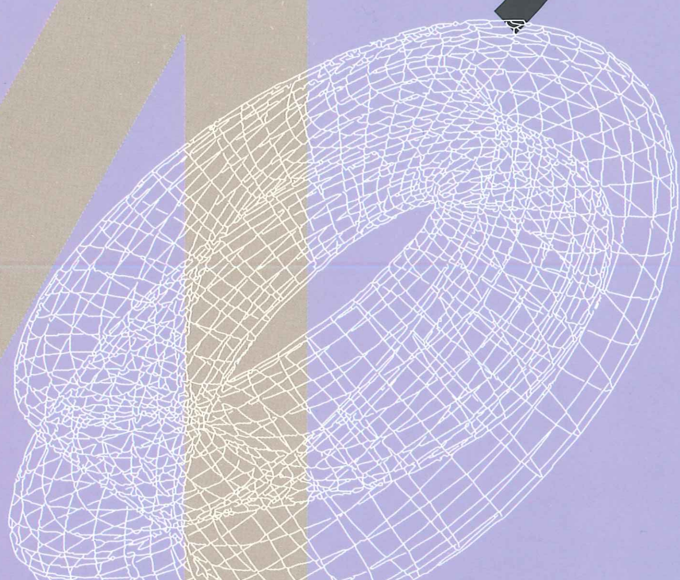
SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 41



NOVIEMBRE 2002

SUMA 41

noviembre 2002

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
Pablo Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.800 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número forman parte de la colección de fotografías «Matemáticas y escultura» de la que es autora Pilar Moreno. ¡Qué lastima que no haya color en SUMA!

SUMA 41
noviembre 2002

Es preciso participar

EDITORIAL

EN LOS ÚLTIMOS AÑOS han cambiado muchas cosas que afectan a las clases de matemáticas: la organización del propio sistema educativo, los currículos de las diferentes etapas, la presencia de calculadoras y ordenadores ahora disponibles por gran parte del alumnado, la sociedad y, dentro de ella, sus demandas educativas y los propios alumnos... Todo ello ha configurado una nueva realidad en la que, probablemente, lo que menos ha cambiado es lo que hacemos los profesores en nuestras aulas. Sigue siendo necesaria una reflexión sobre la realidad y también una experimentación en la búsqueda de alternativas que mejoren la situación.

El aislamiento del profesorado en su aula es el mejor camino para el desánimo, que muchos logran soslayar intentando nuevos acercamientos, probando actividades originales, formas de organización del trabajo o de los contenidos, etc. El siguiente paso debería ser el de compartir estas experiencias con el resto de los compañeros y compañeras de profesión y, para ello, son precisos foros en los que sea posible el debate.

La FESPM tiene alguno de esos foros ya establecidos en los que es preciso que los socios contribuyan con sus ideas, críticas, demandas de ayuda... Son los Seminarios, las JAEM y la revista.

En los Seminarios, discutimos problemas candentes de la educación matemática y se puede participar personalmente, si le designa su sociedad para asistir, pero también leyendo la documentación previa al Seminario y haciendo llegar a los participantes las sugerencias para que sean tenidas en consideración en el momento de redactar las conclusiones. Está próximo a celebrarse el II Seminario de reflexión sobre la enseñanza de las Matemáticas en Bajamar (Tenerife) organizado por la Sociedad Canaria.

Las JAEM no sólo es un foro en el que poder encontrarse y hablar de nuestros problemas, sino que además se pueden escuchar experiencias y tomar nota sobre muchos aspectos que pueden ser interesantes para mejorar nuestras clases. Se acaba de iniciar el periodo para las incripciones en las XI JAEM que se celebrarán en Canarias en julio de 2003 a las que no sólo deberíamos intentar ir sino que también convendría que hiciésemos el esfuerzo de llevar alguna comunicación en la que formulemos alguna experiencia o propuesta, sin el temor a pensar que nuestra aportación sea poca cosa, puesto que casi todos tenemos problemas similares en nuestras aulas y nos reconforta y ayuda ver cómo otros compañeros se enfrentan a ellos y tratan de buscarles solución.

Por último está SUMA a la que, por fortuna, llegan bastantes artículos pero en la que serían muy bien recibidos otros muchos más, sobre todo, en la sección de recursos e ideas para el aula.

Queremos hacer una invitación a todos los socios y socias de la FESPM a participar en estos foros y en las demás actividades de sus sociedades de forma activa, ya que así avanzaremos hacia la solución de algunos de nuestros problemas y podremos recuperar el optimismo que, en ocasiones, los abundantes problemas cotidianos nos ha hecho perder...

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 5-9

Cómo motivar la asignatura de Matemáticas en las carreras de ciencias sociales

Paula I. Corcho Sánchez
Pedro Corcho Sánchez

ARTÍCULOS

Uno de los grandes inconvenientes que presentan las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, para los alumnos, es que no les resulta fácil ver su aplicación real a la economía de hoy en día. La asignatura de Matemáticas se les presenta en un programa arduo y cargado de conceptos nuevos que han de aprender. Para motivar su estudio, en la Facultad de CC. EE. Y Empresariales de la Universidad de Extremadura se ha realizado un Seminario, previo al comienzo de las clases de la asignatura, que pretende dar una visión general del porqué se han de estudiar matemáticas en las carreras de economía.

LA ENSEÑANZA de cualquier disciplina necesita de una evaluación que permita al profesor y al alumno certificar el aprendizaje de la disciplina en cuestión. La evaluación de ciertas asignaturas resulta ser una tarea cada vez más difícil, para el profesor, cuando no se cuenta con el interés del alumno para el aprendizaje de las mismas. El profesor no se siente capacitado para evaluar, si sabe de antemano que el alumno no siente ningún interés por aprender. Una de estas disciplinas, que resulta «poco interesante», es la asignatura de Matemáticas. Esta asignatura está presente en muchas de las carreras universitarias de ciencias, por lo que resulta imposible que el alumno pueda afirmar que la matemática no le atañe de forma directa. El nivel de suspensos de esta asignatura en carreras como Economía, Biología, Magisterio... es bastante elevado, y como consecuencia de ello un grupo de profesores de la Universidad de Extremadura pretendemos desarrollar en el aula programas que nos permitan una evaluación y, sobre todo, una motivación continua de esta asignatura. En concreto, la experiencia que se desarrolla en este trabajo se refiere a la asignatura[1] de Matemáticas, troncal, de doce créditos, impartida en primero de la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas (LADE), de la Licenciatura de Economía (LE) y la Diplomatura de Empresariales (DE). En la Facultad de CC. EE. y Empresariales se ha observado que no sólo el número de suspensos en esta asignatura está creciendo progresivamente, sino que además, otras asignaturas están notando este *no aprendizaje de las matemáticas*. Los docentes de matemáticas, aplicadas a la economía, hemos de tomar conciencia de que aquellas son una herramienta para muchas de las áreas que abarca la economía y, como tal, presta su servicio al resto de las asignaturas que conforman el plan de estudios, de la econometría, etc. Estos temas son expuestos en clases teóricas y prácticas. La adquisición de conocimientos matemáticos se va realizan-

1 Esta metodologia puede ser empleada en cualquier asignatura que presta servicio a otras, es decir que es un instrumento o herramienta para otras materias.

do por bloques: matrices, funciones, derivación, optimización, integración, ecuaciones diferenciales y en diferencias, y teoría de juegos. La exposición de los temas se combina con la pizarra (método tradicional) y clases en el aula de informática. Estas últimas permiten al alumno, con la ayuda de Internet, encontrar información acerca de la utilidad de las matemáticas en áreas de economía. Asimismo se les permite la resolución de problemas y su inmediata corrección, vía correo electrónico. Estas clases son siempre seguidas por el profesor desde la propia aula o desde cualquier ordenador conectado en Red. Una vez explicados y aplicados estos conceptos matemáticos se procederá a la evaluación del alumno.

Motivación del alumno: seminarios específicos

La asignatura de Matemáticas es una disciplina presente en muchas carreras universitarias de ciencias sociales, pero ésta no es una de las asignaturas favoritas del alumno. Algunas de las razones por las que el alumnado no es partidario de su estudio es que no ven, *a priori*, su utilización[2] y, por lo tanto, no desean aprender algo que no saben dónde ni cuándo se va a utilizar. El profesor de matemáticas aplicadas, por ejemplo a las ciencias sociales, biología, química, etc. debe asumir las matemáticas de LE, de LADE y la DE. Por ello, el programa de la asignatura de matemáticas ha de estar en consonancia con las aplicaciones que de éstas se van a realizar en las demás asignaturas. Esto conlleva una colaboración interdisciplinar entre el profesorado de todas las asignaturas de la carrera. Sólo así se podrá ofertar un programa formado por unos temas de matemáticas, que el alumno puede observar que tienen su aplicación económica al estudiar otras asignaturas.

El elevado número de suspensos de la asignatura de Matemáticas en los cursos de LADE, LE y DE y el gran desinterés mostrado por parte del alumnado, nos han hecho recapacitar para estimular al alumno en la importancia que tienen las matemáticas en el mundo contemporáneo, y en particular en la economía. Sólo así podemos contar con la predisposición del alumnado a aprender matemáticas; unas matemáticas útiles y en constante crecimiento.

Para despertar la motivación, y para que el alumno encuentre esa predisposición ante el aprendizaje de las matemáticas hemos realizado una serie de seminarios al comienzo del curso. Los seminarios consistían en conferencias amenas y sencillas, donde han sido invitados profesores de otras disciplinas que utilizaban las matemáticas como única herramienta, para resolver problemas de ciertas situaciones económicas. Este primer contacto del alumno con las matemáticas y su función de servicio, permitía ubicar al alumno de LADE, LE y DE en la importancia de adquirir una destreza matemática para su posterior aplicación en el mundo económico.

Para despertar la motivación, y para que el alumno encuentre esa predisposición ante el aprendizaje de las matemáticas hemos realizado una serie de seminarios al comienzo del curso.

Tras la motivación del alumno, se realiza una programación acorde con las necesidades que el alumno va a tener en las asignaturas que constituyen su licenciatura. En particular, en LADE, se realiza un programa con los temas que el alumno va a aplicar en asignaturas como microeconomía, macroeconomía, organización industrial, prestan servicio a otras asignaturas y que son éstas las que van a determinar los niveles de aprendizaje que debe adquirir el alumno. Lo que ocurre es que la asignatura de Matemáticas se imparte en primero, que es el curso en el que los alumnos aprenden a manejar las herramientas que van a necesitar en cursos posteriores. Este desfase entre aprendizaje y utilización provoca en el alumno una gran desmotivación ante el aprendizaje de conceptos matemáticos.

En la Facultad de CC. EE y Empresariales de la Universidad de Extremadura para garantizar, de algún modo, que lo aprendido en la asignatura de matemáticas es absolutamente necesario para el *futuro economista*[3] se han organizado, al comienzo del curso, seminarios que llevan el siguiente título: *La utilización de las matemáticas en la economía del 2000*. Estos seminarios lo forman diferentes sesiones de conferencias, que tienen en común que utilizan las matemáticas para explicar ciertos aspectos económicos. Algunas de las conferencias impartidas versaban sobre: La utilización de las matemáticas en las finanzas, en la macroeconomía, en las negociaciones económicas, en organización industrial, en la modelización de situaciones económicas, etc. Estos seminarios provocaron un interés de los alumnos por los temas que iban a formar parte de la asignatura. Los contenidos de estos seminarios no eran totalmente asequibles para los alumnos, por su aún escasa formación económica (recuérdese que los alumnos son de primer curso de LADE, LE y DE), pero lo único que se pretendía era que se dieran cuenta

2 En 1999 se encuestó a 400 alumnos acerca de los motivos de su fracaso al estudiar la asignatura de matemáticas. El 99% no entendían para qué querían saber algunos de los temas incluidos en el programa.

3 Consideramos futuros economistas a los alumnos de LADE, LE y DE.

del nivel de matemáticas tan elevado que se necesitaba para profundizar en ciertos temas económicos; esto era el objetivo principal de las conferencias presentadas en los seminarios. Además se percataban de que eran muchas las ramas de economía (macroeconomía, microeconomía, organización industrial, finanzas,...) las que utilizaban herramientas matemáticas, que evidentemente la mayoría de los alumnos desconocían o no dominaban.

Los alumnos, terminados los ciclos de conferencias, declararon que habían aprendido que las matemáticas son una herramienta muy necesaria en la economía del 2000. Además comentaban que empezaban la asignatura con una predisposición de aprendizaje que no tenían antes de escuchar las conferencias de los seminarios. Por otro lado, se les expuso con claridad qué conceptos matemáticos eran aplicados en cada momento del proceso que se exponía en la conferencia, y ellos mismos comprobaban que en el programa que se le iba a impartir en el curso contenía cada uno de esos conceptos. Es decir, se pretendía que autocomprobaran que iban a aprender *esa herramienta matemática* durante el curso. Para ello, se les entregó a cada alumno un programa detallado de los temas que iban a ser explicados en clase. Al mismo tiempo los conferenciantes comentaban este concepto o herramienta que se les va a explicar en el programa, y mostraban el tema que lo contenía. Por ejemplo, la conferencia titulada *La aplicación de las matemáticas en la macroeconomía*, entre otras cosas, mostraba modelos económicos donde era necesario la resolución de un tipo de ecuaciones diferenciales; el conferenciante en este punto comentó que esta herramienta sería explicada en el Tema 10 del programa (En el programa puede observarse: *Tema 10: Introducción a las ecuaciones diferenciales y en diferencias*). Con esta metodología lo que se pretendió fue que el alumno se motivase antes de comenzar la asignatura. La motivación la entendemos como las ganas de aprender algo que tiene su utilidad inmediata, en algo que realmente les gusta[4]: la economía. Recordemos que en una encuesta, realizada años anteriores, uno de los motivos que más aparecía entre el alumnado por lo que se producía un rechazo al estudio de la asignatura de matemáticas, era la falta de información acerca de para qué querían aprender los temas que se les explicaban en clase. De esta forma con los seminarios impartidos esta cuestión queda resuelta.

El programa de la asignatura de matemáticas que se imparte en las distintas titulaciones de la Facultad de CC. EE. y Empresariales ha sido elaborado empíricamente ante las necesidades que demandan las demás asignaturas que forman el plan de estudios...

Los profesores participantes, procedentes de diferentes universidades, mostraron gran entusiasmo ante las preguntas realizadas por los asistentes a los seminarios. Concluyeron que la experiencia era muy positiva, no solamente para los alumnos sino también para el profesorado. Estos últimos podían utilizar el material de los seminarios como lecturas adicionales en el curso para que el alumno tome conocimiento de las herramientas tan extensas que proporcionan las matemáticas en la economía.

El siguiente paso, después de crear un ambiente de interés y motivación para el estudio de la asignatura de Matemáticas, lo constituye la presentación y exposición del programa con el temario que forma la asignatura. El alumno debe percibir que el programa que se le va a desarrollar en el curso se corresponde con las herramientas que va a necesitar en Macroeconomía, en Microeconomía, en Organización Industrial, en Finanzas, etc. Es decir, que se den cuenta que el temario que se les va a mostrar no es un capricho de los profesores de matemáticas, sino que es consecuencia de las necesidades que muestran los economistas actuales.

Programa de la asignatura de Matemáticas

El programa de la asignatura de matemáticas que se imparte en las distintas titulaciones de la Facultad de CC. EE. y Empresariales ha sido elaborado empíricamente ante las necesidades que demandan las demás asignaturas que forman el plan de estudios de LADE, LE y DE (Álvarez y otros, 2000). Para elaborar este programa se ha elaborado un test con un amplio listado de contenidos matemáticos. Este test ha sido suministrado a todos los profesores que imparten alguna asignatura en las titulaciones de la Facultad de CC. EE. y Empresariales de la Universidad de Extremadura, y cada uno de ellos ha seleccionado *qué y hasta que nivel de* matemáticas utilizan en su asignatura. De esta forma, el programa elaborado está determinado por la demanda de matemáticas requeridas por las asignaturas que conforman la carrera. El programa consta de 18 bloques temáticos: matrices, vectores, sistemas de ecuaciones, sucesiones, series, funciones, integración...

De esta manera, los temas que forman parte del programa de Matemáticas son únicamente los que se van aplicar en otras

4 La mayoría de los encuestados elegían las carreras de LADE, LE o DE como primera opción o segunda.

asignaturas. En este sentido hemos retirado la forma tradicional de dividir el programa en Álgebra y Cálculo; en este momento exponemos los temas de forma que el alumno lo va a ir necesitando en otras asignaturas. En realidad esto es un poco complejo, porque está claro que, por ejemplo, no vamos a explicar el tema de integración antes que el de la derivación; en definitiva se sigue un orden lógico, desde el punto de vista matemático, pero los temas los hacemos un poco independientes unos de otros. No olvidemos que los futuros economistas sólo van a utilizar a las matemáticas como instrumento o herramienta y, por lo tanto, desean sólo conocer bien el funcionamiento de las mismas y cuándo han de utilizar una determinada técnica de resolución. Por ejemplo, en el tema de ecuaciones diferenciales se les presentan los distintos tipos de ecuaciones y las soluciones de cada una de ellas, sin entrar en detalles de existencia, unicidad, etc. Tampoco hay que pensar que se les enseña un *recetario de fórmulas*, éstas pueden encontrarlas en cualquier libro. Lo que se pretende que aprendan es cuándo hay que utilizar una u otra fórmula, o cómo pueden deducir una fórmula que van a necesitar para su posterior aplicación.

Por último, es preciso comentar que cada uno de los temas son expuestos con la máxima brevedad y rigor, a la vez que claridad, para su posterior aplicación. Las clases de exposición se dividen en teóricas y prácticas. En las primeras se exponen los temas en la pizarra y los esquemas de los mismos con ayuda del ordenador. Los esquemas de los temas teóricos se han ido introduciendo en una página Web de la universidad y así el alumno puede acudir en cualquier momento y confeccionar de este modo sus propios temas.

La idea de introducir el ordenador en las clases teóricas es porque se ha observado que el alumno cuando el curso va avanzado copia y copia sin entender lo que está copiando; con el ordenador podemos despertar la atención del alumno cuando lo veamos necesario.

En las clases prácticas se realizan problemas en la pizarra y en el ordenador. Intentaremos que los ejercicios y problemas tengan carácter económico. Los ejercicios que se expongan en la página Web serán de tipo test (ofertamos cuatro posibles respuestas) y el alumno puede realizar un autoexamen de los temas que elija y mandar sus contestaciones al profesor por correo electrónico[5]. Éste procederá a su corrección y le mandará la solución, bien detallada, de los ejercicios que el alumno haya contestado mal.

