suma+
Artículos
Julio 2015
79
pp. 53-63

Jorge Juan: el introductor del Cálculo Infinitesimal en España

Diego García Castaño

El proceso con series seguido por Jorge Juan para hallar la longitud del meridiano nos lleva a montar el trípode de nuestras investigaciones, a) en la suposición de que él utilizó, previamente, dichas series para hallar la longitud de la circunferencia, con tal de encontrar el mejor método de calcular la longitud de la elipse meridiana de la Tierra, b) en la reconstrucción pedagógica de todo lo que él hizo para una mejor comprensión del lector y, c) comparando el resultado que Jorge Juan obtuvo con el que se encuentra, hoy día, a través de la integral elíptica completa de segunda especie

Palabras clave: Circunferencia, Elipse, Meridiano, Cálculo Infinitesimal, Integral elíptica completa de segunda especie.

Jorge Juan: The introducer of Infinitesimal Calculus in Spain

The process with series followed by Jorge Juan to find the length of the meridian brings us to mount the tripod of our research: a) on the assumption that he used previously these series to find the length of the circumference to find the best method in order to calculate the length of the quadrant of the meridian ellipse of the Earth; b) in the educational reconstruction of all that he did for a better understanding of the reader and; c) comparing the result obtained by Jorge Juan to which the one found, nowadays, through the complete elliptic integral of the second kind.

Key words: Circumference, Ellipse, Meridian, Infinitesimal Calculus, Complete elliptic integral second kind.

En este trabajo pretendemos mostrar desde Novelda, desde la ciudad que le vio nacer, la excelencia científica de Jorge Juan como matemático que subió a los *altares* de la Ciencia siendo profesional distinguido de la Marina Española. Y es que Jorge Juan, como veremos, fue uno de los matemáticos españoles más prestigiosos, si no el que más, del siglo XVIII, como lo demuestra el hecho, entre otros tantos que podríamos citar, de que en el discurso de Ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, (1866), el Premio Nobel José Echegaray después de afirmar, refiriéndose a la Matemática pura del siglo en que vivió Jorge Juan, «otro siglo más de gloria para Europa, otro más de silencio y abatimiento para España», reconoció, sin embargo, que «la Matemática aplicada, debido al afán de Jorge Juan por enrolar a España en el desarrollo científico de los países más avanzados y preparar en ella un clima para la Ciencia, había alcanzado una merecida reputación europea».

Para que las personas con estudios medios o superiores, comprueben por sí mismas la categoría matemática de Jorge Juan, vemos en este trabajo, de la forma que consideramos más asequible para el lector, cómo resolvió el problema de hallar la longitud de los meridianos terrestres, o sea, cómo rectificó la

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2014 y aceptado en mayo de 2015

elipse que los contiene, o como él solía decir, cómo calculó la «peripheria», el perímetro, de los mismos, utilizando el Cálculo Infinitesimal, que incluyó en su libro *Observaciones astronómicas y físicas hechas en los reinos del Perú,* y como esto no lo había hecho nadie en nuestro país hasta entonces, se erigió en el «el introductor del cálculo infinitesimal en españa» permitiéndole a Benito Bails introducir en la enseñanza, el Cálculo Infinitesimal de «Observaciones astronómicas…», a través de su enciclopédica obra, en once tomos, que tituló *Elementos de Matemáticas.*

Como preámbulo a nuestro trabajo hacemos algunas consideraciones sobre la longitud de la elipse que, hoy día, se obtiene a través de una integral elíptica completa de segunda especie , en la cual al aparecer una serie infinita, como podrá comprobar el lector al final de este trabajo, por no haber función alguna que la satisfaga, nada más podremos conocer valores aproximados de su longitud, según el número de términos que cojamos en dicha serie infinita. Así pues, mientras el área de la elipse, la longitud de la circunferencia y el área del círculo podemos hallarlas exactamente, no pasa lo mismo con la longitud de la elipse.

Para que los protagonistas de nuestro trabajo nos cuenten lo que hicieron recordamos que, Newton, como creador del Cálculo Infinitesimal compartido con Leibniz, manifestó, «a comienzos de 1665 descubrí el método de las series aproximativas y la regla para reducir cualquier potencia de un binomio a dichas series,…» (*De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas* (1711)), y que Jorge Juan al abordar el problema de hallar la longitud del cuadrante de elipse, de la mitad del meridiano terrestre, afirmó, «este problema está resuelto en muchos libros pero la fórmula que sacan sólo sirve para arcos pequeños, pues si se aplica a todo el cuadrante de la elipse, los términos de la serie disminuyen tan lentamente que es impracticable, por ello me ha parecido que puede gustar, a los geómetras, el método que yo he seguido, pues en él se evita el inconveniente que padecen los demás» (*Observaciones astronómicas y físicas hechas en los reinos del Perú* (1748)).

