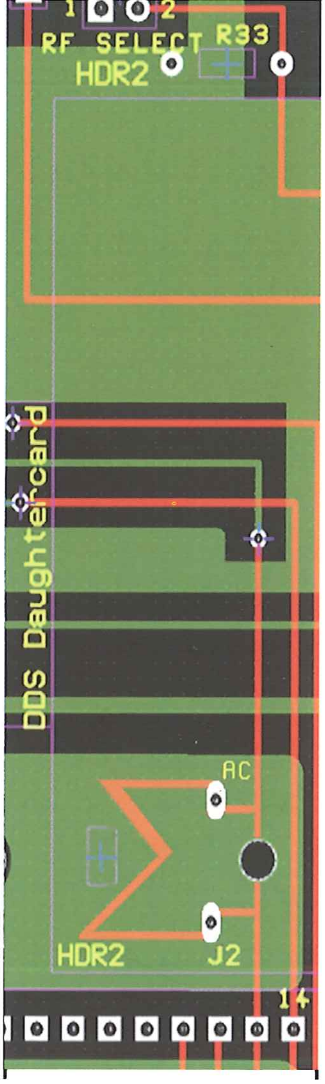
Banco/Caja: ....

Agencia n.º: .... Dirección: ....

Población: .... Provincia: ....

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SUMA.

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00055