Esta experiencia nos ha proporcionado un mayor seguimiento de los temas a lo largo del curso. Los alumnos reconocen que de este modo, con la novedad de la página Web en clases teóricas y prácticas, llevan la asignatura más al día que con los métodos tradicionales. Además los temas de matemáticas son enfocados según las aplicaciones de los mismos en el resto de las asignaturas, dato con el que contamos en los test que hemos pasado a todos los profesores de economía para elaborar el programa de la asignatura. En próximas investigaciones se procederá a desarrollar más ampliamente los ejercicios en la Web.

Después del proceso de enseñanza-aprendizaje del temario, creemos que el proceso de evaluación individual es necesario debido al elevado número de alumnos en las aulas de la universidad.

Después del proceso de enseñanza-aprendizaje del temario, creemos que el proceso de evaluación individual es necesario debido al elevado número de alumnos en las aulas de la universidad. Por esta razón, se han ofertado dos formas de evaluación al alumno: la tradicional, con una prueba escrita al final del curso; y otra con el ordenador. Esta última opción consiste en realizar un control periódico de los conocimientos del alumno en el aula de informática utilizando preguntas de tipo test, con la supervisión del profesor.

Además, otra ventaja de este proceso informático es su aplicación a la revisión de exámenes: como viene ocurriendo en pasados años, los alumnos se aglomeran ante el despacho del profesor para realizar la correspondiente revisión de exámenes. En el caso de la asignatura de Matemáticas, con los métodos de evaluación tradicionales, la revisión se suele realizar transcurridas algunas semanas a la realización del examen, debido a la gran cantidad de exámenes que han de ser corregidos por un mismo profesor. Esto lleva a que el alumno no recuerde bien lo que contestó en su debido momento y las revisiones se convierten en interminables explicaciones del profesor, que a veces el alumno no sigue. Con la evaluación continua que hemos propuesto anteriormente, se nos permite realizar la revisión en el mismo momento que termina cada prueba. El alumno con una clave tendrá acceso a la correcta, y desarrollada minuciosamente, resolución de todos los problemas de la prueba realizada. Además el alumno dispone de esta resolución el tiempo suficiente para que pueda contrastar errores y estudiarla.

Conclusiones y comentarios finales

Con las nuevas tecnologías el profesorado puede poner en funcionamiento

5 En un futuro se pretende que los ejercicios prácticos puedan realizarse mediante vídeo-conferencias.

nuevas metodologías de enseñanza y evaluación. Con ello, lo único que se pretende es saber si el alumno muestra más interés en las clases, si le parece más amena y atractiva que la metodología tradicional, y en definitiva, si con estas nuevas metodologías podemos valorar que el alumno aprende más.

La asignatura de Matemáticas, impartida en numerosas carreras universitarias, cada vez es más «odiada» y clasificada de «difícil» de superar, por parte de los alumnos. Ante los numerosos suspensos y el abandono de la asistencia a clase, algunos profesores de matemáticas ponen en práctica nuevos métodos de enseñanza y de evaluación que hagan que las matemáticas recuperen un poco de afinidad con los alumnos.

Entre los jóvenes de hoy en día existe un mundo muy atractivo con muchísimas aplicaciones futuras, éste es el llamado «mundo de Internet y de la Red». Aprovechando la inquietud que tienen los alumnos ante las nuevas tecnologías y las ganas de seguir una asignatura por Internet ofrecemos un paso intermedio: combinar la pizarra y explicaciones tradicionales con las nuevas tecnologías. En este tipo de asignatura no nos parece conveniente realizar el total seguimiento de las clases por Internet, ya que creemos que la mayoría de los alumnos necesitan de unas explicaciones previas que el profesor ofrece en persona en un aula normal.

Este procedimiento de combinación de clases tradicionales y clases con Internet se ha llevado a cabo con alumnos de primer curso de la Facultad de CC. EE. y Empresariales, y con los alumnos de tercero de Magisterio de la Universidad de Extremadura en la asignatura de Matemáticas, para estos últimos los seminarios versaban sobre la utilización de las matemáticas básicas en la vida actual. Los alumnos de ambas carreras han manifestado que con esta metodología la asignatura les parece más interesante y más asequible. La motivación con los seminarios les garantiza que lo que van a aprender en la asignatura tiene su utilidad en la economía, y el seguimiento de las clases teóricas y prácticas en las aulas y posteriormente el ordenador les proporciona una mayor autonomía y les exige llevar la asignatura al día para resolver los problemas planteados. Además mostraron mucho interés en la búsqueda de información por Internet de matemáticas relacionadas con la economía, en la participación de foros sobre la educación matemática, etc. Según las encuestas realizadas cuando terminó el curso podemos concluir que un 90% de los alumnos declararon que consideraban que es necesario una buena formación matemática para llegar a dominar ciertos aspectos de la economía, y que lo habían comprobado en Internet (búsqueda de artículos, foros...) y que la metodología empleada era bastante asequible para seguir el programa de la asignatura; de éste último les parecía muy interesante y útil que se ajustase a las necesidades que el resto de las asignaturas tienen de la utilización de las matemáticas. Para confeccionar este programa hay que hacer hincapié en que las matemáticas prestan un servicio a las asignaturas que conforman los planes de estudios de la carrera en cuestión, y que por lo tanto, tenemos que olvidarnos de las clásicas divisiones de Cálculo, Álgebra y explicar únicamente los temas que se vayan a aplicar en el resto de las diferentes asignaturas económicas. Con este tipo de programa el alumno adquiere la certeza de que las matemáticas que está aprendiendo son útiles para lo que él está estudiando: la economía.

Está claro que la aportación que haga el alumno al acto de aprender dependerá del sentido que encuentre a la situación de aprendizaje-enseñanza propuesta.

Está claro que la aportación que haga el alumno al acto de aprender dependerá del sentido que encuentre a la situación de aprendizaje-enseñanza propuesta. Para que dicha situación tenga sentido se ha de cumplir, como mínimo, que el alumno tenga claro el objetivo que se quiere conseguir. En nuestro caso el objetivo es la necesidad de conocer herramientas matemáticas para poder desarrollar la economía. Este objetivo les queda lo suficiente claro con el ciclo de conferencias del seminario con el que abrimos el curso. Además hay una mayor participación en las clases prácticas porque les atrae la forma de presentar los ejercicios con el ordenador, pueden elaborar sus propios temas con el apoyo de los resúmenes que encuentran en la página Web, pueden extraer información y más ejercicios de otras páginas...

Paula I. Corcho
Facultad de CC.EE.
y Empresariales.
Universidad de Extremadura.
Pedro Corcho
Facultad de Formación
del Profesorado.
Universidad de Extremadura.

Referencias bibliográficas

ÁLVAREZ, P., M. BLANCO, P. CORCHO y M. GUERRERO (2000): «Determinación de los contenidos docentes matemáticos en económicas», en *Actas de las VIII Jornadas de Asociación Española de profesores de Matemáticas en la Economía y la Empresa*, Ediciones Asepuma, 3-13.

HERDENSON, J. (1995): *Teoría Microeconómica*, Ariel

VICENT, F. (1994): «Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas», *Suma*, n.° 17, 10-16.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidente: Florencio Villarroya
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Carmen Azcárate/Luis Balbuena
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Joan Gómez i Urgellés
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Ricardo Padrón
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: Carmen da Veiga
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barreda
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 11-18

La demostración y los sistemas de cálculo simbólico

Lorenzo Javier Martín García
Juan Antonio Velasco Mate

ARTÍCULOS

La pregunta general a la que pretendemos responder es: ¿cómo pueden incorporarse los sistemas de cálculo simbólico (SCS) a la realización de demostraciones, en particular, y a la enseñanza de las matemáticas, en general? La metodología seguida, para encontrar respuestas adecuadas, no es otra que el desarrollo detallado de situaciones concretas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, utilizando el sistema de cálculo simbólico Maple 7, y reflexionando sin apasionamiento sobre los resultados obtenidos. Adicionalmente, y de forma solapada, planea otra cuestión no menos importante: ¿hasta qué punto pueden aceptarse como auténticas demostraciones los resultados obtenidos con este tipo de herramientas?

LA IRRUPCIÓN en el mercado de potentes sistemas de cálculo simbólico (SCS), capaces de realizar eficientemente complicados cálculos simbólicos, está influyendo poco a poco en la manera de presentar los contenidos matemáticos a los alumnos, y está cambiando la jerarquía de prioridades en la consecución de objetivos docentes, ya que la utilización de estas herramientas permite dedicar menos tiempo al cálculo manual o gráfico, y más tiempo a la comprensión de conceptos abstractos.

Sin lugar a dudas, la parte más apropiada para este cambio es la relacionada con la repetición de ejercicios y habilidades, ya que además de resolver los ejercicios «clásicos», pueden plantearse nuevos problemas cuyos datos no estén cuidadosamente «preparados» para que las operaciones intermedias se manipulen satisfactoriamente sin grandes esfuerzos adicionales. Esta peculiaridad lleva aparejada la posibilidad de resolver más ejercicios y más significativos. Por otra parte, el aprovechamiento de las utilidades gráficas permite profundizar más en la interpretación de los resultados y en la búsqueda de conexiones entre los objetos matemáticos y los objetos de la vida cotidiana.

Si a estas razones añadimos que la renovación de los planes de estudios de las carreras técnicas españolas (ingenierías superiores, ingenierías técnicas, informática, etc.), ha reducido considerablemente los créditos de las asignaturas de matemáticas sin reducir proporcionalmente los objetivos que hay que alcanzar, parece razonable que los Departamentos de Matemáticas (generalmente se añade el calificativo «aplicadas») de las conocidas como universidades politécnicas, hayan sido los primeros en incorporar decididamente los SCS a su trabajo cotidiano en la doble versión de ayuda al profesor en la transmisión de los contenidos y de ayuda al alumno en la materialización de técnicas de estudio tanto personal como colectivo. Pero, aunque en la enseñanza universitaria las condiciones para la utilización de estos SCS puedan parecer más propicias que en la enseñanza secundaria, nunca ha sido buena política desaprovechar las ventajas que aportan los avances tecnológicos. De hecho, ya se han realizado experiencias concretas encaminadas a facilitar la comprensión de conceptos como el de derivada en 1.° de Bachillerato (Martín y Velasco, 1999) o el de integral de Riemann en 2.° de Bachillerato (Martín y Velasco, 2001).

Sin embargo, hay más aspectos en los que la incidencia de estas herramientas de cálculo es importante. La pregunta general a la que pretendemos responder es: ¿cómo pueden incorporarse los sistemas de cálculo simbólico (SCS) a la realización de demostraciones, en particular, y a la enseñanza de las matemáticas, en general?

La metodología seguida para encontrar respuestas adecuadas no es otra que el desarrollo detallado de situaciones concretas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas utilizando el SCS Maple 7, y reflexionando sin apasionamiento sobre los resultados obtenidos. Como suele suceder habitualmente con las preguntas que no tienen una respuesta taxativa, aparecen casos en los que la utilidad de los SCS está fuera de toda duda, junto a otros en donde caben todo tipo de interpretaciones. En cualquier caso, las experiencias negativas, entendiendo por tales aquellas que no aconsejan el uso de estas utilidades informáticas, también son útiles para fijar el verdadero lugar que deben desempeñar los SCS en los diferentes niveles educativos.

Adicionalmente, y de forma solapada, planea otra cuestión no menos importante: ¿hasta qué punto pueden aceptarse como auténticas demostraciones los resultados obtenidos con este tipo de herramientas?

¿cómo pueden incorporarse los sistemas de cálculo simbólico (SCS) a la realización de demostraciones, en particular, y a la enseñanza de las matemáticas, en general?

¿hasta qué punto pueden aceptarse como auténticas demostraciones los resultados obtenidos con este tipo de herramientas?

Demostraciones y sistemas de cálculo simbólico

En general, la esencia de una demostración radica en el desarrollo de una estrategia que combine la aplicación cuidadosa y oportuna de propiedades más o menos complicadas, y el manejo operacional adecuado de los resultados intermedios. Es evidente que la parte más creativa corresponde a la elección de la estrategia a seguir, de tal modo que una manera de medir la elegancia de una demostración no es según la cantidad de cálculos que se deban realizar sino según la cantidad de cálculos que ha evitado la estrategia diseñada. Frente a las situaciones en las que la fuerza bruta y el cálculo tedioso son la única manera de romper la barrera que nos impide alcanzar el objetivo final, se sitúan las «ideas felices» que aclaran el horizonte con un simple razonamiento demoledor. No se debe ocultar que, habitualmente, tras una idea genial se encuentran muchas horas previas de trabajo y de estudio.

Los sistemas de cálculo simbólico de propósito general pueden ser muy útiles y autosuficientes en la realización de operaciones y cálculos, pero no se les puede exigir la responsabilidad del diseño de estrategias acertadas de resolución de problemas genéricos ni, menos aún, se debe pretender que generen demostraciones precisas de teoremas como el de la función implícita. Los SCS no son demostradores automáticos de teoremas, sino potentes calculadoras con algunos conocimientos de matemáticas.

En el mejor de los casos, introducir los datos adecuadamente puede ser suficiente para que se resuelva el ejercicio planteado, pero esto no libera al usuario de la comprensión del problema ni del conocimiento mínimo de interacción con el programa. A fin de cuentas y para facilitar el uso a aquellos que no están avezados en la metodología de la programación, los sistemas de cálculo simbólico se colocan en un nivel superior al que ocupan los conocidos lenguajes de programación de alto nivel. De hecho, sus instrucciones son programas realizados mediante esos lenguajes. Por otra parte, de todos es conocido que sin un buen programa, un lenguaje de programación no es capaz de obtener, por sí mismo, ni buenos ni malos resultados.

Sin embargo, los resultados intermedios siempre van a proporcionar un mayor conocimiento de las dificultades que hay que superar y, en este sentido, los sistemas de cálculo simbólico se perfilan como una poderosa herramienta que puede servir para establecer nuevas estrategias o para modificar las inicialmente escogidas.

Demostraciones mediante cálculos

Muchas propiedades matemáticas se demuestran realizando operaciones que expresen el mismo resultado de formas diferentes. Esto permite añadir nuevas interpretaciones al resultado inicial, extender su aplicación a otros casos análogos o simplificar algunos cálculos posteriores. Quien conoce la mecánica de las operaciones, y no se equivoca en su ejecución, puede realizar la correspondiente demostración sin grandes problemas, y en un periodo razonable de tiempo. La mayor parte de las propiedades de los determinantes, puede encuadrarse en este tipo de demostraciones mediante cálculos.

Determinantes de matrices

Para comprobar que el determinante de una matriz cuadrada M puede calcularse sumando los productos de cada elemento de la primera fila de M y su adjunto –menor acompañado de signo– correspondiente, basta realizar los cálculos y simplificar los resultados hasta llegar a la conclusión de que los dos términos de la igualdad coinciden.

Es seguro que un SCS no sería el primero en establecer esta propiedad; con certeza, no sería capaz de interpretar que un diferente agrupamiento de los términos conduce a otra expresión equivalente. Sin embargo sí puede emplear su potencia de cálculo para verificar la mencionada igualdad para matrices cuadradas de «prácticamente» cualquier orden.

En concreto, dada la matriz cuadrada de orden 4[1]:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

el valor, completamente desarrollado, de su determinante vale[2]:

$$\begin{aligned} |M| = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} \\ & +a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24} - a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} + a_{21}a_{12}a_{34}a_{43} \\ & -a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} + a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} - a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} + a_{21}a_{42}a_{33}a_{14} \\ & +a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} - a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} + a_{31}a_{22}a_{43}a_{14} - a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} \\ & +a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} - a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} + a_{41}a_{12}a_{33}a_{24} \\ & -a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24} + a_{41}a_{32}a_{23}a_{14} \end{aligned}$$

y la suma de los productos de los elementos de la primera fila por su menor acompañado del signo correspondiente es[3]:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{4} (-1)^{(1+j)} M_{1j} \left|\mathrm{Menor}(M,1,j)\right| = \\ & a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} - a_{22}a_{34}a_{43} + a_{32}a_{43}a_{24} - a_{32}a_{23}a_{44} + a_{42}a_{23}a_{34} - a_{42}a_{33}a_{24}) \\ & -a_{12}(a_{21}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{34}a_{43} + a_{31}a_{43}a_{24} - a_{31}a_{23}a_{44} + a_{41}a_{23}a_{34} - a_{41}a_{33}a_{24}) \\ & +a_{13}(-a_{31}a_{22}a_{44} - a_{21}a_{42}a_{34} + a_{41}a_{22}a_{34} + a_{21}a_{32}a_{44} - a_{41}a_{32}a_{24} + a_{31}a_{42}a_{24}) \\ & -a_{14}(a_{21}a_{32}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{33} + a_{31}a_{42}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{43} + a_{41}a_{22}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{23}) \end{aligned}$$

Para comprobar que ambos resultados coinciden pueden tomarse varios caminos: restar y simplificar para llegar al valor 0[4]; sacar factor común en el valor del determinante a los elementos de la primera fila y observar que la expresión resultante coincide con la de la suma; desarrollar los términos del sumatorio aplicando la propiedad distributiva y llegar hasta la expresión del determinante, etc. En concreto, la fórmula demostrada es:

$$|M| = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{(1+j)} M_{1j} \left|\mathrm{Menor}(M,1,j)\right|$$

Evidentemente, si en vez de emplear los elementos de la primera fila, se emplean los de cualquier otra, se obtienen fórmulas equivalentes. Y si se utilizan columnas en lugar de filas, el resultado es el mismo.

Con el esquema propuesto, Maple 7 es capaz de demostrar estas igualdades para matrices cuadradas de dimensión n, con la única limitación de la capacidad de la máquina con la que se trabaje. Estos cálculos deben entenderse como verdaderas demostraciones porque serían los mismos cálculos que realizaría el «demostrador» humano, si eligiera este camino. Sin embargo, en sentido estricto, no se puede admitir como una demostración genérica independiente de la matriz cuadrada considerada, porque el «rompe-demostraciones» siempre puede escoger una dimensión lo suficientemente grande para que no haya máquina capaz de almacenar tanto dato. Verdaderamente, se habría demostrado que para dimensiones matriciales entre 1 y el límite de la máquina, la igualdad se verifica. Por eso, la abstracción teórica resulta necesaria hasta completar la habitual frase: *para cualquier dimensión* n...

Por otra parte, la información obtenida al realizar las operaciones puede resultar esencial en la elaboración de una demostración genérica. Por ejemplo, es muy sencillo comprobar[5] que:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+b_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

1 El comando de Maple 7 utilizado para construir la matriz M es >M:=Matrix(4, (i,j)->a[i,j]);.

2 Una vez cargado el *package* LinearAlgebra con el comando >with(LinearAlgebra);, la asignación del valor del determinante de la matriz M al nombre *DM* se realiza mediante >DM:=Determinant(M);.