Respecto a este método que siguió, Jorge Juan, con series que convergían rápidamente, para calcular la longitud del cuadrante de la elipse, de semieje mayor

Figura 1. Casa natalicia de Jorge Juan, en el Hondón de Novelda

el radio del Ecuador, que él eligió como unidad de medida, y semieje menor el semieje de giro de la Tierra, $b = 265/266$, según había sacado al resolver el problema de la forma de nuestro planeta, decirles que él trazó la mediatriz del semieje mayor relativo al cuadrante de la elipse que quería medir, dividiendo los cuadrantes de la elipse y de la circunferencia, de diámetro el eje mayor de la elipse, en dos partes. En la circunferencia, respectivamente, de 30º y 60º, y calculó la longitud de los arcos de elipse correspondientes, al de 30º de la circunferencia, a partir de dicha elipse con centro en el origen de coordenadas, y al de 60º de la circunferencia, hasta completar el cuadrante de la misma elipse, con el centro de esta en el punto $(1, 0)$ pasando por el punto $(0, 0)$, por el extremo del semieje mayor mencionado.

Todo esto nos descubre a un Jorge Juan, voluntarioso, responsable y pensador que conocía a la perfección, todo lo relativo a la circunferencia, y como tenía que calcular la longitud del cuadrante de elipse a través de series infinitas, se *entrenó,* como suponemos por las diferenciales de arcos de circunferencia dA y dB del cálculo de la longitud del meridiano terrestre, hallando la longitud del cuadrante de la circunferencia, utilizando dichas series infinitas, porque al conocer de antemano los resultados que tenían que salirle, podría detectar los fallos y los aciertos para evitarlos o potenciarlos, respectivamente, cuando calculara la longitud del cuadrante de elipse, que multiplicada por dos le daría la longitud del meridiano terrestre.

Nuestra suposición, de cómo vislumbró el método que según sus propias palabras «evitaba los inconvenientes que padecían los demás», solo pretende mostrar algo que aunque Jorge Juan lo hiciera, como no tenía porqué pregonarlo, nos lleva a nosotros a intuirlo razonadamente porque pedagógicamente, según nuestra forma de pensar, puede resultarle muy aclaratorio e instructivo al lector.

Para que éste intuya el panorama matemático en los años en que Jorge Juan resolvió dicho problema, y pueda valorar adecuadamente la resolución del mismo, recordamos, por ejemplo, que el número π, con infinitas cifras decimales no periódico, irracional y trascendente, es decir, no raíz de polinomios no nulos con coeficientes enteros, tomó el relevo del número «p» (inicial de peripheria) para designar la «razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro» a principios del siglo XVIII que fue cuando el inglés, William Jones, empezó a utilizar en *Sinopsis palmariorum matheseos* (1706) la letra griega π, para representar dicha razón, en lugar de la «p», en sus trabajos matemáticos.

No obstante lo dicho, el que tuvo mayor protagonismo, en este cambio, fue Euler que difundió, avanzado dicho siglo, el número π por todos los estamentos matemáticos europeos al adoptarlo en su libro, *Introductio in Analysin Infinitorum,* que publicó en 1748, dando a luz al Análisis Matemático. Ese mismo año, Jorge Juan editó su libro *Observaciones astronómicas…* en el que incluía la resolución del problema de hallar la longitud del cuadrante de la elipse meridiana de la Tierra, del que nosotros nos ocuparemos. Antes de entrar en materia destacaremos:

a) Que, en este problema, al no calcular Jorge Juan la cota de error que se comete en una serie infinita del tipo:

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = \binom{1/2}{0} a^{\frac{1}{2}} + \binom{1/2}{1} a^{-\frac{1}{2}} b + \binom{1/2}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^2 + \\ + \binom{1/2}{3} a^{-\frac{5}{2}} b^3 + \ldots + \binom{1/2}{k} a^{-\frac{2k-1}{2}} b^k + \ldots \qquad [1]$$

al tomar en ella un determinado número de términos, sin tener en cuenta los restantes, porque no solía hacerse en esa época ya que la bondad de los resultados avalaban los cálculos, debemos pensar que disponía de otras alertas que le avisarían de cuándo debía corregir el rumbo de sus investigaciones con tal de encontrar el resultado matemático más acorde con la realidad, una de ellas, desde luego, era la de operar antes con series infinitas en la circunferencia, como nosotros pensamos que hizo, para ir acumulando recursos útiles para sus trabajos con la elipse.