3 Para calcular esta suma y asignarla a la expresión *SM*, se puede invocar >SM:=add((-1)^(1+j)*M[1,j]*Determinant(Minor(M,1,j)), j=1..4);.

4 La respuesta de Maple 7 a >simplify(DM-SM);, es 0.

5 Maple 7 es capaz de hacer esta comprobación pidiéndole que calcule los determinantes y simplifique.

y observar que la esencia de la demostración radica en la aplicación de la propiedad distributiva, que es válida para cualquier dimensión en la que nos movamos.

Operadores vectoriales

Los operadores vectoriales como la divergencia, el rotacional, el gradiente o el laplaciano, de gran utilidad en física e ingenierías, verifican entre ellos propiedades con importantes interpretaciones pero cuya comprobación es meramente operacional. Un ejemplo de estas propiedades es la comprobación de que la divergencia del rotacional de un campo vectorial, *F*, dos veces diferenciable con continuidad en el espacio tridimensional es siempre cero:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

donde únicamente se necesita comprobar que el campo considerado cumple las condiciones de diferenciabilidad, conocer el funcionamiento de los operadores involucrados y simplificar para llegar al resultado final[6].

Otro ejemplo en la misma línea es la comprobación de que el producto escalar[7] habitual en $\mathbb{R}^3$ es lineal en cada una de sus componentes: basta operar y agrupar términos para llegar a la igualdad de los elementos.

Como los operadores divergencia y rotacional ya están incorporados a Maple 7, así como el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^3$, el SCS comprueba inmediatamente estas propiedades haciendo uso de su potencia de cálculo simbólico. Claramente, los resultados proporcionados pueden entenderse como demostraciones porque los cálculos y simplificaciones efectuados no varían un ápice de los que manualmente se hubieran realizado empleando lápiz y papel.

Fórmulas trigonométricas

Las fórmulas que transforman productos de senos y cosenos en sumas y diferencias de estas funciones se encuentran en la misma situación que las propiedades anteriores: un simple comando permite pasar de una expresión a otra[8].

Sin embargo, a la inversa, partiendo de la suma o diferencia de funciones trigonométricas es muy difícil llegar al producto equivalente. En particular, aun conocida la igualdad, no puede aplicarse en los procesos habituales de simplificación a no ser que expresamente se especifique. Maple 7 se encuentra en la situación –ni infrecuente, ni paradójica– de ser capaz de alcanzar un resultado pero incapaz de aplicarlo convenientemente.

Por otra parte, las fórmulas que, conocidas las razones trigonométricas de un ángulo, permiten calcular las del ángulo mitad no están disponibles en forma simbólica. En consecuencia, tampoco pueden aplicarse si alguna vez resulta necesario.

Un mecanismo que permite reutilizar las fórmulas o identidades ya establecidas –ya sea por el SCS o por cualquier otro medio– es la creación de una tabla que las recoja para su posterior consulta y aplicación. En definitiva, hay que almacenar el conocimiento generado ya que esto no se realiza automáticamente y, además, hay que enseñar a Maple las cosas que no sabe.

Consideraremos que IgualdadesTrigonométricas es una tabla[9] donde se almacenan igualdades ya comprobadas y que involucran funciones trigonométricas. Allí estarán recogidas, entre otras, las conocidas fórmulas de transformación de sumas en productos y las de las razones del ángulo mitad en función del ángulo dado. Para aplicarlas hay que consultar la tabla convenientemente[10].

Convergencia de series

De forma clásica –debido a que el cálculo de la suma de una serie suele ser tarea complicada–, para el estudio de las series numéricas o funcionales se establecen, en primer lugar, resultados teóricos que permiten asegurar si una serie es convergente o no sin necesidad de proceder al cálculo de su valor; posteriormente –una vez comprobada la convergencia–, se puede intentar calcular dicho valor, utilizando diversas técnicas que no siempre producen buenos resultados. La potencia de cálculo que desarrollan los sistemas de cálculo simbólico, permite invertir en muchos casos este proceso. Así, si se puede calcular directamente la suma de una serie, tiene poco sentido estudiar teóricamente su convergencia, de la misma manera que si teóricamente se llega a la conclusión de que la serie no es convergente, tampoco tiene mucho sentido intentar calcular su valor.

Utilizando un simple comando[11] de Maple 7, se puede saber que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

lo que disipa todo tipo de dudas sobre la convergencia de esa serie.

Lo mismo sucede con esta otra un poco más complicada:

6 Maple 7 dispone en el *package* linalg de los comandos curl y diverge que calculan, respectivamente, el rotacional y la divergencia de un campo vectorial tridimensional *F(x, y, z)*. El resultado de ejecutar la línea >diverge(curl(F(x,y,z),[x,y,z]), [x,y,z]);, es cero

7 El comando DotProduct del *package* LinearAlgebra calcula el producto escalar de dos vectores y el comando is responde true cuando es capaz de verificar la relación sobre la que se le pregunta. La combinación >is(lambda*DotProduct(<x,y,z>, <u,v,w>)=DotProduct(Multiply (lambda, <x,y,z>), <u,v,w>));, produce como salida true.

8 La respuesta a >combine (2*sin((A+B)/2)*sin((A-B)/2));, es, como cabría esperar: -cos(A)+sin(B).

9 >IgualdadesTrigonométricas:= compiletable([sin(B)-cos(A)= 2*sin((A+B)/2)*sin((A-B)/2)]);, genera la tabla IgualdadesTrigonométricas que, en este caso, sólo tendría una entrada, pero que puede ser ampliada y consultada con posterioridad.

10 Una vez introducida la correspondiente igualdad, la ejecución de la línea >tablelook (sin(x+h)-sin(x), IgualdadesTrigonométricas);, proporciona 2*cos(x+h/2) *sin(h/2).

11 >sum(1/n^2, n=1..infinity);.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{(\ln 10)^n} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} 1 \cdot (\ln 2 + \ln 5)}{2\cos 1 \cdot \ln 2 + 2\cos 1 \cdot \ln 5 - (\ln 2)^2 - 2\ln 2 \cdot \ln 5 - (\ln 5)^2 - 1}$$

o en formato numérico[12]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{(\ln 10)^n} = 0{,}5080502959$$

Después de estos resultados, parece fuera de sitio buscar un criterio de convergencia que corrobore la bondad de los cálculos.

Sin embargo, cualquier respuesta de Maple 7 tiene que ser convenientemente interpretada para no incurrir en errores. Si únicamente observamos la solución que se nos ofrece, tal vez caigamos en la tentación de afirmar que la serie de números reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}$$

es convergente para cualquier valor real de α, ya que la invocación > Sum(alpha^n/ /n, n=1..infinity)=sum(alpha^n/n, n=1..infinity);, proporciona la respuesta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} = -\ln(1-\alpha)$$

Está claro que una inspección no muy profunda junto con un conocimiento mínimo del comportamiento del logaritmo neperiano, pone de manifiesto que este resultado no siempre es un número real. En particular, si suponemos que $|\alpha| \geq 1$, no se puede hablar de convergencia porque el término general de la serie no tiende a cero. Sólo hay convergencia cuando $|\alpha| < 1$. En consecuencia, el resultado anterior es cierto si se cumplen algunas restricciones.

La razón por la que Maple 7 responde de esta manera, es porque el desarrollo en serie de potencias de la función compleja de variable compleja

$$f(z) = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

en un disco centrado en el punto $z_0 = 0$, y de radio la unidad es precisamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

12 >evalf(sum(sin(n)/ln(10)^n, n=1..infinity));.

13 La respuesta de Maple a >iscont(sin(x), x=-infinity..infinity);, es true. Como su propio nombre indica, el comando iscont dice, en algunos casos, si una función es continua o no.

14 Tanto >is(limit(sin(x+h), h=0, left) = limit(sin(x+h), h=0, right));, como >is(limit(sin(x) =sin(x));, proporcionan la respuesta true.

15 La respuesta proporcionada por Maple a las líneas >asume(x, RealRange(-infinity, infinity)); >is (-abs(x) <= sin(x) and sin(x)<= abs(x)); >is (-1<=cos(x) and cos(x)<= 1);, es true, de donde puede deducirse que se cumple $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y $|\cos x| \leq 1$.

como no se tiene ninguna información sobre α se opta por proporcionar la salida anterior aunque no sea satisfactoria en general.

Continuidad de las funciones trigonométricas

A veces, los datos que manejan los sistemas de cálculo simbólico pueden impedir el proceso de demostración debido a que la evidencia del resultado es tan persistente que resulta difícil bucear en la o las razones que conducen a las aseveraciones emitidas. Por ejemplo, si buscamos una demostración de la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ nos encontramos con verdaderas dificultades porque Maple 7 sabe que la función es continua y no hay manera de sacarle de su obsesión[13].

Es evidente que, aunque la respuesta sea correcta y proporcione información veraz, no se puede entender como una demostración en sentido estricto. Tal vez se nos puede ocurrir que la coincidencia de los límites laterales con el valor de la función en cada punto sería una prueba irrefutable, pero Maple 7 sigue respondiendo lacónicamente que sí se verifican las igualdades[14].

Pero surge la duda de si el procedimiento empleado para calcular los límites laterales ha sido precisamente que la función es continua, con lo cual, verdaderamente, se caería en un círculo vicioso del que habría que salir para que la demostración fuera válida. Para eludir este escollo, nos vemos «obligados» a intentar una demostración clásica de la continuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, ya que, sabiendo que se trata de una función continua, también queremos saber por qué lo es.

Para realizar la demostración habitual se empleará la definición de continuidad: *la función real de variable real $f(x)$, es continua en el punto x_0 si, y solamente si,* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, *tal que si* $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

A lo largo del proceso de prueba se necesitarán propiedades que Maple 7 conoce, pero no aplica directamente salvo que el usuario así lo indique. Por ejemplo, alguna de las fórmulas previamente almacenadas en la tabla IgualdadesTrigonométricas. También se utilizarán las desigualdades $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ y $|\cos x| \leq 1$, válidas para cualquier valor real de x. La demostración de estas últimas es inmediata[15].

El primer paso consiste en la conversión, mediante consulta a la tabla de fórmulas trigonométricas, de la diferencia de senos en un producto coseno/seno.

> Paso1:=abs(sin(x)-sin(x[0])) = tablelook(abs(sin(x)-sin(x[0])), IgualdadesTrigonométricas);

$$\text{Paso1} := |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 2\left|\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_0\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x_0\right)\right|$$

Observando que

$$\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \le 1$$

se obtiene la desigualdad:

> Paso2:=rhs(Paso1)<=subs(cos(x/2+x[0]/2)=1,rhs(Paso1));

$$Paso2:=2\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right| \le 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right|$$

Aplicando que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right| \le |x-x_0|$$

se llega a

> Paso3:=rhs(Paso2)<=subs(abs(sin(x/2-x[0]/2))=abs(x-x[0])/2,rhs(Paso2));

$$Paso3:=2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right| \le |x-x_0|$$

Consecuentemente, si fijado un valor de $\varepsilon > 0$, se toma $\delta = \varepsilon$, se verifica la definición de continuidad para cualquier valor real x_0. Por tanto, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto de la recta real, como ya sabíamos.

También resulta interesante comprobar e interpretar gráficamente el resultado alcanzado. En la figura 1, aparece la representación gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ cerca del punto $x_0 = 1$ pudiéndose observar fácilmente que cuando $\varepsilon = 10^{-1}$ y $\delta = \varepsilon$, la diferencia de las imágenes de la función en el punto x_0 y en puntos que no se alejan de él más que δ, esto es $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$, se mantiene dentro de una banda de anchura 2ε.

Conviene resaltar que no se trata de una mera ilustración esquemática, sino que, tanto la función[16] $f(x) = \operatorname{sen} x$, como las líneas representadas son todo lo fidedignas que las capacidades gráficas de Maple 7 permiten. Así pues, si tenemos reparos para afirmar que la curva mostrada corresponde exactamente con la función seno en el intervalo escogido, podemos consolarnos con que tal vez nuestros sentidos no sabrían diferenciar la buena de la aproximada.

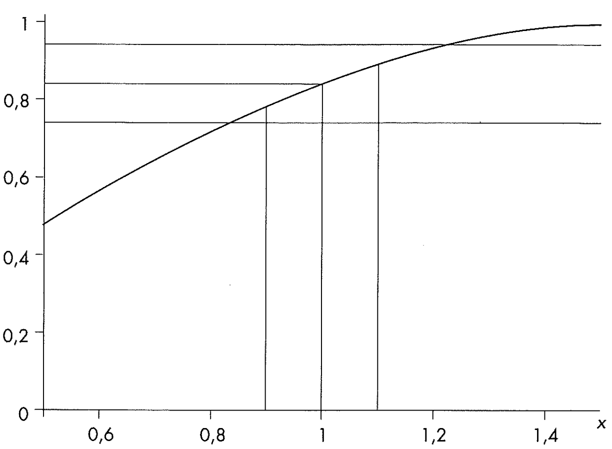


Figura 1. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, es continua en $x = 1$

La rapidez de los sistemas de cálculo simbólico en el manejo de objetos matemáticos facilita la búsqueda de posibles contraejemplos.

Demostraciones mediante contraejemplos

Una estrategia habitual, en la realización de demostraciones, es la utilización de casos conocidos cuya existencia sea incompatible con la tesis a demostrar; la localización de contraejemplos permite asegurar que la tesis propuesta no se cumple en general. La rapidez de los sistemas de cálculo simbólico en el manejo de objetos matemáticos facilita la búsqueda de posibles contraejemplos. En el siguiente ejemplo, se utiliza el «conocimiento» matemático de Maple 7 para corroborar la existencia de funciones diferenciables con continuidad que no son de clase dos.

La función definida a trozos[17]

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \ge 0 \end{cases}$$

es diferenciable con continuidad, pero su derivada segunda no existe en toda la recta real, con lo cual, puede afirmarse que la existencia y continuidad de la primera derivada no asegura ni la existencia ni la continuidad de la segunda.

A la pregunta directa. ¿es la función $f(x)$ dos veces diferenciable con continuidad respecto a la variable x?, Maple 7 responde false[18] y, además, proporciona la clase máxima de diferenciabilidad donde se encuadra $f(x)$, y el o los puntos donde falla la diferenciabilidad. En este caso, asegura que es de clase uno y que en el punto $x = 0$ no existe la derivada segunda.

Para verificar la certeza de estas afirmaciones, se puede calcular la primera

16 El comando >plot(sin(x), x=0.5..1.5);, genera la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

17 Maple 7 es capaz de manejar este tipo de funciones como si se tratara de funciones definidas por una única expresión. El comando que construye esta función es >f:=x->piecewise(x<0, x^2, x^3);.

18 Basta escribir >isdifferentiable(f(x), x, 2, 'la');. En la variable la se almacenan la clase de diferenciabilidad y los puntos donde pueden presentarse problemas.

derivada[19] de $f(x)$, comprobar que es continua[20], calcular la expresión general de la segunda derivada[21] y particularizar en el punto $x = 0$[22].

Las utilidades gráficas también permiten generar imágenes[23] como la figura 2, donde se puede observar, de manera visual, el comportamiento de la función $f(x)$ y de sus dos primeras derivadas.

19 >df:=D(f);, proporciona la función derivada de la función *f*(*x*). La expresión de la derivada, tomando *x* como variable, se obtiene con >df(x);, y el valor de la derivada en un punto concreto (por ejemplo, $x = 4$), con >df(4);.

20 >iscont(df(x), x=-infinity..infinity); proporciona como salida true.

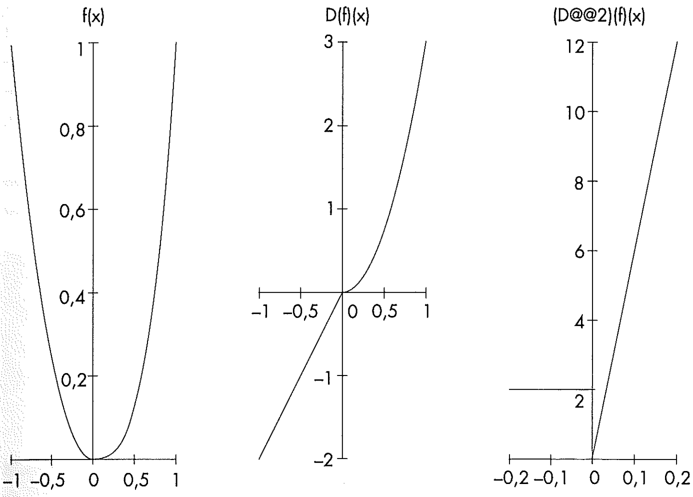


Figura 2. La función *f*(*x*) y sus dos primeras derivadas

Casos patológicos

Todos los resultados que proporcionen los programas informáticos en general, y los sistemas de cálculo dimbólico en particular, tienen que ser tamizados por el sentido común, o por el conocimiento de los mecanismos que desarrollan los comandos o las instrucciones a los que se recurre. De no ser así, puede llegarse a situaciones comprometidas y contradictorias.

A simple vista, y sin necesidad de realizar grandes cálculos, nadie con un conocimiento mínimo de matrices y determinantes dudaría en responder que el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

depende del valor del parámetro a porque cuando $a = 0$, el determinante de la matriz A se anula y cuando $a \neq 0$, vale exactamente $-a$. En definitiva, el rango de A es dos siempre y cuando a sea distinto de cero; en este caso, el rango es uno. Sin embargo, tras introducir convenientemente la matriz[24], cargar los comandos necesarios[25], y preguntar por el rango[26] de A, la respuesta de Maple 7 es que el rango de A vale exactamente dos, sin diferenciar entre los valores de a.

No puede admitirse como correcto que el rango de A sea dos para cualquier valor de a. Sin embargo, Maple 7 sí calcula perfectamente el determinante[27] de A, ya que la respuesta proporcionada es $-a$, y no es capaz de afirmar que $-a$ sea siempre distinto de cero[28].

La explicación a este comportamiento un tanto errático (sabe cuánto vale el determinante de una matriz, sabe cuándo se anula y que de hecho alguna vez lo hace, pero no deduce que esto origina diversas situaciones), puede deberse a que verdaderamente se infiere que el rango es máximo porque el determinante no se anula ya que el símbolo a y el símbolo 0 no son lo mismo, al menos desde el punto de vista tipográfico. Nosotros somos capaces de realizar la abstracción de suponer que el símbolo a no representa a la letra a sino a cualquier valor numérico, tendremos que preguntarnos si lo que para nosotros es tan habitual puede serlo también para una máquina.

21 >ddf:=(D@@2)(f);, proporciona la segunda derivada de la función *f*(*x*). En general, si se sustituye 2 por cualquier otro entero *n*, se obtiene la derivada *n*-ésima.