b) Que ponemos a disposición del lector algunas cuestiones rutinarias de cálculo, para que éste no tenga que molestarse ni distraerse en nada que no sea seguir el hilo de lo que vayamos diciendo, sobre el proceso que llevó a cabo, Jorge Juan, para hacer realidad todo lo que tenía «in mente». Recordamos, pues, dos formas de expresar $(a-b)^{1/2}$ observando los valores de las siguientes igualdades:

$$\binom{1/2}{0} = 1; \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2};$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{8} = -\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3};$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3} = \frac{1}{16} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{5};$$

$$\binom{1/2}{4}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{2\cdot3\cdot4}=-\frac{5}{128}=$$

$$=-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{7};...$$

porque sin más que cambiar b por $-b$ en [1], podemos escribir:

$$(a-b)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b-\frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}b^2-\frac{1}{16}a^{-\frac{5}{2}}b^3-$$

$$-\frac{5}{128}a^{-\frac{7}{2}}b^4-... \quad [2]$$

y hallando por inducción, con lo fácil que resulta hacerlo, el término general en semifactoriales (!!) expresar la [2] en la siguiente forma:

$$(a-b)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{2k-1}\cdot a^{-\frac{2k-1}{2}}\cdot b^k \quad [3]$$

siendo

$$2k!!=2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2k-2)\cdot2k$$

y

$$(2k-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot8\ldots(2k-3)\cdot(2k-1)$$

Longitud del cuadrante de la circunferencia

Simulando que Jorge Juan practicó con las series infinitas para hallar la longitud del cuadrante de la circunferencia, con tal de encontrar el mejor método de hacerlo con el cuadrante de la elipse meridiana terrestre que era el que le interesaba, como ya hemos manifestado con anterioridad, digamos que consideró la circunferencia de centro el punto $(0,0)$ y radio 1 y, como su ecuación es: $x^2+y^2=1$, obtuvo:

$$dy=-\frac{x}{y}dx$$

con lo que pudo calcular el elemento diferencial ds del arco de dicha circunferencia:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}dx \quad [4]$$

y dividiendo el 1 entre el desarrollo en serie de $(1-x^2)^{1/2}$, a partir de [2], con $a=1$ y $b=x^2$, como si de polinomios se tratara, obtuvo que:

$$ds=\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+\frac{35x^8}{128}+\right.$$

$$\left.+\frac{63x^{10}}{256}+\frac{231x^{12}}{1024}+\frac{429x^{14}}{2048}+...\right)dx$$

integrando encontró que:

$$s=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\frac{35x^9}{1152}+$$

$$+\frac{63x^{11}}{2816}+\frac{231x^{13}}{13312}+\frac{429x^{15}}{30720}+... \quad [5]$$

por lo que para $x=1$, sacó una burda aproximación de la longitud del cuadrante de la circunferencia:

$$s\cong1+\frac{1}{6}+\frac{3}{40}+\frac{5}{112}+\frac{35}{1152}+\frac{63}{2816}+$$

$$+\frac{231}{13312}+\frac{429}{30720}=1{,}370381236$$

cuando en realidad vale 1,570796327.

Por eso, al ver la lenta convergencia de esta serie para $x=1$, le dio a la x el valor $1/2$, en [5], y como $\operatorname{arcsen}1/2=30º$, pudo escribir:

$$\text{longitud del arco de }30º\cong$$

$$\cong\frac{1}{2}+\frac{1}{48}+\frac{3}{1280}+\frac{5}{14336}+\frac{35}{589824}+$$

$$+\frac{63}{5767168}+\frac{231}{109051904}$$

cuyo valor es 0,523598237 cuando el verdadero es 0,523598775, por lo que en este caso el error era menor que una millonésima, a sea, mucho más pequeño que en el anterior. Así pues a través del arco de 30º la longitud de la circunferencia salía mucho más ajustada a la real que considerando todo el cuadrante.