22 La respuesta a >ddf(0);, es undefined.

23 >plots[display](matrix(1,3,[plot(f,-1..1, title=`f(x)`), plot(D(f),-1..1, title=`D(f)(x)`), plot((D@@2)(f), -2..2, title=`(D@@2)(f)(x)`)]));, genera una imagen con tres gráficas.

24 >A:=<<0,1>|<a,0>>;, asigna a *A* la matriz deseada.

25 Con >with(LinearAlgebra);, se incorporan al núcleo los comandos de LinearAlgebra, entre ellos Determinant y Rank.

26 >Rank(A);, debería proporcionar el rango de la matriz *A*.

27 >Determinant(A);, origina como salida $-a$.

28 La respuesta a >is(-a<>0);, no es ni true ni false sino FAIL, que debe entenderse como que Maple 7 no puede inclinarse ni por una ni por otra.

Conclusiones

A la vista de los ejemplos presentados, se puede afirmar que los sistemas de cálculo simbólico llevan incorporada una gran cantidad de resultados matemáticos que pueden ser utilizados para la obtención de otros más complejos, mediante manipulación simbólica. Como es razonable, no disponen de todos los resultados posibles, pero existen medios para añadir aquellos que falten.

Para los sistemas de cálculo simbólico las propiedades y relaciones inicialmente conocidas, no llevan aparejada su demostración. Más que propiedades que haya que establecer se trata de axiomas con los que trabajar.

En general, los pasos que hay que seguir para la resolución de un problema o la realización de una demostración, tienen que ser indicados por el usuario, no de forma programada sino decidiendo –en cada momento y en función de los resultados intermedios– el camino más conveniente para seguir. Es muy importante la capacidad del usuario para interpretar correctamente las respuestas del sistema de cálculo simbólico, de tal modo que, alguien que no tenga unos fundamentos matemáticos suficientemente sólidos, puede verse «engañado» si acepta sin reflexión todas las contestaciones que se ofrecen.

En definitiva, el papel de los sistemas de cálculo simbólico en el proceso de demostración se reduce al de una herramienta de cálculo rápida y eficaz que, además de proporcionar resultados concretos, también sirve para informar sobre el cumplimiento de propiedades intermedias que puedan ser de utilidad en el proceso global. Esto tiene una aplicación inmediata en todas aquellas demostraciones que están basadas en el cálculo, pero resulta insuficiente en otras donde hay que encadenar razonamientos abstractos.

Bibliografía

AMILLO, J., F. BALLESTEROS, R. GUADALUPE y L. MARTÍN (1996): *Cálculo: Teoría, Problemas y Sistemas de Computación Matemática*, Mc-Graw Hill, Madrid.

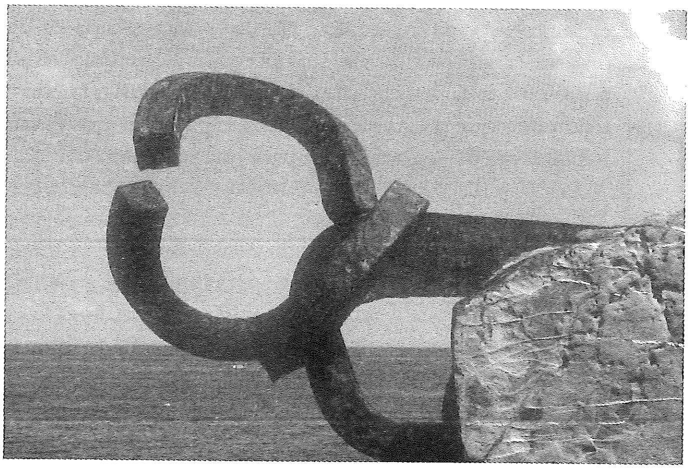
BALLESTEROS, F. y L. MARTÍN (2001): «Los Sistemas de Cálculo Simbólico como recurso docente en el Cálculo Integral», *Los educadores ante el reto de las tecnologías de la información y la comunicación. Actas del Congreso Internacional de Informática Educativa 2001*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

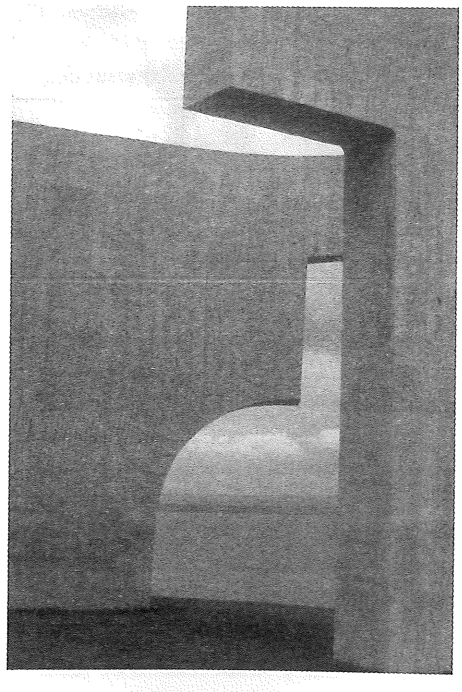
MARTÍN, L. y J.A. VELASCO (1999): «Los Sistemas de Computación Matemática como recurso didáctico de apoyo para la presentación del concepto de derivada», *IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Matemáticas de ENCIGA, Lugo.

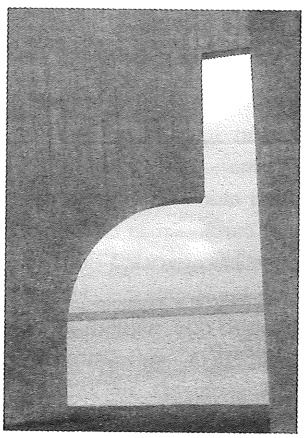
MARTÍN, L. y J.A. VELASCO (2000): «Sesiones prácticas de matemáticas con herramienta informática: Integración impropia», VI *Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*, Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas, Burgos.

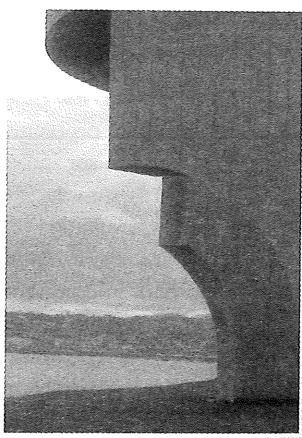
MARTÍN, L. y J.A. VELASCO (2001): «Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico», *Suma*, n.° 38, 47-52.

Lorenzo Javier Martín
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación.
Universidad Politécnica de Madrid.
Juan Antonio Velasco
IES Ángel del Alcázar. Segovia.
Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas









Homenaje a Eduardo Chillida

(Fotos: Pilar Moreno)

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 19-28

Aplicación de un modelo de decisión para clasificar un conjunto de posibles causas de mal comportamiento de los estudiantes en el aula

Francisco Chiclana Parrilla

ARTÍCULOS

El objetivo de este trabajo es el de presentar una aplicación, llevada a cabo en un centro de enseñanza secundaria, de un modelo de decisión diseñado para situaciones de toma de decisiones con múltiples expertos (TDME) con información heterogénea. En concreto, dicho modelo fue utilizado para clasificar, de mayor a menor grado de influencia, un conjunto de posibles causas de mal comportamiento de los estudiantes en el aula, de acuerdo con las opiniones de un grupo de profesores de dicho centro.

SE PODRÍA AFIRMAR que el buen funcionamiento de un centro de enseñanza depende en gran medida del diseño de los mecanismos y vías de participación que se les ofrecen a los miembros de la comunidad educativa por parte de éste. Naturalmente, poco se puede decir de las vías de participación, puesto que éstas vienen reguladas por la legislación vigente (LODE, LOGSE, LOPEG y Reales Decretos 82/1996 y 83/1996 básicamente); sin embargo, es responsabilidad de los centros educativos el diseñar los mecanismos adecuados para que la participación de todos sea efectiva y democrática. Y esto es así, porque de lo contrario las decisiones que pudieran tomarse corren el riesgo de no ser asumidas y por consiguiente de ser inoperantes.

El que la mayoría de las personas todavía denominen las matemáticas como ciencias exactas y las sigan asociando con el rigor y la eficacia, puede ser aprovechado para conseguir una aceptación, por parte de los diferentes sectores de la comunidad educativa, en la introducción de modelos matemáticos en los procesos de toma de decisiones, en el sentido de ser considerado como un mecanismo de participación efectiva y democrática. De hecho, el uso de modelos de decisión para ayudar a tomar una decisión final es una costumbre cada vez más extendida en el mundo empresarial. Estos modelos, comúnmente llamados *sistemas soportes* de ayuda a la toma de decisiones, mejoran notablemente el rendimiento de la gestión empresarial (Vincke, 1992).

El objetivo de este trabajo es el de presentar una aplicación de un modelo de decisión diseñado para ser aplicado a situaciones de toma de decisiones en las que intervengan un grupo de personas diferentes, que llamaremos de toma de decisiones con múltiples expertos (TDME). En concreto, dicho modelo fue utilizado para clasificar, de mayor a menor grado de influencia, un conjunto de posibles causas de mal comportamiento de los estudiantes en el aula, para lo que se solicitó a un grupo de profesores, pertenecientes a diferentes departamentos de un instituto de educación secundaria (IES), sus opiniones al respecto. Ni que decir tiene que la información obtenida tras esta aplicación es esencial para cualquier centro de enseñanza que se plantee poner en marcha soluciones para mejorar tal comportamiento y por consiguiente el clima de convivencia dentro de dicho centro.

Modelo de decisión con múltiples expertos e información heterogénea

En un proceso de TDME se distinguen claramente dos etapas (figura 1): (1) la etapa de identificación, que consiste en la selección de alternativas y de criterios apropiados, y (2) la etapa de elaboración o proceso de resolución, que consiste en la selección tanto de un método adecuado de tratamiento, agregación y explotación de la información proporcionada como de un método de mayoría ponderada. La primera etapa no es abordada pues, como bien apuntan Arrow y Raynaud (1989), ésta suele ser una operación aproximativa, en el sentido de que los conjuntos de alternativas y criterios son diferentes para cada problema de TDME, y lo más frecuente es que sus límites no estén claramente fijados. La metodología en este artículo consiste pues en suponer dichos conjuntos conocidos, discretos y finitos. Por consiguiente, en un problema de TDME se dispone de un conjunto de expertos, $E = \{e_1,\ldots, e_m\}$, $(m \geq 2)$, cada uno de los cuales proporciona sus preferencias sobre un conjunto de opciones o alternativas, $X = \{x_1,\ldots, x_n\}$, $(n \geq 2)$, con el objetivo final de obtener una solución, que estará compuesta de una o un conjunto de alternativas, que sea(n) la(s) de mayor aceptación por parte de todo el grupo de expertos.

...la mayoría de los modelos de selección para problemas de TDME propuestos hasta la fecha adoptan la suposición de homogeneidad en la información proporcionada por los expertos...

En cuanto a la expresión de opiniones, señalar que la mayoría de los modelos de selección para problemas de TDME propuestos hasta la fecha adoptan la suposición de homogeneidad en la información proporcionada por los expertos, es decir asumen que los expertos presentan sus preferencias utilizando todos una misma estructura de representación de la información. En este sentido, podemos citar problemas de TDME en los que la información es presentada en forma de órdenes de preferencia (Tanino, 1984), mediante funciones (o valores) de utilidad (Seo y Sakawa, 1985), a través de relaciones de preferencia multiplicativas (Saaty, 1980) o difusas (Tanino 1988). Sin embargo, ésta no es una suposición realista puesto que cada experto tiene sus propias ideas, actitudes, motivaciones y personalidad, por lo que es natural pensar que expertos diferentes proporcionen sus preferencias de forma distinta. También es posible que se presenten situaciones de toma de decisión en las que los expertos no son capaces de expresar sus opiniones usando todos la misma estructura de representación que los demás o bien prefieren estructuras alternativas. Todo esto, nos convence de la necesidad de asumir que la información que se maneja en las situaciones de TDME sea de naturaleza diversa o heterogénea, por lo que supondremos

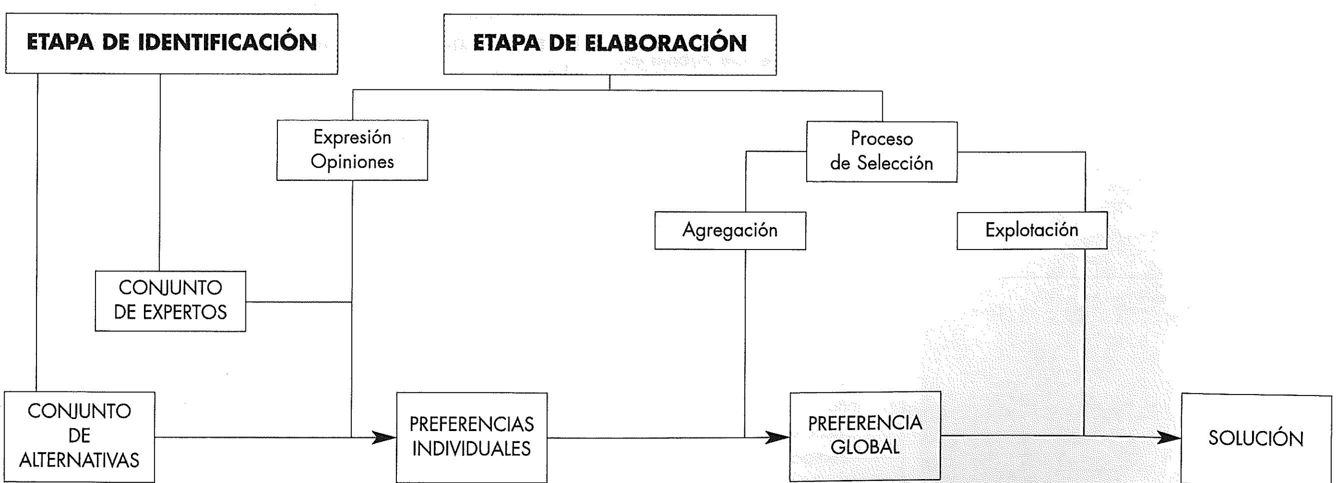


Figura 1. Esquema del Proceso de TDME

que cada experto puede expresar sus preferencias mediante una cualesquiera de las estructuras de representación anteriormente citadas: *órdenes de preferencia, valores de utilidad, relaciones de preferencia multiplicativas* y *relaciones de preferencia difusas.*

Esta suposición conlleva trabajar en un marco general de heterogeneidad en la representación de las preferencias, abarcando y extendiendo los habituales modelos desarrollados bajo la suposición de homogeneidad. Además, plantea obviamente como primera etapa de nuestro proceso de resolución el estudio de la relación existente entre las diferentes estructuras de representación de preferencias, para de esta forma poder obtener una representación uniforme que las englobe. De esta forma, la etapa de elaboración del proceso de decisión que proponemos para resolver un problema de TDME con información heterogénea sigue el siguiente esquema (figura 2).

1. *Representación uniforme de la información.* La información heterogénea del problema se transforma, mediante la aplicación de diversas funciones de transformación, en información homogénea.
2. *Aplicación de un proceso de selección,* mediante el cual se obtiene el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las preferencias individuales de cada uno de los expertos. Los procesos de selección clásicos de TDME a su vez se aplican generalmente en dos fases (Fodor y Roubens, 1994):

   2.1. *Fase de agregación* con la que se transforma un conjunto de elementos en un único elemento representativo del mismo (Dubois y Koning, 1991). En los problemas de TDME la agregación se realiza sobre las preferencias individuales que los expertos proporcionan sobre el conjunto de alternativas, de forma que la información obtenida tras el proceso de agregación, llamada preferencia global o de conjunto, sea resumen y reflejo de las propiedades contenidas en ellas.

   2.2. *Fase de explotación* o proceso por el que se transforma la información global sobre las alternativas en una ordenación global de las mismas. Para ello se utiliza un grado de selección de alternativas o función que indica el grado de cumplimiento de una propiedad que caracteriza a una alternativa (bien respecto a las opiniones de un individuo o de un grupo). Las alternativas que cumplen esa propiedad con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto de alternativas solución (Herrera, Herrera-Viedma y Verdegay, 1995).

Por otro lado, uno de los elementos básicos subyacentes en los procesos de TDME es el concepto de mayoría, pues una solución ha de ser la(s) opción(es) de mayor aceptación por parte del grupo, en el sentido de que la mayoría de sus miembros han de aceptarla. De todos es sabido que la concepción que tenemos de tal concepto de mayoría es variable según las situaciones en la que nos encontremos. En muchos casos, mayoría significa la mitad más uno; sin

...uno de los elementos básicos subyacentes en los procesos de TDME es el concepto de mayoría...

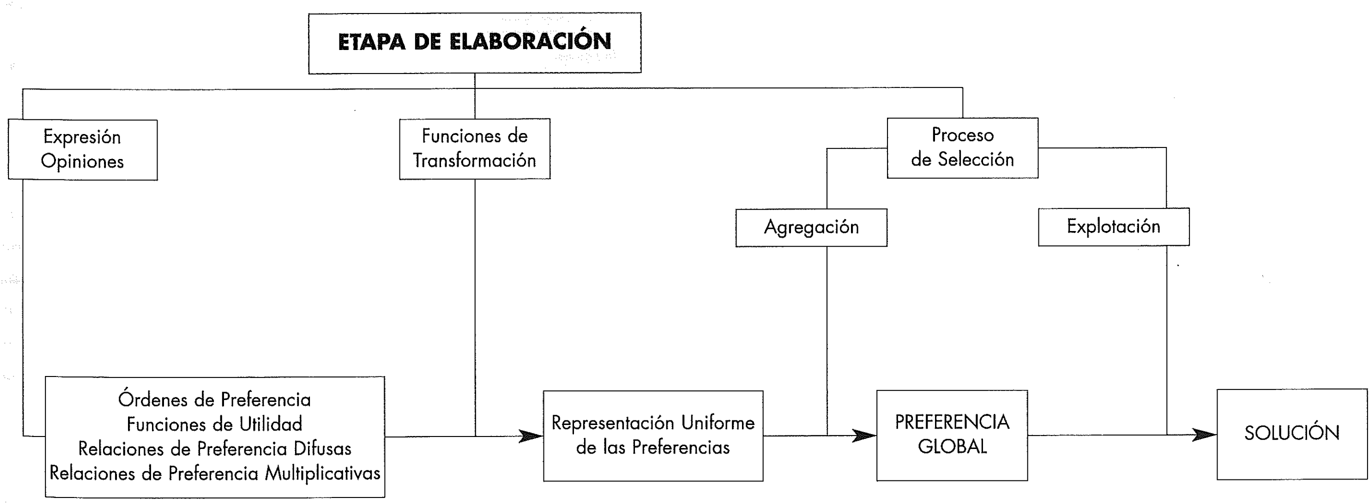


Figura 2. Etapa de Elaboración para TDME con Información Heterogénea

embargo, en situaciones de gran trascendencia dicha mayoría requiere un aumento significativo de tal porcentaje. Por ejemplo, en la evaluación final de curso en cualquier IES, la decisión que el equipo educativo ha de tomar para que un estudiante promocione de curso requiere del consenso o unanimidad, es decir todos los profesores del equipo educativo han de estar de acuerdo con tal decisión. No obstante, «en el supuesto de que este consenso no fuera posible, esta decisión será adoptada por mayoría de dos tercios del mencionado equipo» (instrucciones de 21 de abril de 1998, Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía). Nosotros, en la aplicación del anterior modelo de decisión proponemos implementar un concepto de mayoría flexible y cercana a la que de ella tenemos las personas, la cual suele ser vaga o difusa (Kacprzyk, 1986), en el sentido de tener distinto significado en diferentes situaciones, tanto en la fase de agregación como en la fase de explotación de la información, por lo que el proceso de selección que proponemos aplicar en los problemas de TDME e información heterogénea es el dado en la figura 3.