Disponía ya, por lo tanto, de experiencias que podría aprovechar, cuando se enfrentara al problema de hallar la longitud del cuadrante de la elipse, pero lo cierto es que aunque conociendo el valor de la longitud de un arco de circunferencia, como era el correspondiente al de 30º, podría encontrar la longitud de cualquier arco, sin embargo, eso no le serviría para calcular el cuadrante de la elipse al ser distintos en ésta los arcos de 30º según la región en que se tomen. Necesitaba hallar, por lo tanto, la longitud del cuadrante completo, porque ese sí que, multiplicándolo por 2, le daría la longitud del meridiano terrestre. Por eso, a renglón seguido, probó con la misma circunferencia de radio 1, en distinta posición, o sea, con centro el punto $(1,0)$ que pasaba, lógicamente, por el origen $(0,0)$. Como su ecuación es:

$$(x-1)^2+y^2=1$$

repitió todo el proceso anterior, obteniendo:

$$dy=\frac{1-x}{y}dx=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

por lo que:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{(2x-x^2)^{1/2}}dx \qquad [6]$$

por [2], con $a=2x$ y $b=x^2$, desarrolló en serie el denominador, efectuó el cociente, del 1 entre dicha serie infinita, como si de polinomios se tratara, y obtuvo:

$$ds=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{4}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{32}+\frac{5x^{\frac{5}{2}}}{128}+...)dx$$

e integrando sacó que:

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{80}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{448}+...) \qquad [7]$$

por lo que para $x=1$ la aproximación de la longitud del cuadrante de la circunferencia le salió 1,5664730, cuando en realidad es 1,5707963, o sea, la encontró con un error inferior a una décima. Por eso, recordando que en el caso anterior para el error disminuyó ostensiblemente, hizo lo propio dándole a x en [7] dicho valor, volviendo a comprobar la mejora en la aproximación de la longitud 1,0470517 del arco de 60º, (ya que $\arccos 1/2=60º$) que le salió, cuando en realidad es 1,0471975, que llevaba implícito un error menor de una milésima, con la ventaja que ello suponía.

Sumó los dos valores que había encontrado para $x=1/2$, que era el valor para el que más rápidamente convergían, según hemos visto, las series [5] y [7] y sacó que:

$$\text{Longitud del cuadrante de la circunferencia de radio } 1 \cong 1{,}5706499$$

con un error inferior a una milésima.

Longitud del meridiano terrestre

Con todo el bagaje de experiencias adquirido, a través de las series infinitas de rápida convergencia, hallando la longitud del cuadrante de la circunferencia, encontró el camino a seguir para calcular con la mayor fiabilidad posible la longitud del cuadrante de la elipse meridiana terrestre:

Primero, hallaría la longitud del arco de la elipse $x^2+y^2/b^2=1$, que había por encima del segmento de extremos $(0,0)$ y $(1/2,0)$, correspondiente al arco de 30º de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, o sea, tangente en los extremos del eje mayor de la elipse de centro en el punto $(0,0)$, semieje mayor el radio del Ecuador, que había tomado como 1 y de semieje menor el semieje de la Tierra, $b=265/166$ que, según dijimos, había encontrado al resolver el problema de la forma de nuestro planeta. *Segundo,* calcularía la longitud del arco de elipse $(x-1)^2+y^2/b^2=1$, por encima del segmento de extremos $(0,0)$ y $(1/2,0)$, correspondiente al arco de 60º de la circunferencia concéntrica con la elipse y de radio 1, o sea, tangente a la misma en los extremos de su eje mayor, que pasa por el punto $(0,0)$, tiene su centro en el punto $(1,0)$, de semieje mayor 1 y el mismo semieje menor b que antes.

Ese es el método que comentó, Jorge Juan, al iniciar este trabajo, diciendo que lo había seguido porque «en él se evita el inconveniente que padecen los demás».

Como en el primero, de los pasos, utilizó, según hemos dicho, la elipse $x^2+y^2/b^2=1$ sacó que:

$$dy=-\frac{b^2xdx}{y}=-\frac{bxdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

y pudo escribir que:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{1-x^2}}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{1-(1-b^2)x^2}{1-x^2}}dx=\frac{(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx \qquad [8]$$

siendo

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{1}$$

la excentricidad de la elipse, c la semidistancia focal y $a=1$, el semieje mayor.

Jorge Juan desarrolló en serie por [2], con $a=1$ y $b=e^2x^2$, el numerador y escribió:

$$ds=\frac{1-\frac{e^2x^2}{2}-\frac{e^4x^4}{8}-\frac{e^6x^6}{16}-\frac{5e^8x^8}{128}-...}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

operando puso ds en la siguiente forma:

$$ds=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx-$$

$$-e^2\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{e^2x^4}{8}+\frac{e^4x^6}{16}+\frac{5e^6x^8}{128}+...}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

en la que a

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

le llamó dA por ser, según [4], la diferencial del arco de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Desarrolló en serie por [2], con $a=1$ y $b=x^2$, el denominador y encontró que:

$$ds=dA-e^2\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{e^2x^4}{8}+\frac{e^4x^6}{16}+\frac{5e^6x^8}{128}+...}{1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}-...}dx$$

y realizando este cociente de series infinitas, como si de polinomios se tratara, sacó que:

$$ds=dA-e^2[\frac{x^2}{2}+\frac{(e^2+2)x^4}{8}+\frac{(e^4+e^2+3)x^6}{16}+$$

$$+\frac{(5e^6+4e^4+6e^2+20)x^8}{128}+...]$$

integró y obtuvo que el arco de elipse que había por encima del intervalo de extremos (0,0) y $(1/2,0)$, o sea, el correspondiente al de 30º de la circunferencia de centro (0,0) y radio 1, como ya dijimos, era:

$$s=A-e^2[\frac{x^3}{6}+\frac{(e^2+2)x^5}{40}+$$

$$+\frac{(e^4+e^2+3)x^7}{112}+$$

$$+\frac{(5e^6+4e^4+6e^2+20)x^9}{1152}+...]$$

el cual para $x=1/2$, ya que no lo hizo para $x=1$ por las experiencias realizadas en la circunferencia, le dio:

$$s=\frac{\pi}{6}-e^2[\frac{1}{48}+\frac{e^2+2}{1280}+\frac{e^4+e^2+3}{14336}+$$

$$\frac{5e^6+4e^4+6e^2+20}{589824}+...]$$

una vez calculado, despreciando en el corchete todo lo que llevaba potencias de e y la última fracción, por ser cantidades muy pequeñas, encontró que:

$$s\cong\frac{\pi}{6}-e^2(\frac{1}{48}+\frac{1}{640}+\frac{3}{14336})$$

por lo que $s\cong 0{,}5234291$ [9]

Finalmente, inició el segundo paso, por lo que tomó la elipse $(x-1)^2+y^2/b^2=1$, y operando de forma análoga a como lo había hecho antes encontró:

$$dy=\frac{b(1-x)}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\frac{b^2(1-x)^2}{2x-x^2}}dx$$

expresó ds como sigue:

$$ds=\sqrt{\frac{b^2+(1-b^2)(2x-x^2)}{2x-x^2}}dx=$$

$$=\frac{\left[b^2+e^2(2x-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

y desarrollando en serie el numerador por [1], con $a=b^2$ y $b=e^2(2x-x^2)$, escribió:

$$ds=\frac{dx}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}b+\frac{\frac{e^2}{b}x-\frac{e^2b^2+e^4}{2b^3}x^2+\frac{e^4b^2+e^6}{2b^5}x^3-\frac{e^4b^4+6e^6b^2+5e^8}{8b^7}x^4+...}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

y reconociendo, por [6] que

$$\frac{dx}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

era la diferencial, dB, del arco de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1 desarrolló en serie el denominador por [2], con $a=2x$ y $b=x^2$, sacando:

$$(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2}x^{\frac{3}{2}}-$$

$$-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 16}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}.64}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 1024}x^{\frac{9}{2}}-...$$

realizó el cociente de las dos series, como si de polinomios se tratara, y escribió:

$$ds=b\cdot dB+\frac{e^2}{\sqrt{2}}(\frac{1}{b}x^{\frac{1}{2}}-\frac{b^2+2e^2}{4b^3}x^{\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{-b^4+12e^2b^2+16e^4}{32b^5}x^{\frac{5}{2}}-$$

$$-\frac{b^6+6e^2b^4+80e^4b^2+80e^6}{128b^7}x^{\frac{7}{2}}+...)$$

integrando obtuvo:

$$s=b\cdot B+\frac{e^2}{\sqrt{2}}(\frac{2}{3b}x^{\frac{3}{2}}-\frac{b^2+2e^2}{10b^3}x^{\frac{5}{2}}+$$

$$+\frac{-b^4+12e^2b^2+16e^4}{112b^5}x^{\frac{7}{2}}-$$

$$-\frac{b^6+6e^2b^4+80e^4b^2+80e^6}{576b^7}x^{\frac{9}{2}}+...)$$

que para $x=1/2$ le dio:

$$s=b\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{e^2}{2}(\frac{1}{3b}-\frac{b^2+2e^2}{40b^3}+$$

$$+\frac{-b^4+12e^2b^2+16e^4}{896b^5}-$$

$$-\frac{b^6+6e^2b^4+80e^4b^2+80e^6}{9216b^7}+...)$$

y despreciando los términos del paréntesis que llevan potencias de e, obtuvo:

$$s\cong b\frac{\pi}{3}+\frac{e^2}{2b}(\frac{1}{3}-\frac{1}{40}-\frac{1}{896}-\frac{1}{9216})$$

sacando que: $s\cong 1{,}0444174$ [10]