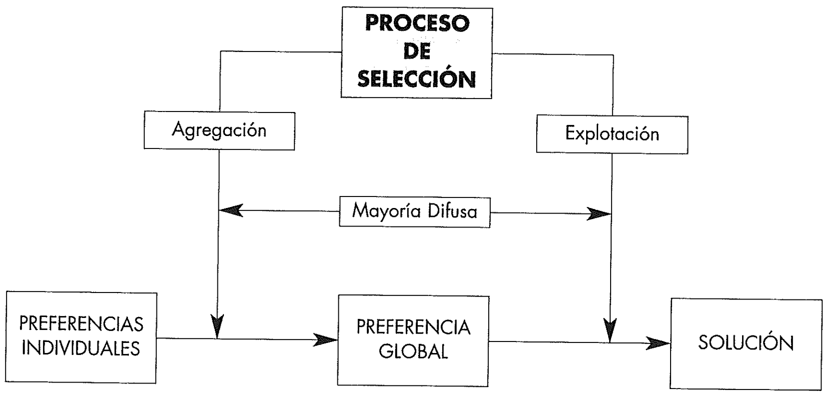


Figura 3. Proceso de Selección para TDME con Información Heterogénea

Causas de mal comportamiento en el aula. Etapa de identificación

La extensión de la obligatoriedad de la enseñanza hasta los 16 años en nuestro país constituye una de las medidas más acertadas de la LOGSE, en primer lugar porque es una medida de igualdad social, pues favorece a aquellos estudiantes que anteriormente abandonaban los estudios al finalizar la antigua EGB, y que en su mayoría provenían de las clases sociales económicamente más desfavorecidas, pero sobre todo porque en el largo plazo nuestra sociedad también saldrá beneficiada ya que, sin la menor duda, el nivel cultural de nuestro país se verá incrementado. Sin embargo, una de las consecuencias que conlleva esta medida, y que se ha convertido en uno de los principales problemas hoy en día en los centros educativos no universitarios, y en mayor medida en los IES, es el del mal comportamiento de los estudiantes en el aula. Encontrar las causas de este mal comportamiento y la influencia que tienen sobre éste, así como las posibles respuestas positivas a las mismas, tiene gran interés no sólo para el colectivo de profesores y profesoras sino también para los propios estudiantes, los padres y madres de éstos, los Departamentos de Educación, etc. Nuestro objetivo en este artículo no es el de proporcionar la solución a este problema; nuestro objetivo es el de, una vez diagnosticado un conjunto de posibles causas del mal comportamiento, el clasificarlas de mayor a menor influencia, para de esta forma priorizar las respuestas que el centro educativo debe poner en marcha para tratar de solucionar el problema.

Cohen, Manion y Morrison en (1996) citan un estudio en el que una muestra de profesores de diferentes escuelas secundarias inglesas fueron preguntados por sus opiniones respecto a las causas que influyen directamente sobre el mal comportamiento de los estudiantes en el colegio. Entre estas causas fueron citadas:

C_1 Problemas en el hogar.

C_2 Falta de interés en la materia o desinterés en el colegio.

C_3 Inestabilidad psicológica o emocional del estudiante.

C_4 Ausencia autoestima.

C_5 Antipatía hacia el profesor.

C_6 Consumo de drogas.

Tomando estas seis causas como el conjunto de alternativas de nuestro modelo de decisión, procedimos a presentárselas a un grupo de ocho profesores de distintas especialidades del IES Mediterráneo de Estepona (Málaga), nuestro conjunto de expertos. A este conjunto de profesores se les solicitó que aportaran sus opiniones acerca de la influencia directa que estas causas tenían en el mal comportamiento de sus estudiantes en el aula, para poder obtener una ordenación global de las anteriores causas de mayor a menor influencia en tal comportamiento, con el objetivo de poder utilizar esta información como base para un estudio de las posibles medidas a introducir en el centro y mejorar el clima de convivencia, que con tanta rapidez está siendo deteriorado en los últimos años. Se prepararon para este propósito cuatro cuestionarios, uno para cada estructura diferente de preferencias. El resto del artículo se dedica a exponer la etapa de elaboración de nuestro modelo de decisión, mediante la aplicación práctica del mismo al problema planteado.

...con el objetivo de poder utilizar esta información como base para un estudio de las posibles medidas a introducir en el centro y mejorar el clima de convivencia, que con tanta rapidez está siendo deteriorado en los últimos años.

Opiniones de los profesores. Representación de preferencias

Los ocho profesores se dividieron en cuatro grupos de dos, de tal forma que cada grupo presentaría sus opiniones mediante una de las cuatro diferentes estructuras de representación de preferencias. El que trabajemos con estas estructuras de representación se debe al hecho de ser las más usadas en los trabajos de toma de decisión publicados en los últimos años en revistas internacionales como *Fuzzy Sets and System*, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, *European Journal of Operational Research*, etc.

Órdenes de preferencia

En este caso, un experto proporciona sus preferencias sobre un conjunto de alternativas mediante la ordenación de las mismas, de acuerdo con su punto de vista, de mejor a peor. En nuestro caso, a dos de los profesores se les presentó la anterior lista de seis posibles causas de mal comportamiento junto con el escrito siguiente: «Usando tu propia experiencia en la práctica de la enseñanza, expresa tu opinión, asociando un número de 1 (la más influyente) a 6 (la menos influyente) a cada una de las posibles causas que influyen en el mal comportamiento de los estudiantes en el aula». Las respuestas que dieron estos dos profesores, e_1 y e_2 fueron:

$$e_1: O^1 = \{2, 1, 3, 6, 4, 5\}$$

$$e_2: O^2 = \{1, 3, 4, 2, 6, 5\}$$

Según esto, las ordenaciones de las causas para cada uno de los dos profesores son $\{C_2, C_1, C_3, C_5, C_6, C_4\}$ y $\{C_1, C_4, C_2, C_3, C_6, C_5\}$, lo que significa que las que ejercen mayor influencia en el comportamiento incorrecto de los estudiantes en el aula son la falta de interés en la materia o desinterés en el colegio (C_2) para el primer profesor y los problemas en el hogar (C_1) para el segundo profesor, y las de menor influencia la ausencia de autoestima (C_4) y la antipatía hacia el profesor (C_5), respectivamente.

Valores de utilidad

Un experto proporciona sus preferencias a través de un conjunto de valores de utilidad cuando asocia a cada alternativa un valor entre 0 y 1 que representa el grado de cumplimiento de su punto de vista por parte de dicha alternativa, de tal forma que a mayor valor asociado mejor satisface dicha alternativa el objetivo del experto. En nuestro caso, se les presentó el siguiente escrito a otros dos profesores, e_3 y e_4: «Usando tu propia experiencia en la práctica de la enseñanza, expresa tu opinión, asociando un número de 0 (influencia nula) a 10 (influencia absoluta o total) a cada una de las posibles causas que influyen en el mal comportamiento de los estudiantes en el aula». Los valores proporcionados fueron, una vez divididos por 10:

$$e_3: U^3 = \{0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}8;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}1\}$$

$$e_4: U^4 = \{0{,}3;\ 0{,}9;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}7;\ 0{,}5\}$$

Relaciones de preferencia multiplicativas

En este caso, junto con el siguiente, las preferencias se obtienen mediante la comparación de las alternativas dos a dos, de tal forma que a cada par de alternativas (x_i, x_j) se le asocia un valor a_{ij} con el significado siguiente: «La alternativa x_i es a_{ij} veces preferida a la alternativa x_j». Los valores así proporcionados se recogen en una matriz o relación de preferencia, $A = (a_{ij})$, que asumimos verifica la siguiente condición de reciprocidad multiplicativa: $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$; $a_{ij} > 0\ \forall\ i, j$. Además, es habitual tomar como rango para los elementos de la matriz A el intervalo cerrado [1/9, 9], y en particular, siguiendo las indicaciones de Saaty (1980, 1994), la siguiente escala de valores:

- $a_{ij} = 1$ las alternativas x_i y x_j son igual de importantes (II).
- $a_{ij} = 3$ la alternativa x_i es más importante que x_j(MI).
- $a_{ij} = 5$ la alternativa x_i es bastante más importante que x_j (BMI).

$a_{ij} = 7$ la alternativa x_i es muchísimo más importante que x_j (MMI).

$a_{ij} = 9$ la alternativa x_i es absolutamente más importante que x_j (AMI).

Valores int. Por ejemplo, entre II y MI, podríamos localizar AMI, algo más importante, en cuyo caso asociaríamos el valor $a_{ij} = 2$.

Utilizando la anterior escala se le presentó un cuestionario a dos profesores, para que opinaran al respecto sobre la razón de intensidad de la influencia en el mal comportamiento de una causa sobre otra. Las relaciones de preferencia multiplicativas que proporcionaron fueron:

$$e_5 : A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/4 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 1/4 & 4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/6 & 2 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/6 & 1/9 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_6 : A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/4 & 1/2 & 3 & 1/6 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1/3 \\ 4 & 1/2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/5 & 1/3 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

Relaciones de preferencia difusas

En este caso a cada par de alternativas (x_i, x_j) se le asocia un valor $p_{ij} \in [0, 1]$ que representa el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j. Los valores así proporcionados se recogen en una matriz o relación de preferencia, $P = (p_{ij})$, que asumimos verifica la siguiente condición de reciprocidad aditiva: $p_{ij} + p_{ji} = 1$, $\forall\ i, j$. Usando la terminología de conjuntos difusos P es un subconjunto difuso del conjunto $X \times X$, por lo que a una relación de este tipo se le denomina relación de preferencia difusa (Tanino, 1988).

Como en el caso anterior, se propuso un cuestionario a los dos profesores restantes del grupo, utilizando en este caso los valores (0,5; 0,6; 0,75; 0,9; 1) para (II, MI, BMI, MMI, AMI); así como la posibilidad de proporcionar juicios de compromiso entre estos pares de valores. Las relaciones de preferencia difusas proporcionadas fueron:

$$e_7 : P^7 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}85 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}55 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}65 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}95 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}85 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}15 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$e_8 : P^8 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}75 & 0{,}95 & 0{,}6 & 0{,}85 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}55 & 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}65 \\ 0{,}25 & 0{,}45 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}45 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}85 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}15 & 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}55 & 0{,}6 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Proceso de resolución

El proceso de resolución del modelo de decisión que aplicamos consta de una primera fase consistente en la obtención de una representación uniforme de las preferencias y una segunda fase, o proceso de selección, con la que obtener la solución final del problema de TDME.

Representación Uniforme de las preferencias

De las cuatro estructuras de representación de preferencia anteriores, las relaciones de preferencia difusas constituyen la estructura más usada y estudiada en la literatura para modelar las opiniones de los expertos sobre un conjunto de alternativas en los problemas de toma de decisión...

De las cuatro estructuras de representación de preferencia anteriores, las relaciones de preferencia difusas constituyen la estructura más usada y estudiada en la literatura para modelar las opiniones de los expertos sobre un conjunto de alternativas en los problemas de toma de decisión, pero sobre todo para agregar las preferencias de éstos (Kitanik, 1993). Necesitamos, por tanto, un mecanismo para unificar las cuatro estructuras de representación de preferencias. Este mecanismo de transformación permitirá obtener una relación de preferencia difusa individual para cada uno de los expertos. En (Chiclana, 2000) hemos estudiado las funciones de transformación de órdenes de preferencia, funciones de utilidad y relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas. Este estudio puede resumirse en los tres siguientes resultados:

Órdenes de preferencia y Relaciones de preferencia difusas

«Siendo $O^k = \{o^k(1), \ldots, o^k(n)\}$ un orden de preferencia sobre un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j es

$$p_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[1 + F\left(o^k(j) - o^k(i)\right) - F\left(o^k(i) - o^k(j)\right)\right]$$

con F una función creciente».

Aplicando la función anterior con

$$F\left(o^k(j)-o^k(i)\right)=\frac{1}{2}\frac{o^k(j)-o^k(i)}{n-1}$$

a los órdenes de preferencia de los profesores e_1 y e_2, obtenemos las siguientes relaciones de preferencia difusas:

$$P^1=\begin{pmatrix}0,5 & 0,4 & 0,6 & 0,9 & 0,7 & 0,8\\ 0,6 & 0,5 & 0,7 & 1 & 0,8 & 0,9\\ 0,4 & 0,3 & 0,5 & 0,8 & 0,6 & 0,7\\ 0,1 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0,4\\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,7 & 0,5 & 0,6\\ 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,6 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix}0,5 & 0,7 & 0,8 & 0,6 & 1 & 0,9\\ 0,3 & 0,5 & 0,6 & 0,4 & 0,8 & 0,7\\ 0,2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,7 & 0,6\\ 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & 0,9 & 0,8\\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,5 & 0,4\\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,6 & 0,5\end{pmatrix}$$

Valores de utilidad y Relaciones de preferencia difusas

«Para cada conjunto de valores de utilidad, $U^k = (u_1^k,\ldots, u_n^k)$, sobre un conjunto de alternativas, $X = \{x_1,\ldots, x_n\}$, dados sobre la base de una escala positiva de razón, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre x_j es:

$$p_{ij}^k=\begin{cases}\dfrac{s(u_i^k)}{s(u_i^k)+s(u_j^k)} & si \quad (u_i^k,u_j^k)\neq(0,0)\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad (u_i^k,u_j^k)=(0,0)\end{cases}$$

donde s: $[0, 1] \to R^+$ es una función creciente y continua, verificando $s(0) = 0$».

Las relaciones de preferencia difusas que obtenemos aplicando la función anterior con $s(u_i^k) = (u_i^k)^2$ a los conjuntos de valores de utilidad de los profesores e_3 y e_4 son:

$$P^3=\begin{pmatrix}0,5 & 0,69 & 0,12 & 0,2 & 0,36 & 0,9\\ 0,31 & 0,5 & 0,06 & 0,1 & 0,2 & 0,8\\ 0,88 & 0,94 & 0,5 & 0,64 & 0,8 & 0,98\\ 0,8 & 0,9 & 0,36 & 0,5 & 0,69 & 0,97\\ 0,64 & 0,8 & 0,2 & 0,31 & 0,5 & 0,94\\ 0,1 & 0,2 & 0,02 & 0,03 & 0,06 & 0,5\end{pmatrix}$$

…las manifestaciones más naturales de tal mayoría difusa son los llamados cuantificadores lingüísticos difusos como por ejemplo «bastantes», «casi todos», «muchos más que la mitad», etc.

$$P^4=\begin{pmatrix}0,5 & 0,1 & 0,36 & 0,69 & 0,16 & 0,26\\ 0,9 & 0,5 & 0,84 & 0,95 & 0,62 & 0,76\\ 0,64 & 0,16 & 0,5 & 0,8 & 0,25 & 0,39\\ 0,31 & 0,05 & 0,2 & 0,5 & 0,08 & 0,14\\ 0,84 & 0,38 & 0,75 & 0,92 & 0,5 & 0,66\\ 0,74 & 0,24 & 0,61 & 0,86 & 0,34 & 0,5\end{pmatrix}$$

Relaciones de preferencia multiplicativas y Relaciones de preferencia difusas

«Sea $A^k = (a_{ij}^k)$ una relación de preferencia multiplicativa sobre un conjunto de alternativas, $X = \{x_1,\ldots, x_n\}$. La relación de preferencia difusa, $P^k = (p_{ij}^k)$, asociada con A^k se obtiene mediante la aplicación de la transformación siguiente

$$p_{ij}^k=g\left(a_{ij}^k\right)=\frac{1}{2}\left(1+\log_9 a_{ij}^k\right)».$$

Las relaciones de preferencia difusas asociadas a las relaciones de preferencia multiplicativas de los profesores e_5 y e_6 son:

$$P^5=\begin{pmatrix}0,5 & 0,34 & 0,25 & 0,82 & 0,75 & 0,87\\ 0,66 & 0,5 & 0,25 & 0,18 & 0,82 & 0,91\\ 0,75 & 0,75 & 0,5 & 0,94 & 0,91 & 1\\ 0,18 & 0,82 & 0,06 & 0,5 & 0,34 & 0,75\\ 0,25 & 0,18 & 0,09 & 0,66 & 0,5 & 0,82\\ 0,13 & 0,09 & 0 & 0,25 & 0,18 & 0,5\end{pmatrix}$$

$$P^6=\begin{pmatrix}0,5 & 0,13 & 0,18 & 0,34 & 0,75 & 0,09\\ 0,87 & 0,5 & 0,66 & 0,82 & 0,91 & 0,25\\ 0,82 & 0,34 & 0,5 & 0,75 & 0,87 & 0,82\\ 0,66 & 0,18 & 0,25 & 0,5 & 0,75 & 0,91\\ 0,25 & 0,09 & 0,13 & 0,25 & 0,5 & 0,97\\ 0,91 & 0,75 & 0,18 & 0,09 & 0,03 & 0,5\end{pmatrix}$$

Proceso de selección. Mayoría difusa

Ya hemos mencionamos que el concepto de mayoría es un concepto variable, en el sentido de ser distinto para distintas situaciones, por lo que se hace necesaria la adopción de una concepción de mayoría más flexible y cercana a la que de ella tenemos las personas, es decir, un concepto de mayoría que se ha dado en llamar mayoría difusa.

Es fácil ver que las manifestaciones más naturales de tal mayoría difusa son los llamados cuantificadores lingüísticos difusos como por ejemplo «bastantes», «casi todos», «muchos más que la mitad», etc. (Zadeh, 1983). Sin embargo, los métodos formales convencionales no son adecuados para representarlos, pues en éstos suelen considerarse tan sólo dos cuantificadores, que son «al menos uno» y «todos», por lo que en años recientes han sido propuestos cálculos de proposiciones cuantificadas lingüísticamente basados en lógica difusa (Yager, 1991). Estos cálculos han sido aplicados para introducir una mayoría difusa, representada por un cuantificador lingüístico difuso, en los modelos de toma de decisiones en grupo (Kacprzyk, Fedrizzi y Nurmi, 1992).