Sumó [9] y [10] y encontró que la longitud de un cuadrante de la elipse meridiana de la Tierra $\cong 1{,}5678465$ radios del ecuador, y como este radio medía 6 390,6968 km, según obtuvo al resolver el problema de la forma de la Tierra, encontró que:

$$\text{longitud meridiano terrestre}\cong$$
$$\cong 2\cdot 1{,}5678465\cdot 6\,390{,}6968\cong 20\,039{,}26322\text{ km}$$

Filosofía del Cálculo Infinitesimal

Antes de calcular, como ya dijimos, mediante la integral elíptica completa de segunda especie, la longitud del cuadrante de la elipse y ver el grado de aproximación a la misma por la obtenida por Jorge Juan, hacemos de nuevo un poco de historia para seguir auscultando el ambiente matemático del siglo XVII y ver el mérito que tuvo, Jorge Juan, al entender, transmitir a sus compatriotas y utilizar prácticamente el Cálculo Infinitesimal.

Desde luego, Jorge Juan, a lo largo del trabajo que acabamos de describir, al manejar la ds, o sea, la diferencial del arco de elipse, ese elemento infinitesimal, que tiende a cero con toda la esencia de la «peripheria» de dicha cónica, e integrar después, sumando infinitos de estos elementos para conformar el cuadrante de la elipse, se metió de lleno en la, llamémosle, filosofía del Cálculo Infinitesimal, o sea, en uno de los recursos más potentes de la Matemática que, como madre de las demás ciencias, lo cede con generosidad a todas ellas, a la Física, Biología, Economía, Astronomía, Medicina, etc., que cada vez lo utilizan más.

La verdad es que los infinitamente pequeños que arman, sustentan y son la esencia del Cálculo Infinitesimal, inquietaron grandemente, durante muchos siglos, a mentes de matemáticos como Arquímedes que, en el siglo III a. C., inseminó la Matemática con el método de exhaución, de Eudoxio de Cnido, que dio a luz en el siglo XVII, al Cálculo Infinitesimal: diferencial e integral, de la *mano* de Newton y Leibniz, después de que un siglo antes, en el XVI, se reeditasen las obras o trabajos de Arquímedes, o sea, diecinueve siglos después de que él, respectivamente, las escribiera o los realizase.

Por eso debemos reconocer que fue un hecho histórico trascendental, uno de los más grandes avances de la Matemática lo que aconteció en los *anni mirabilis,* 1665 y 1666, cuando al cerrarse la Universidad de Cambridge, por la epidemia de peste, Newton se recluyó en su ciudad natal de Woolsthorpe y descubrió el Cálculo Infinitesimal, aunque no lo hiciera público hasta el año 1711, en su *De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas,* que escribió en 1669.

Como todo lo que se crea suele necesitar un reposo previo de ideas para poder sonsacarle todo el provecho que almacena, no es extraño que uno de los problemas del Cálculo Infinitesimal, en tiempos de Jorge Juan, fuera el de definir de forma comprensiva la derivada, o sea, el cociente de infinitésimos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

cuando $\Delta x = 0$. Téngase en cuenta que Newton nunca nombró las derivadas ni las funciones, porque él se defendía simplemente con las cantidades «evanescentes» que, al hacerse $\Delta x = 0$, se «desvanecían». Por eso entendemos perfectamente que al Cálculo Infinitesimal que se manejaba en 1748, el año en que Jorge Juan publicó su libro *Observaciones astronómicas…,* en el que lo dio a conocer como primicia nacional a los españoles, le faltara fundamentación teórica.

Figura 2. Jorge Juan es el paje de la derecha

Piénsese a este respecto, por ejemplo, que en 1734, George Berkeley, filósofo, matemático y obispo de Cloyne, criticaba estos métodos infinitesimales diciendo que, «si un incremento va disminuyendo cualquier propiedad que se obtenga, bajo estas condiciones, no será válida cuando él desaparezca», afirmando además que, «si un incremento es algo, no puede ser a la vez nada y viceversa, y si no son cantidades finitas, ni tan siquiera infinitamente pequeñas, entonces es como si operásemos con los espíritus de las cantidades perdidas».

Esta falta de rigor matemático, que padeció el Cálculo Diferencial no es óbice, sino todo lo contrario, para que manifestemos la desbordante intuición de los grandes matemáticos, entre ellos, la de Jorge Juan.

Y es que no había llegado aún la época en que matemáticos como Cauchy pusieran los cimientos estables a la función continua, 1822, que proseguiría después Baire, o Weierstrass que avanzado el siglo XIX le dio al concepto de límite el sentido aritmético finito que hoy día conocemos, con lo que los contenidos del Cálculo Infinitesimal se desligaron de toda interpretación geométrica, que venía de antaño, de los griegos, y en el fondo, es lo que exigía Berkeley y deseaban todos los matemáticos.

La evolución de estos métodos infinitesimales, como estamos viendo, fue lenta. D'Alembert, por ejemplo, dio una primera definición de límite en el XVIII que no se formalizaría, hasta que Weierstrass lo hiciera en el XIX, como ya hemos dicho.

Para que el lector entienda, en parte o en toda su extensión, lo que acabamos de narrar, decirles que aunque todos sabemos que si escribimos el número 1,99…9; con la finitud que nos es dado hacerlo, pero con los nueves que queramos, ese número será menor que 2 y que, sin embargo, el número N = 1,999…, con infinitos nueves, alcanza el valor 2, ya que es exactamente 2. La demostración de esto último es muy sencilla, pues basta poner para verlo que: $10N-N=19{,}999\ldots-N1{,}999\ldots=18$; de donde: $9N=18$, o sea, N = 1,999… = 2.

Todo esto desemboca en la paradoja de Aquiles y la Tortuga, es decir, en la paradoja más famosa de Zenón. Que Aquiles, siendo más veloz que la tortuga, la alcanza, está claro, porque, por ejemplo, si la tortuga está a 50 kilómetros, camina a 0,1 km/h y Aquiles corre a 10 km/h, se producirá el encuentro cuando éste recorra esos 50 km más todo lo que la tortuga haya avanzado desde que empezó la persecución, o sea, cuando se verifique que: $10t=50+0{,}1t$, es decir, después de que transcurran 5 h 3 m 1,8s [11], 2n las que Aquiles y la tortuga habrán recorrido, respectivamente 50,505050…km y 0,505050… km [12].

Esta paradoja, este desafío a la inteligencia, que induce a que Aquiles no alcanza a la tortuga se *derrumba,* porque igual que vimos que 1,999…, es 2, alcanza al 2, comprobaremos, a continuación, que al ser infinitas las secuencias aproximativas, Aquiles alcanza a la tortuga. Cosa que no pasaría si el número de secuencias fuera finito. Por eso podemos afirmar, en este caso, que en el infinito está la verdad.

Veámoslo. Teniendo las siguientes series infinitas:

$$t_{AT}=5+\frac{1}{20}+\frac{1}{2\,000}+\frac{1}{200\,000}+\ldots=$$
$$=5+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\ldots\right)$$
$$R_A=50+\frac{1}{2}+\frac{1}{200}+\frac{1}{20\,000}+\ldots=$$
$$=50+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)$$
$$R_T=\frac{1}{2}+\frac{1}{200}+\frac{1}{20\,000}+\frac{1}{2\,000\,000}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)$$

la del tiempo total en horas, t_{AT}, que tardan en las infinitas secuencias, tanto Aquiles como la tortuga, las de los kilómetros R_A y R_T que recorren, respectivamente, en las mismas Aquiles y la tortuga, en las que los primeros términos representan las 5 horas que emplea Aquiles en recorrer 50 km, mientras la tortuga recorre 500 m. De forma análoga a la que representan los segundos, terceros etc. términos. Para hallar los valores de las series efectuamos las sumas de los términos de las progresiones geométricas ilimitadas decrecientes, de los paréntesis en directo, o sea, sin aplicar la fórmula $a_1/(1-r)$, pues si:

$$S_1=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\ldots$$

la dividimos por 10^2:

$$\frac{S_1}{10^2}=\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\ldots$$

y se la restamos a ella misma, encontramos:

$$S_1-\frac{S_1}{10^2}=\frac{1}{10}\Rightarrow S_1=\frac{10}{99}$$
$$t_{AT}=5+\frac{5}{99}=5{,}050505\ldots=5\text{h}\,3\text{m}\,1{,}8\text{s}$$

que coincide, con lo que habíamos sacado en [11]. Así pues la paradoja de Aquiles y la Tortuga se *derrumba* de golpe cuando las secuencias son infinitas porque, como acabamos de comprobar, en ese caso, Aquiles alcanza a la tortuga.

De forma análoga tenemos que si:

$$S_2=1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots$$

la dividimos por 10^2

$$\frac{S_2}{10^2}=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots$$

y después se la restamos a ella misma, como antes, sacamos:

$$S_2-\frac{S_2}{10^2}=1\Rightarrow S_2=\frac{100}{99}$$
$$R_A=50+\frac{50}{99}=50{,}505050\ldots\text{ km}$$
$$R_T=\frac{50}{99}=0{,}505050\ldots\text{ km}$$

que también nos muestra lo que obtuvimos en [12].