Zadeh distinguió entre dos tipos de cuantificadores lingüístico, *absolutos* y *proporcionales* o *relativos*. Los primeros se utilizan para representar cantidades que son absolutas en naturaleza tales como por ejemplo *aproximadamente 5*, *más de 5* o *menos de 5*, y están relacionados con el concepto de número de elementos. Los cuantificadores proporcionales se utilizan para representar expresiones lingüísticas, como por ejemplo, *al menos la mitad* o *la mayor parte*. Cualquier cuantificador del lenguaje natural puede ser representado como un cuantificador proporcional o, supuesto conocida la cantidad de elementos en consideración, como un cuantificador absoluto. Funcionalmente, un cuantificador lingüístico puede ser de tres tipos, *creciente*, *decreciente* o *unimodal*. En el caso de un cuantificador relativo creciente la función de pertenencia más simple que se emplea para representarlo es:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le r < a \\ \dfrac{r-a}{b-a} & si \quad a \le r \le b \\ 1 & si \quad b < r \le 1 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestran tres ejemplos de cuantificadores lingüísticos relativos crecientes donde los parámetros (a, b) son (0; 0,5), (0,3; 0,8) y (0,5; 1) respectivamente.

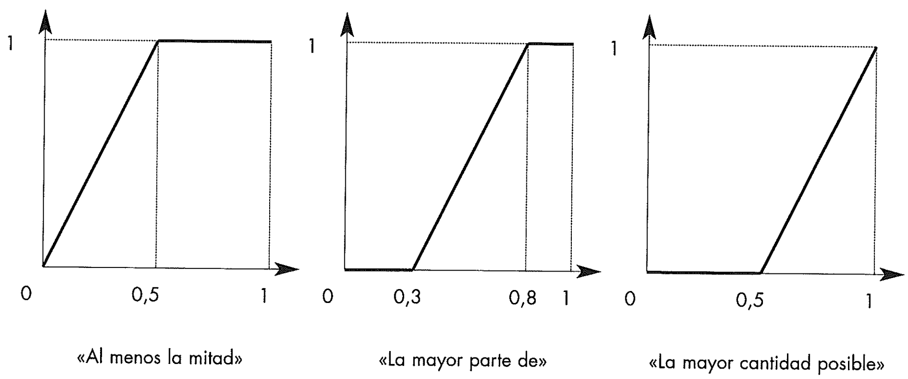


Figura 4. Cuantificadores lingüísticos relativos crecientes

En nuestro ejemplo, utilizando los cuantificadores lingüísticos difusos «la mayor parte de» y «la mayor cantidad posible», para implementar el concepto de mayoría difusa, tenemos respectivamente:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le r < 0,3 \\ 2r - 0,6 & si \quad 0,3 \le r \le 0,8 \\ 1 & si \quad 0,8 < r \le 1 \end{cases} \qquad y \qquad Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le r < 0,5 \\ 2r - 1 & si \quad 0,5 \le r \le 1 \end{cases}$$

Cualquier cuantificador del lenguaje natural puede ser representado como un cuantificador proporcional o, supuesto conocida la cantidad de elementos en consideración, como un cuantificador absoluto.

Agregación

En esta fase se obtiene una relación de preferencia difusa colectiva $P^c = (p_{ij}^c)$ mediante la agregación de todas las relaciones de preferencia difusas individuales $\{P^1, \ldots, P^m\}$, de tal forma que cada valor $p_{ij}^c \in [0, 1]$, $\forall\ i, j$, represente la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría de los expertos. Para ello, se define (Chiclana, 2000):

$$p_{ij}^c = \Phi_Q\left(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m\right)$$

siendo Φ_Q una función u operador, que llamamos de agregación, en cuya definición se implementa el concepto de mayoría difusa mediante el cuantificador lingüístico Q.

Según Bonissone y Decker (1986), existen tres clases básicas de operaciones de agregación: conjuntivas, disyuntivas y promedios. Para las dos primeras formas de agregación se utilizan t-normas y t-conormas respectivamente, mientras que para la tercera se utilizan los llamados operadores de promedio. Un ejemplo de estos últimos lo constituyen los operadores de promedio ordenados ponderados que se definen como combinaciones lineales convexas de cada uno de los elementos a agregar, los cuales previamente se ordenan de mayor a menor. Estos operadores, llamados operadores OWA (abreviaturas del inglés *ordered weighted averaging*) fueron propuestos por Yager (1988) y constituyen una transición continua entre el operador mínimo y máximo. Mediante la aplicación de este tipo de operadores, la expresión de p_{ij}^c se reduce a:

$$p_{ij}^c = \Phi_Q\left(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot q_{ij}^k$$

siendo $(q_{ij}^1, \ldots, q_{ij}^m)$ el conjunto de valores $(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m)$ ordenados de mayor a menor, y $(w_1, \ldots, w_n)$ un vector de parámetros o pesos verificando $w_i \in [0,1]$ y

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

El problema que presentan este tipo de operadores es el del cálculo de los parámetros de la citada combinación lineal convexa. Yager en (1994) proporcionó un procedimiento para el cálculo de estos parámetros haciendo uso del cuantificador lingüístico difuso que representa el concepto de mayoría difusa que se desea implementar en el proceso de selección de alternativas. En el caso de un cuantificador lingüístico relativo creciente Q, viene dado por la ecuación:

$$w_k = Q\left(\frac{k}{m}\right) - Q\left(\frac{k-1}{m}\right), \ k = 1,\ldots, m$$

En nuestro ejemplo, para agregar las ocho relaciones de preferencia difusas individuales, si utilizamos el cuantificador lingüístico difuso «la mayor parte de», obtenemos como vector de pesos (0; 0; 0,15; 0,25; 0,25; 0,25; 0,1; 0), y como relación de preferencia difusa colectiva:

$$P^c = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,44 & 0,37 & 0,56 & 0,65 & 0,64 \\ 0,47 & 0,5 & 0,58 & 0,65 & 0,62 & 0,75 \\ 0,54 & 0,36 & 0,5 & 0,71 & 0,68 & 0,64 \\ 0,33 & 0,23 & 0,26 & 0,5 & 0,6 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,27 & 0,29 & 0,5 & 0,75 \\ 0,24 & 0,22 & 0,29 & 0,31 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

donde el valor $p^c_{26} = 0{,}75$ indica que, para la mayor parte de estos ocho profesores, la causa C_2 ejerce una influencia muchísimo mayor en el comportamiento incorrecto de los estudiantes de lo que lo hace la causa C_6, mientras que el valor $p^c_{31} = 0{,}54$ indica que los grados de influencia de las causas C_3 y C_1 son similares para la mayor parte de los profesores, aunque ligeramente mayor el asociado a la causa C_3.

En la resolución de un problema de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias se ha de trabajar con información no homogénea...

Explotación. Grado de dominancia

El valor p^c_{ij} puede considerarse o interpretarse como un valor de dominancia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría de los expertos, en cuyo caso el valor $QGDD_i = \Phi_Q(p^c_{ij}; j=1,\ldots,n)$se interpretaría como el grado de dominancia que la alternativa x_i tiene sobre la «mayoría» del resto de alternativas para una «mayoría» de los expertos (Chiclana, 2000). En esta definición, el concepto de mayoría difusa que se implementa a través de Q no tiene porqué coincidir con el utilizado en la fase de agregación de preferencias. Por otro lado, la definición de este grado de dominancia permite asociar a cada alternativa un valor que se utilizará para producir una clasificación final de las mismas. Finalmente, el conjunto solución X_{sol} constará de las alternativas con máximo grado de dominancia.

En nuestro ejemplo concreto, aplicando el proceso de explotación a la relación de preferencia difusa colectiva, utilizando el cuantificador lingüístico difuso «la mayor cantidad posible» y el correspondiente operador de agregación OWA con vector de pesos (0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3), obtenemos los siguientes valores de dominancia:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$QGDD_i$	0,44	0,52	0,46	0,27	0,29	0,22

Estos valores representan la dominancia que cada alternativa tiene sobre «la mayor cantidad posible» de las alternativas para «la mayor parte de» los profesores. Claramente, la causa que mayor influencia tiene en el comportamiento incorrecto de un estudiante en el instituto, para este grupo de profesores, es la falta de interés en la materia o desinterés general en el colegio (C_2), mientras que el orden colectivo de causas de mayor a menor influencia en el mal comportamiento de los estudiantes es $\{C_2, C_3, C_1, C_5, C_4, C_6\}$, es decir:

C_2 Falta de interés en la materia o desinterés en el colegio.

C_3 Inestabilidad psicológica o emocional del estudiante.

C_1 Problemas en el hogar.

C_5 Antipatía hacia el profesor.

C_4 Ausencia autoestima.

C_6 Consumo de drogas.

Conclusiones

En la resolución de un problema de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias se ha de trabajar con información no homogénea y se han de aplicar procesos de selección de alternativas adecuados y adaptables a situaciones diversas. En este artículo, hemos presentado un ejemplo de la aplicación de un modelo de decisión aplicable a estos problemas de TDME, el cual se basa en las relaciones de preferencia difusas, como estructura de representación base para uniformar las diferentes estructuras con las que se trabaja, y en el concepto de mayoría difusa, lo que permite adaptar dicho modelo a diferentes situaciones de toma de decisiones. Dicho ejemplo pone de manifiesto el potencial de aplicabilidad del modelo de decisión utilizado.

Bibliografía

ARROW, K.J. y H. RAYNAUD (1989): *Opciones Sociales y Toma de Decisiones mediante Criterios Múltiples*, Alianza Editorial, Madrid.

BONISSONE, P.P. y K.S. DECKER (1986): «Selecting Uncertainty Calculi and Granularity», en KANAL, L. (Eds): *Uncertainty in Artificial Intelligence*, North-Holland, 217-247.

COHEN, L., L. MANION y K. MORRISON (1996): *A Guide to Teaching Practice*, Routledge, London.

CHICLANA, F. (2000): *Integración de Modelos de Representación de Preferencias en Problemas de Toma de Decisiones con Múltiples Expertos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

DUBOIS, D. y J.L. KONING (1991): «Social Choice Axioms for Fuzzy Sets Aggregation», *Fuzzy Sets and Systens*, 43, 257-274.

FODOR, J. M. ROUBENS (1994): *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decisión Support*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

HERRERA, F., E. HERRERA-VIEDMA y J.L., VERDEGAY (1985): «A Sequential Selection Process in Group Decsion Making with a Linguistic Assessment», *Information Sciences*, 85, 223-239

KACPRZYK, J. (1986): «Group Decisión Making with a Fuzzy Linguistic Majority», *Fuzzy Sets and Systems*, 18, 105-118.

KACPRZYK, J., M. FEDRIZZI, M. y H. NURMI (1992): «Group Decision Making and Consensus Under Fuzzy Preference and Fuzzy Majority», *Fuzzy Sets and Systems*, (49), 21-31.

KITANIK, L. (1993): *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations: Towards an Unified Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

SAATY, TH.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*, New York, McGraw-Hill.

SAATY, TH.L. (1994): *Fundamentals of Decisión Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, RSW Publications, Pittsburg.

SEO, F. y M. SAKAWA, M. (1985): «Fuzzy Multiattribute Utility Analysis for Collective Choice», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 (1), 45-53.

TANINO, T (1984): «Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making», *Fuzzy Sets and Systems*, (12), 117-131.

TANINO, T. (1988): «Fuzzy Preference Relations in Group Decision Making», en KACPRZYK, K. y M. ROUBENS (Eds.): *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, Springer-Verlag, Berlin, 54-71.

VINCKE, Ph. (1992): *Multicriteria Decision-Aid*, John Wiley & Sons, New York.

YAGER, R.R. (1988): «On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making», *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, (18), 183-190.

YAGER, R.R. (1991): «Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets», *Fuzzy Sets and Systems*, 40, 39-75.

YAGER, R.R. (1994): «Interpreting Linguistically Quantified Propositions», *International Journal of Intelligent Systems*, 9, 541-569.

ZADEH, L.A. (1983): «A Computational to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages», *Computers and Mathematics with Applications*, 9, 149-184.

Francisco Chiclana
IES Guadalpín.
Marbella (Málaga).
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 29-35

Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas)

Pablo Flores Martínez

Parece aceptado que los materiales manipulativos facilitan el aprendizaje de aspectos geométricos y mejoran la percepción espacial. Un aspecto interesante de esta percepción es identificar los huecos y cierres que aparecen en una figura o en una estructura de las que se encuentran en la vida cotidiana. En este artículo se presentan estructuras en alambre con nudos aparentes, que tienen una finalidad lúdica, pero que pueden utilizarse en la enseñanza para facilitar la percepción de huecos y rellenos en el espacio. El estudio de los laberintos en alambre está relacionado con la teoría de nudos, aunque su textura le obliga a tomar en consideración aspectos métricos. Aquí presentamos algunos laberintos, los clasificamos y hacemos consideraciones didácticas sobre los mismos.

ARTÍCULOS

ACTUALMENTE están proliferando materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas. Se nos han hecho familiares los rompecabezas de teselaciones, como el Tangram, los pentominós, etc., así como el cubo soma y sus variantes para la enseñanza de la geometría. Gracias a estos materiales se pueden introducir en clase, de manera lúdica e instructiva, actividades que facilitan la percepción del espacio (con los materiales que exigen el manejo de formas y su relación con la teselación) y el establecimiento de relaciones métricas de comparación directa, como la de superficies y longitudes (con el Tangram, pentominós y similares). Uno de los aspectos más interesantes de la enseñanza de la geometría es la percepción de los huecos y cierres que aparecen en una figura o en una estructura de las que se encuentran en la vida cotidiana. Va difundiéndose el estudio matemático de nudos y redes (Adams, 1994; Coriat y otros, 1989; Gardner, 1956; Pagano, 1987, 2000; Stewart, 1994, 1996, 1998, 2000), así como el tratamiento por grafos de estos temas (Stewart, 1975).

En este artículo abordamos «nudos en alambre», es decir, estructuras en alambre que presentan nudos aparentes, y que tienen una finalidad lúdica, pero que pueden utilizarse en la enseñanza para facilitar la percepción de huecos y rellenos en el espacio. El estudio de los laberintos en alambre afectan de manera directa a la topología, aunque su textura le obliga a tomar en consideración aspectos métricos y de estudios de formas rígidas, que se saldría de esta rama de las matemáticas.

Quiero presentar unos rompecabezas muy antiguos. John Rausch, en su página web, sitúa en 1911 su difusión en conjuntos de puzzles, pero su origen es anterior. Mi afición proviene de una caja de juegos de mis abuelos –principio de siglo–, llamada *Laberintín*; de ahí el llamarlos laberintos en alambre. Aunque no están muy difundidos, aún siguen de actualidad, y el motivo de traerlos a colación es la posibilidad de utilización en clase de matemáticas para favorecer la percepción de aspectos topológicos y métricos de figuras. Se trata de laberintos de alambre, figuras que se pueden encontrar en algunos vendedores ambulantes, generalmente fabricantes de los mismos, o que han llegado a comercializarse en tiendas especializadas, y que pueden adoptar formas variadas y estéticas, además de incluir estructuras ingeniosas que encierran «falsos nudos».

Laberintos de alambre

Un laberinto es *un camino tortuoso en el que a veces es fácil perder el camino sin un guía* (Santarcangeli, 1984). Una forma de encontrar la salida es hacer una representación del mismo (dibujar un laberinto equivalente más simple), en el que aparezcan los caminos, las puertas que cierran, etc. Transformar un laberinto en otro equivalente es hacer una transformación *topológica* del mismo. *La* topología *es el estudio de aquellas propiedades de los objetos geométricos que permanecen inalteradas por* transformaciones continuas *(en ellas no está permitido ni desgarrar ni romper).* Propiedades topológicas *son el número de* agujeros *y número de* aristas (Stewart, 1975).

Con alambres es posible hacer laberintos tridimensionales, representar situaciones basadas en problemas reales, o elaborar pasatiempos para mejorar la visión espacial. Desde hace mucho tiempo existen esos laberintos, aunque su difusión no siempre ha sido fácil. Vamos a presentar algunos modelos de estos laberintos con alambres, y veremos su interés matemático. Estos modelos consisten en estructuras realizadas en alambre rígido, o con cierta elasticidad, en los que aparecen al menos dos piezas, la que llamaremos soporte o pieza fija (que en las figuras aparece en negro), y la pieza a extraer (que aparecerá en gris). En algunos casos estas piezas son iguales, como en el famoso laberinto consistente en dos clavos torcidos que están enlazados (figura 1).

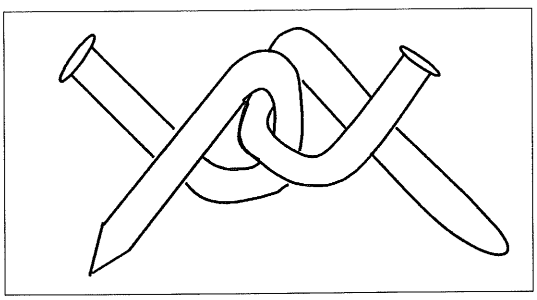


Figura 1. Clavos enlazados

En otros casos, las figuras son distintas, como en el clásico laberinto de la figura 2, en el que la pieza a extraer (en el dibujo, en gris) suele adoptar muchas formas, pero que en este caso adopta la de un ovoide.

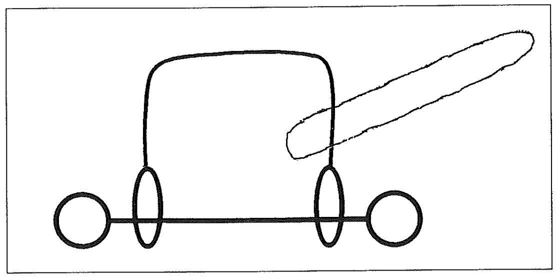


Figura 2

Con alambres es posible hacer laberintos tridimensionales, representar situaciones basadas en problemas reales, o elaborar pasatiempos para mejorar la visión espacial.