Finalmente contrastaremos el ajuste del resultado que sacó Jorge Juan, de la longitud del cuadrante de la elipse meridiana terrestre, con el que se obtiene hoy día, a través de la integral elíptica completa de segunda especie. Para ello consideramos la elipse primera que utilizó Jorge Juan, o sea, la $x^2+y^2/b^2=1$, porque tomando el valor de ds que él encontró en [8], tenemos que la longitud del cuadrante de elipse lo podemos hallar mediante la siguiente integral:

$$\int_0^1 ds = \int_0^1 \frac{(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx =$$

$$=\left\{x=\operatorname{sen}t; dx=\cos t\,dt\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-e^2 sen^2 t)^{\frac{1}{2}} dt$$

desarrollando en serie infinita el integrando, de esta integral elíptica completa de segunda especie, por [3], con $a=1$ y $b=e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 t$, podemos seguir la igualdad de la siguiente forma:

$$=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{e^{2k}}{2k-1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k} t\, dt \quad [13]$$

utilizando la integración por partes en esta última integral, tenemos: $u=\operatorname{sen}^{2k-1}t$ y, por lo tanto, $dv=\operatorname{sen}t\,dt$; sacamos pues que $du=(2k-1)\operatorname{sen}^{2k-2}t \cdot \cos t\,dt$ y que $v=-\cos t$; por lo que tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t\, dt = [-\operatorname{sen}^{2k-1} t\cdot\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+(2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cdot\operatorname{sen}^{2k-2} t\, dt =$$

$$=(2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen}^2 t)\cdot\operatorname{sen}^{2k-2} t\, dt =$$

$$=(2k-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k-2} t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t\, dt]$$

pasando esta última integral al primer miembro, sacamos:

$$2k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t\, dt = (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k-2} t\, dt$$

y llamando

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t\, dt$$

aprovechamos la recurrencia que nos proporciona esta última igualdad para escribir:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t\, dt$$

$$I_{k-1} = \frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-2}$$

$$I_{k-2} = \frac{2k-5}{2k-4}\cdot I_{k-3}$$

$$\cdots$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\cdot I_0$$

multiplicando miembro a miembro estas igualdades y simplificando, tenemos:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k} t\, dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot I_0 =$$

$$=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \quad [14]$$

finalmente, sustituimos la [14] en la [13] y, obtenemos:

$$\text{longitud del cuadrante de la elipse} =$$

$$=\frac{\pi}{2}[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!^2}{(2k)!!^2}\cdot\frac{e^{2k}}{2k-1}]$$

por lo que desarrollando explícitamente el sumatorio, hasta el tercer término ya que el cuarto es ya muy pequeño debido a que $e^8=0{,}0000000017$ tenemos:

$$\text{longitud del cuadrante de la elipse} \cong$$

$$\cong\frac{\pi}{2}(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\frac{5e^6}{256}) = 1{,}5678451$$

este resultado que obtenemos, hoy día, con la integral elíptica completa de segunda especie nos confirma, una vez más, la excelencia matemática del noveldense Jorge Juan Santacilia al hallarlo, hace doscientos sesenta y seis años, de 1,5678465, o sea, con un error inferior a una cienmilésima.

Referencias bibliográficas

Bails, B. (1772-1783), *Elementos de Matemáticas* (11 tomos), Viuda de Don Joaquín Ibarra, Madrid.

Durán, A. J. (2011), *La verdad está en el límite,* Rodesa, Villatuerta.

Euler, L. (1748), *Introductio in Analysin Infinitorum*, M.-M. Bousquet & Soc., Lausanne.

García, D. (2002), *Biografía y Matemática de Jorge Juan,* Edicions Locals, Novelda.

— (2005): *Trascendencia Científica de Jorge Juan Santacilia,* Club Universitario, San Vicente del Raspeig.

Jones, W. (1706), *Sinopsis palmariorum matheseos*, Jeft Walle, Londres.

Juan, J. (1978), *Observaciones astronómicas y físicas hechas en los reinos del Perú,* Fundación Universitaria Española, Madrid.

Newton, I. (2003), *De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas,* SAEM «Thales» y RSME, España.

Puig-Adam, P. (1979), *Calculo Integral,* Euler Editorial, Madrid.

Rey, J., y J. Babini, (1985), *Historia de la Matemática,* Gedisa, Barcelona.

Torroja, J. M. (1973), *Aportación de Jorge Juan al desarrollo científico español,* Instituto de España,

Diego García Castaño
Catedrático de Matemáticas de Bachillerato
<digarcas.8@gmail.com>