Como puede verse en la figura 1, las estructuras de alambre tienen medidas relativas fijas, en este caso, la abertura que tienen los bucles que forman cada clavo es inferior en su punto más próximo al diámetro del clavo, lo que impide que puedan separarse por simple colocación del clavo sobre el hueco que deja el otro. En la figura 2, el ovoide tiene que caber, al menos en su extremo, por la anilla de la figura fija, y la porción que pasa a través tiene que tener una longitud que permita que la anilla de la barra pase por su interior. Por ello, y a diferencia de los *nudos* con cuerdas (ver los artículos divulgativos de Stewart sobre nudos en *Investigación y Ciencia*), los laberintos con alambre introducen aspectos que no son estrictamente topológicos, sino métricos. Entre estos laberintos con alambre, aparecen algunos que combinan alambre y cuerda, los cuales encierran unas posibilidades mixtas, y no los abordaremos en este articulo.

En los laberintos con alambre interesa observar su estructura *topológica* (agujeros, aristas, situación relativa de ellas, etc.), pero también sus medidas (figuras que caben, dimensiones relativas, etc.).

Por ejemplo, en la figura 1 se trata de dos anillos abiertos, con lo que su estructura topológica es trivialmente la de dos segmentos, enlazados por un falso nudo. Si permanecen unidas las dos piezas es debido a su rigidez, y a que la medida del hueco de un clavo no permite salir directamente al otro.

En la figura 2, la pieza fija es un anillo abierto, formado por dos piezas. La pieza curva abraza a la recta con sus dos anillas, pero está abierta por ellas (tiene por tanto dos agujeros). La pieza recta tiene la misma estructura topológica, pero además está enlazada con la anterior al aparecer su segmento entre los agujeros de la otra. No puede salir de la curva por tener unas anillas que no caben por las que lo abrazan. Si convirtiéramos estas piezas fijas en cuerdas, aparecería un falso nudo, ya que al poder cambiar el tamaño de las anillas de la pieza recta, saldrían sin problemas por las anillas de la pieza curva, dejando libre a la pieza móvil, que sí que es una pieza cerrada.

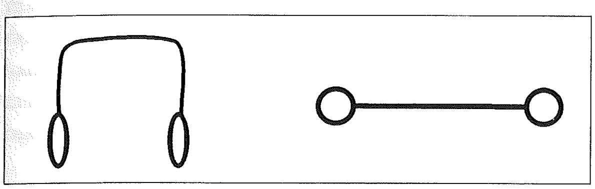


Figura 3. Pieza curva, equivalente topológicamente a la pieza recta

Laberintos de alambre en clase de matemáticas

En clase de matemáticas se pueden utilizar los laberintos de alambre para favorecer la captación de la estructura topológica de una pieza, pero también para hacer que los alumnos se ejerciten en destrezas de estimación y búsqueda de estrategias para extraer unas piezas de otras. Este proceso de captación de estructuras se realiza además, a partir de procesos de ensayo y error, de búsqueda de movimientos posibles, de imaginación de variaciones, etc., lo que hace que el proceso de resolución de un laberinto (resolución de un verdadero problema) sea un ensayo para la captación de estrategias de actuación en otros menesteres.

Con el manejo de laberintos de alambre podemos favorecer la percepción topológica (Carlaville y otros, 1994), y entrar en contacto con la teoría de nudos como campo matemático poco conocido (Pagano 2000; Rousseau, 2000). Siguiendo las posibilidades educativas de esta teoría (Pagano, 1987 y 2000), proponemos que se realicen actividades para que los alumnos lleguen a ejercitarse en estrategias como:

En clase de matemáticas se pueden utilizar los laberintos de alambre para favorecer la captación de la estructura topológica de una pieza, pero también para hacer que los alumnos se ejerciten en destrezas de estimación y búsqueda de estrategias para extraer unas piezas de otras.

a) Estudiar la *estructura*, los movimientos y sus efectos.

b) Buscar criterios para *establecer equivalencias entre estructuras*, tales como las basadas en:

- La estrategia de resolución.
- Los movimientos posibles.
- Los cambios que hacen que varíe la dificultad de resolución del laberinto.
- La forma de las figuras que aparecen, etc.
- Y, el orden de conexión topológica

Por ejemplo, es interesante ver la equivalencia de laberintos como el de la figura 2 y el siguiente, de la figura 4, aunque en este último sólo hay una componente en la pieza fija (gris en la figura).

c) Afrontarlo como *resolución de problemas*, relacionados con situaciones reales, como el que aparece cuando tenemos que transportar un mueble y no sabemos si, y cómo, cabrá por un pasillo o por una puerta (figura 5), cuando tenemos que extraer una pieza de un entramado (una reja, por ejemplo, figura 6), o

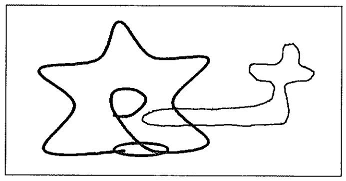


Figura 4. Laberinto equivalente a la figura 2

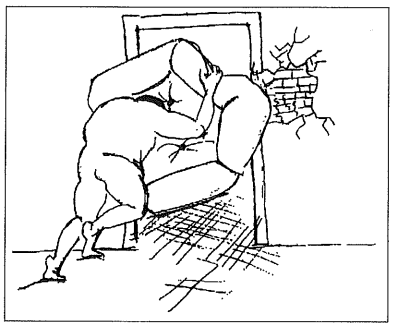


Figura 5. ¿Cabe el sofá por la puerta?

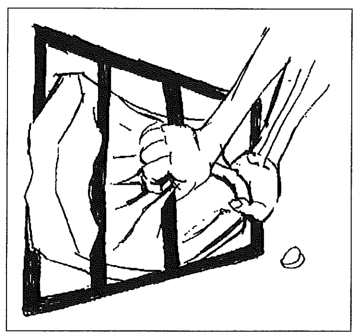


Figura 6: ¿Todo lo que entra sale? ¿Cómo sacar una pieza de una estructura en la que ha quedado atrapada?

cuando tenemos que atar algo de manera que no quede nada suelto, como cuando queremos amarrar una bicicleta sin que quede suelta ninguna pieza de las que son extraíbles (figura 7).

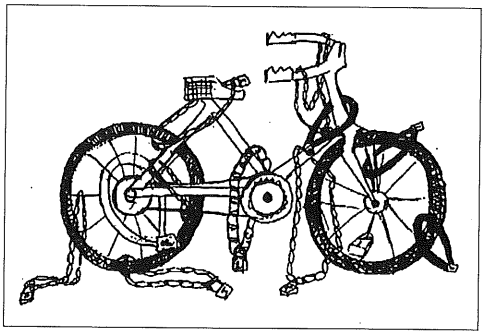


Figura 7: ¿Cómo amarrar la bicicleta con una cadena para que no se puedan llevar ni las ruedas, ni el sillín, etc.?

d) Y... *anticipar la solución sin manipular* (representación mental icónica, movimientos, *aristas* y *agujeros*)

Se trata entonces de que en clase se propongan actividades de manipulación de laberintos de alambre, tratando de resolverlos, probando, buscando movimientos posibles, clasificándolos, etc., pero además yendo un poco más lejos, procurando que se haga una representación física y mental de las figuras, y se llegue a comprender su estructura.

Equivalencia de estructuras según la forma de resolución

Vamos a presentar algunos laberintos de alambre, y para ello hemos adoptado como criterio de agrupación la forma en que se resuelven. Hemos destacado seis grupos. El primero (figura 8, Grupo A) está representado por el de la figura 2, y, en todos ellos, la solución se obtiene intercalando la pieza móvil por la (o las) anilla(s) de alguna de las partes de la pieza fija, y tratando de enlazar con la móvil la parte de la fija que queda fuera de la anilla. El proceso puede ser muy complejo, como se puede observar al ver algunos verdaderos laberintos. Los más actuales han comenzado a emplear anillas sueltas para separar partes de la pieza fija, pero el principio es el mismo.

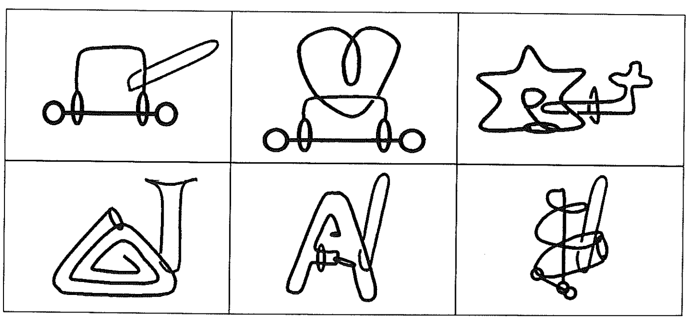


Figura 8. Grupo A: simples

Una generalización del anterior es el grupo B (figura 9), formado por laberintos que están formados por varias piezas fijas semejantes, formando una figura en escala Estas escalas pueden ser bidimensionales, si todos los escalones están en el mismo plano, o tridimensionales, si algunos escalones son perpendiculares entre sí. Su resolución es similar a la del grupo A, pero hay que elaborar un algoritmo que permita el avance de la pieza móvil a lo largo de la escala.

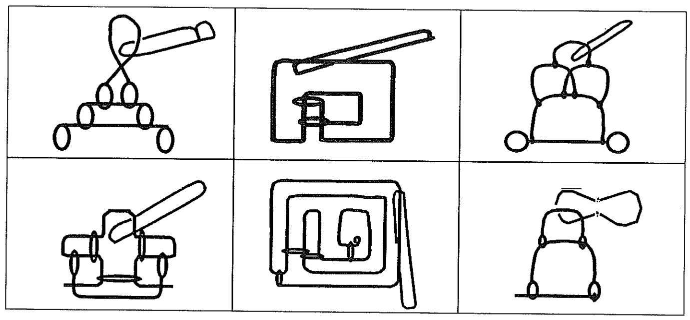


Figura 9. Grupo B: múltiples

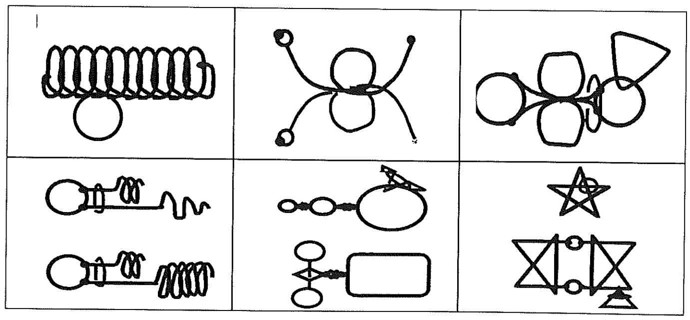


Figura 10. Grupo C: muelles

El grupo C (figura 10) está formado por laberintos en los que predomina la orientación de espiras. El más representativo es el muelle, que acepta dos niveles, aquel en el que la anilla está enlazada a una vuelta, y el que está enlazado a más de una vuelta. La resolución de estos laberintos consiste en buscar la orientación de la espira que permita el avance de la anilla (o de la pieza móvil), basándose a veces, para ello, en la elasticidad del alambre.

El grupo D (figura 11) está formado por laberintos de material rígido, tales como el de la figura 1. De hecho, hay muchas variaciones de los clavos enlazados, tal como puede observarse. En todos ellos hay que buscar la forma de combinar los huecos que aparecen en ambas piezas, tratando de que la suma de las aberturas permita obtener la dimensión suficiente para separar ambas piezas. El grado de dificultad varía, según el tipo de transformaciones que haya que hacer antes de afrontar las dos aberturas. Unos laberintos, especialmente llamativos de este grupo, son los formados por figuras que tienen una ligera diferencia de longitud en sus brazos, lo que hace que no se aprecie a primera vista, y, junto con la necesidad de hacer movimientos de torsión no plana, le dan mucha dificultad.

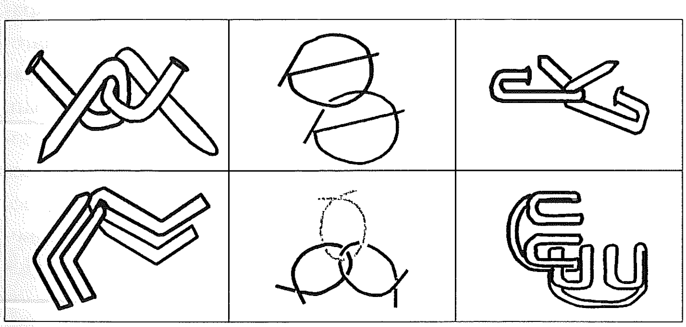


Figura 11. Grupo D: figuras rígidas

El grupo E (figura 12) está formado por aquellos laberintos que presentan una anilla abrazada a la parte más estrecha de dos piezas, generalmente iguales, unidas por anillas. El más conocido es el «ocho tumbado». En todos ellos la anilla sale por medio de una torsión en las piezas simétricas, que dejan la anilla suelta.

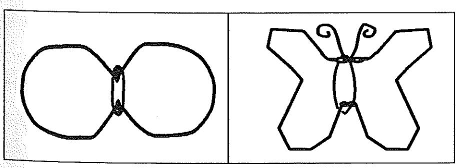


Figura 12. Grupo E: anilla abrazada

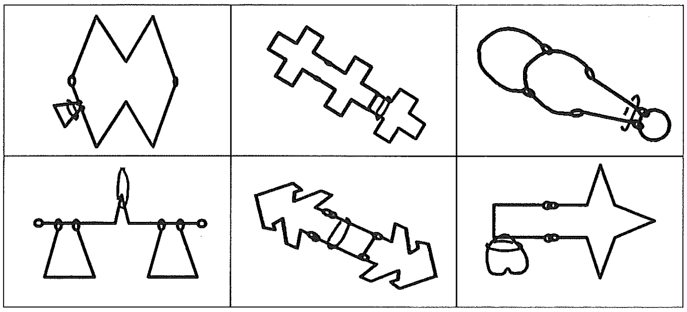


Figura 13. Grupo F: figuras escamoteables

El grupo F (figura 13) lo componen los laberintos en los que la anilla está obstaculizada por una pieza grande, que se puede mover sobre la fija (generalmente aparece enlazada a ella), y la pieza fija está formada, como en el grupo E, por varias piezas que permiten doblarse una sobre otra. Las más conocida son la «doble W» y la «doble cruz». En todas ellas, se trata de llevar la anilla a un extremo en el que se pueda doblar la pieza fija, y hacerla recorrer una pieza que ha quedado abierta al doblarse. Una variación de este grupo está constituido por aquellos laberintos en los que la anilla está abrazada y atrapada por una pieza que puede escamotearse en algún pasaje de la pieza fija. El ejemplo más conocido es la «balanza». Para resolverlo hay que buscar el lugar en el que se puede escamotear la pieza que impide el paso de la anilla, tratando de que pase a través de ella.

Una derivación de este grupo es el grupo G (figura 14), constituido por los laberintos en los que la pieza que soporta la anilla móvil puede salvarse por medio de una articulación de la pieza fija El ejemplo más clásico es la romana. Para resolverlo hay que buscar que la pieza que soporta a la anilla abrace alguna parte de la pieza fija, y deje pasar la anilla a través de la pieza que la soporta.

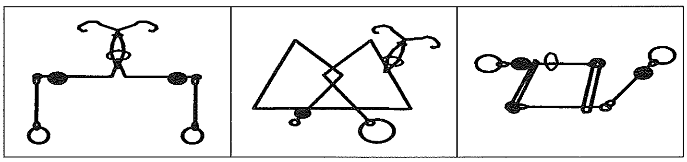


Figura 14. Grupo G: piezas enlazables

Como el interés del artículo es la iniciación en el tratamiento de estos laberintos, hemos elegido laberintos típicos –y su clasificación es relativamente buena (exhaustiva y excluyente)–, pero los autores de los nudos suelen establecer una combinatoria de formas de resolución, lo que hace que algunos laberintos sean mixtos, es decir, presentan dificultades y hay que realizar estrategias de resolución de dos o más de las categorías establecidas. En nuestra clasificación, los hemos asociado a la categoría más complicada, entendiendo que las otras son adornos para ampliar el repertorio.

Conclusiones

Como se puede observar, la mayoría de los laberintos que presentamos son *fáciles de replicar*, con un buen alambre, y tratando de que tengan un tamaño adecuado al material. Es recomendable *copiarlos en papel* e *intentar repetirlos en alambre.* En tiendas especializadas (y algún vendedor ambulante) se encuentran otros modelos. Recomendamos comprar especialmente los laberintos rígidos (grupo D), que son los más complicados de realizar por uno mismo.

En las siguientes páginas web se pueden encontrar diversidad de modelos para copiar, aunque muchas de ellas están destinadas a su venta por correspondencia, y en algunas se incluye información respecto a los nombres y cualidades. En general, se incluye una clasificación del grado de dificultad de resolución.

- <www.puzzles.ca/index.html>, está en inglés, es la más completa en cuanto a variedad y número de puzzles. Cada uno se presenta con una ficha, en la que se indica las dimensiones, la dificultad y algunas referencias, así como los nombres.
- <www.arabesk.nl/index.html>, es una página holandesa con puzzles tipo D, muy artísticos, para su venta. Tiene una buena colección de puzzles en madera.
- <www.johnrausch.com/PuzleWordl/index.html>, es una página particular estadounidense, editada por John Rausch, coleccionista y gran interesado en ellos, por lo que indica los lugares de producción más conocidos y sus orígenes.
- <www.geocities.com/CapeCanaveral/Hall/3964/, es la página de Javier Santos, por lo que está en español, presentando algunos puzzles con comentarios.
- <www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/4795/>.
- <www.hlavolamv.cz>, página checa en elaboración, prometiendo texto en inglés y alemán, pero sólo presentando la checa, aún con pocos laberintos, presenta algunos originales checos.
- www.cs.ubc.ca/spider/scharein>, página americana sobre nudos.

La mayoría de estas páginas me las ha suministrado Carlos Montoya, compañero argentino, quien a partir de una visita a un mercado ha montado una experiencia extraescolar para estudiar estos laberintos (Montoya y Gómez, 2001). Para ello ha realizado un cuidadoso proceso de estudio de las variables que entran en juego, hasta llegar a presentar el lenguaje matemático como una herramienta que permite avanzar en su estudio. La comunicación presentada con el profesor mexicano Guillermo Gómez hace un análisis de la estructura matemática de los laberintos (especialmente los del grupo A), que supone un gran avance en el tratamiento de estos rompecabezas particulares. Desde aquí quiero agradecer sus importantes aportes, y recomendar la consulta de su artículo para profundizar en la relación de los laberintos con la teoría matemática de nudos.

La experiencia de Carlos Montoya nos muestra que es posible utilizar los laberintos de alambre en clase de matemáticas –de la misma forma que propone Pagano (1987 y 2000) con los nudos–, planteando verdaderos problemas, y asumiendo los pasos y estrategias para ello. Sin llegar a estos trabajos de investigación tan elaborados, desde este artículo animamos a introducir los laberintos en clase para estimular la percepción espacial, proponiendo que los *alumnos* manipulen los laberintos como materiales lúdicos, los clasifiquen, traten de incluir nuevos laberintos en las clases definidas de antemano, representen sus estructuras, realicen laberintos con alambre, inventen otros nuevos, etc. Para realizar estas actividades, el alumno tiene que llegar a interiorizar la estructura espacial del laberinto, con lo que estaremos colaborando a generar estrategias de relación con el espacio (Guzmán, 1984). Se pueden sugerir clasificaciones inspiradas en las clasificaciones matemáticas de los nudos (Pagano, 2000; Rousseau, 2000), como el número de cruces, el índice de los puentes o el género del nudo. Nosotros hemos empleado una actividad basada en el uso de laberintos para los futuros psicopedagogos (Oliveras y otros, 1996), tratando de mostrar una estrategia de enseñanza basada en la resolución de problemas y de analizar las teorías del aprendizaje matemático implícito en ellas.

Esperamos que este articulo estimule el empleo de estos materiales, y lleguen a ser de utilidad en la enseñanza de las matemáticas.

Como coleccionista de estos laberintos e interesado en su empleo en la enseñanza, estoy abierto a todas las sugerencias de aquellos que compartan el interés por este tipo de material, así como de los aficionados que estén dispuestos a intercambiar experiencias y modelos.

...introducir los laberintos en clase para estimular la percepción espacial, proponiendo que los alumnos manipulen los laberintos como materiales lúdicos, los clasifiquen, traten de incluir nuevos laberintos en las clases definidas de antemano, representen sus estructuras, realicen laberintos con alambre, inventen otros nuevos, etc.

Referencias

ADAMS, C. C. (1994): *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots,* C. Adams Ed., W. H. Feeman, Nueva York.

CORIAT, M. y otros (1989): *Nudos y nexos,* Síntesis, Madrid.

CARLAVILLA, J. L., y G. FERNÁNDEZ, (1994): *Aventuras topológicas,* Rubes, Madrid.

GARDNER, M. (1956): *Mathematics magic and mystery,* Dover.

GUZMAN, M. (1984): *Juegos matemáticos en la enseñanza,* ponencia presentada en IV JAEM, Santa Cruz de Tenerife.

MONTOYA, C., GGÓMEZ (2001): «Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre». *RELME* 15, <webs.sinectis.com ar/ccrespo/comunica.htm>

Pablo Flores
Facultad de Ciencias
de la Educación.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

OLIVERAS, M. L. y otros (1996): «La formación didáctico matemática del orientador como problema de investigación», *RELIEVE,* vol. 3, n.° 2.

PAGANO, C. (1987): «Noeuds et entrelacs», *PLOT40,* 17-21.

— (2000): «Noeuds et entrelacs», *PLOT93,* 19-24.

ROUSSEAU, CH. (2000): «Les noeuds et la médecine», *PLOT93,* 25-27.

SANTARCANGELI, P. (1984): *El libro de los laberintos,* Siruela, Madrid.

STEWART, I. (1975): *Conceptos de matemática moderna,* Alianza, Madrid.

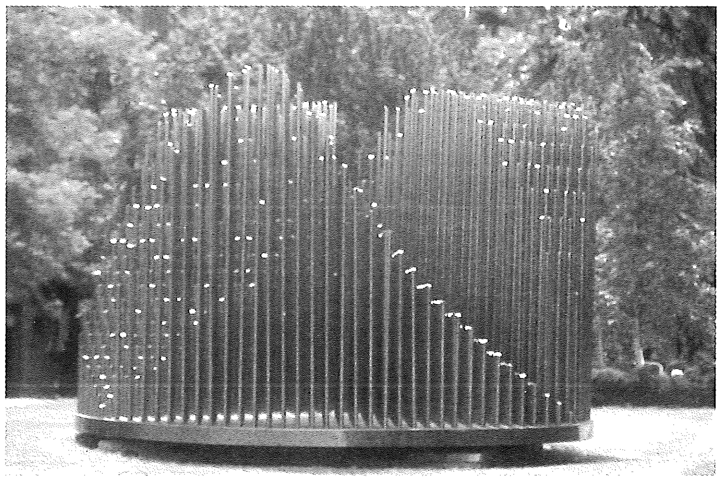
— (1994): «Nudos, cadenas y cintas de vídeo», *Investigación y Ciencia,* marzo 1994, 86-89.

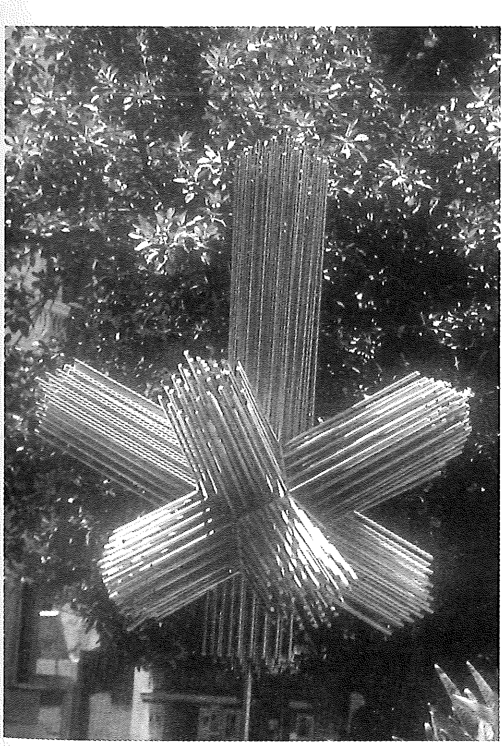
— (1994): «Topología de la prestidigitación», *Investigación y Ciencia,* abril 1994, 86-89.

— (1996): «De cómo rellenar el espacio con nudos», *Investigación y Ciencia,* enero 1996, 88-90.

— (1998). «Un cálculo para la cuna del gato». *Investigación y Ciencia,* febrero 1998, 85-87.

— (2000). «Nudos al desando», *Investigoción y Ciencia,* sepiembre 2000, 84-85.





Eusebio Sempere

(Fotos: Pilar Moreno)

CONVOCATORIA DEL CARGO DE DIRECTOR/A DE LA REVISTA *SUMA* DE LA FESPM

Los Estatutos de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) establecen, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan las secretarías de área. En el artículo 7 del Reglamento de la FESPM se especifican las áreas de trabajo para las que se elegirán Secretarios/as, que son las de Publicaciones, Revista, Prensa, Relaciones Internacionales y Actividades.

La Junta de Gobierno de la FESPM, en la reunión celebrada en Madrid el día 5 de octubre de 2002, ha decidido convocar el cargo de Director/a de la Revista *SUMA* en los siguientes términos:

Podrá presentar su candidatura a Director de la Revista SUMA cualquier socio/a de una Sociedad Federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

- Certificado en el que conste que es socio activo de una Sociedad Federada, y su antigüedad.
- Un Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo.
- Una relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la Revista.
- Un presupuesto económico de ingresos y gastos para el primer año de funcionamiento.

Las candidaturas podrán presentarse de cualquiera de las formas siguientes, teniendo en cuenta los plazos que en cada caso se señalan:

A) Por correo postal, hasta el 25 de enero de 2003, dirigido a:

SR. PRESIDENTE DE LA FESPM

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas P. Sánchez Ciruelo

ICE Universidad de Zaragoza

C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

B) Por correo electrónico hasta el 31 de enero de 2003. En tal caso el mensaje se dirigirá a:

fvillarroya@able.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá al Director/a de la Revista SUMA entre los candidatos/as presentados/as, oído previamente al Secretario General, en su reunión del día 8 de febrero de 2003.

Madrid, a 5 de octubre de 2002

José Luis Álvarez García

Secretario General de la FESPM

SUMA 41
noviembre 2001, pp. 37-46

Unas propiedades elementales de las cónicas y el trapecio

Juan-Bosco Romero Márquez

ARTÍCULOS

En este artículo se presentan algunos resultados elementales que relacionan las cónicas regulares y las cónicas con centro con el trapecio.
La clave de esta relación consiste en que si dibujamos un segmento paralelo que pase por el punto en que se cortan las dos diagonales del trapecio, la longitud de ese segmento es la media armónica de las longitudes de las bases.
También se demostrarán otros resultados que están relacionados con la interpretación de la media vía el trapecio y su relación con ciertas propiedades de las cónicas regulares a través de sus cuerdas focales.

EN ESTE TRABAJO se presentará una recopilación de resultados elementales ya conocidos sobre algunos temas de Álgebra y Geometría relacionados con las medias, el trapecio y las conicas.

Además, en este artículo se dan dos nuevas «caracterizaciones» elementales de las cónicas, con centro o no. El primer resultado se enuncia como sigue:

> Sea una cónica *C* (Figura 5) de focos *F* y *F'* y centro *O*. Para cada punto arbitrario *P* de la misma denotemos por t_P y n_P, las rectas tangente y normal en ese punto. Denotemos también por $d_1 = \mathrm{d}(F, t_P)$, $d_2 = (F', t_P)$, las distancias de los focos de la cónica a la tangente t_P. Sea *R* el punto de intersección de la recta n_P con el eje real de la cónica. Entonces $d = \mathrm{d}(P, R)$, la distancia entre los dos puntos indicados, es la media armónica de d_1 y d_2.

El segundo resultado es válido para una cónica regular, y reza como sigue:

> Sea *C* una cónica regular de foco *F* y directriz asociada *D*. Tomamos la cuerda focal *AB* que pasa por el foco *F*, determinada por los puntos *A* y *B* arbitrarios (Figura 6). Trazamos las proyecciones ortogonales *I*, *F* y *J* de los puntos *A*, *F* y *B*, respectivamente, sobre la directriz *D*. Sean *X*, *Y* y *Z* los puntos intersección de las diagonales de los trapecios *AIKF*, *BFKJ*, y *AIJB*. Entonces se verifica que la distancia *FK* es la media armónica de las distancias *AI* y *BJ*.

¿Es la propiedad anterior una nueva caracterización de las cónicas a través del trapecio rectángulo, equivalente a cualquier otra caracterización de las mismas? Es decir, ¿es cierto el teorema recíproco? Esta cuestión la dejamos abierta para la investigación de carácter elemental en el aula.

Se darán también otros resultados ya conocidos sobre las cónicas, pero expuestos de la forma más elegante y breve posible. Dichos resultados, no utilizados frecuentemente, aparecen en los libros citados en la extensa bibliografía que se inserta al final.

Conceptos y resultados previos

En algunas de las demostraciones que siguen se utilizarán coordenadas cartesianas, mientras que en otras se manejarán coordenadas polares. La utilización de unas u otras dependerá de la simetría y de la sencillez con la que se pueda probar el resultado.

Puede decirse que las cónicas o curvas de segundo grado están ligadas, en muchas de sus propiedades geométricas que las caracterizan, al trapecio rectángulo, como se verá en algunos de los resultados, cuyas demostraciones aparecen como ejemplos.

Como muchas de las propiedades de las cónicas se describen mediante haces de cuaternas armónicas, puede decirse que las cónicas son *curvas armónicas.* Ver Hadamard (1988), Eves (1969), Deltheil y Caire (1989) y Lebossé y Hèmery (1997).

Se supone en todo lo que sigue que se conoce la geometría euclidea plana elemental, tanto desde el punto vista métrico sintético, como afín, así como el manejo de coordenadas cartesianas y polares. También se puede utilizar el lenguaje de los números complejos.

El trapecio y las cónicas

En primer lugar se dará un resultado que permitirá en lo sucesivo utilizar el trapecio, en particular el trapecio isósceles o el rectángulo, para construir por medio de los infinitos segmentos paralelos a sus bases todas las medias de dos números reales positivos.

Veamos en la siguiente cuestión, planteada y resuelta por Möbius, cómo aparece la figura del trapecio. En cierto sentido y de una forma más general, tenemos que en el cálculo baricéntrico desarrollado por Möbius, ("Der barycentrische Calcul", (1827)) la figura del trapecio puede servir para obtener las medias ponderadas de dos segmentos *a* y *b,* a través del resultado elemental en el que aparece el trapecio (Fauvel, Flood y Wilson, 1993):

> Dado un segmento de recta *AB*, dos rectas paralelas *l* y *m* que pasan por *A* y *B* respectivamente, y dos coeficientes *a* y *b*, (Figura 1):
>
> a) Existen los puntos *A'* sobre *l* y *B'* sobre *m* tales que:
>
> $$a\,AA' + b\,BB' = 0$$
>
> b) Para el punto *P*, que resuelve a), tomado sobre *AB* de manera que:
>
> $$AP/PB = a/b$$
>
> existen a su vez, los puntos *A"* sobre *l* y *B"* sobre *m*, para los que se verifica que:
>
> $$a\,AA'' + b\,BB'' = (a + b)\,PP''$$

La indicación para probar el apartado a) de este resultado, (Figura 1), consiste en ver que los triángulos PAA' y PBB' son semejantes. La demostración de b) se sigue de a), al elegir los puntos A",B" y P" de modo que A'A" = B'B" = PP", y después operar adecuadamente.

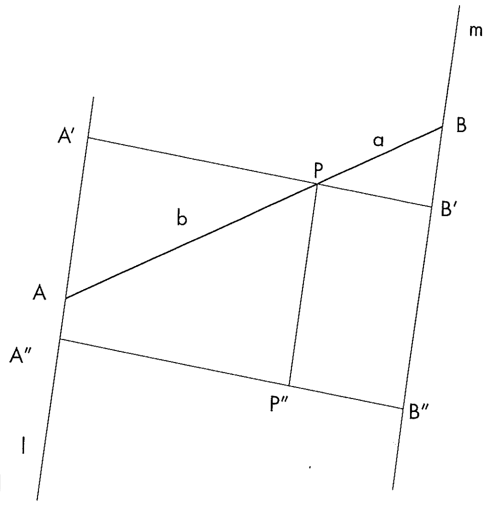


Figura 1

...se dará un resultado que permitirá en lo sucesivo utilizar el trapecio, en particular el trapecio isósceles o el rectángulo, para construir por medio de los infinitos segmentos paralelos a sus bases todas las medias de dos números reales positivos.

Las medias: sus propiedades y representaciones geométricas vía el trapecio

Sean a y b números reales positivos y dado otro número real r, llamamos *media r-ésima* al número real definido como sigue:

$$m_r = m_r(a,b) = \sqrt[r]{\frac{a^r + b^r}{2}}$$

Las propiedades más importantes son las siguientes:

i) $m_r \geq 0$

ii) $m_r(a, b) = m_r(b, a)$ (simétrica)

iii) $m_r(ta, tb) = t\, m_r(a, b)$ (homogénea)

iv) m_r es una función creciente y continuamente diferenciable de la variable real r que transforma biyectivamente el intervalo abierto (a, b) en (a, b). Esto es:

$$r < s \text{ implica que } m_r < m_s$$

Mas aún, tenemos:

$$a < m_r < b$$

Para más detalles ver Beckenbach y Bellman (1961), Bullen y otros (1988), Nelsen (19939 y Mitrinovic (1989).

Una consecuencia del resultado anterior, obtenida aplicando el teorema de los valores intermedios, dice lo siguiente:

> Si c es un número real tal que $a < c < b$, existe un único r tal que $m_r = m_r(a, b) = c$.

Veamos un caso particular, pero importante e interesante, con respuesta afirmativa para las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática.

En primer lugar vamos a probar que todas las medias de dos números reales positivos –las longitudes de sus bases– se pueden interpretar geométricamente mediante un segmento apropiado paralelo a ellas.

...vamos a probar que todas las medias de dos números reales positivos –las longitudes de sus bases– se pueden interpretar geométricamente mediante un segmento apropiado paralelo a ellas.

Teorema 1

Sea $ABCD$ un trapecio con bases $a = AB$ y $b = CD$. Sea O el punto de intersección de sus diagonales. Se cumple que:

a) La media aritmética de a y b está representada por el segmento GH paralela media a las bases del trapecio.

b) La media geométrica está representada por el segmento KL paralelo a las bases y situado de tal manera que los trapecios $ABLK$ y $KLDC$ sean semejantes.

c) La media armónica está representada por el segmento EF paralelo a las bases que pasa por el punto O.

d) La media cuadrática está representada por el segmento de recta MN paralelo a las bases que divide al trapecio $ABCD$ en dos trapecios de la misma área.

A lo largo de la demostración se hará referencia a la figura 2:

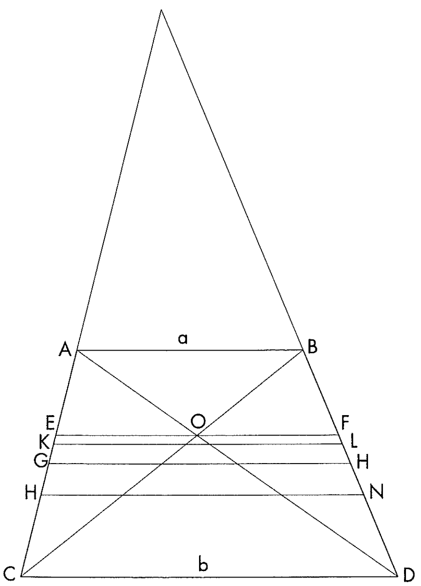


Figura 2

a) Se traza la paralela media a las bases del trapecio GH. Una diagonal del trapecio la dividirá en dos segmentos, uno de longitud $a/2$, y el otro de longitud $b/2$. Y de aquí $GH = (a + b)/2$.

b) Si los trapecios $ABLK$ y $KLDC$ son semejantes, entonces:

$$\frac{AB}{KL} = \frac{KL}{CD} \Rightarrow KL^2 = AB \cdot CD \Rightarrow KL = \sqrt{a \cdot b}$$

c) Probemos primero que $EO = OF$. Todos los pares de triángulos que se compararán son semejantes ya que están en la posición de Thales: tienen un ángulo común en un vértice, y en ese vértice, los lados del mayor son las prolongaciones del otro, y un lado paralelo.

En efecto:

$$\Delta OAE \approx \Delta ACD \Rightarrow \frac{EO}{CD} = \frac{OA}{AD} \qquad [1]$$

$$\Delta OBF \approx \Delta BCD \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BC} \qquad [2]$$

Dividiendo [1] y [2] miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{EO}{OF} = \frac{OA \cdot BC}{OB \cdot AD} \qquad [3]$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\Delta OAB \approx \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{OA + OD}{OB + OC} = \frac{AD}{BC} \qquad [4]$$

Ahora, sustituyendo [4] en [3], llegamos a que: $EO = OF$.

Vamos a probar ahora el resultado. En efecto:

$$\Delta AEO \approx \Delta ACD \Rightarrow \frac{EO}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC} \qquad [5]$$

$$\Delta CEO \approx \Delta ABC \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{EO}{AB} \qquad [6]$$

De [5] y [6] tenemos:

$$\frac{EO}{CD} = 1 - \frac{EC}{AC} = 1 - \frac{EO}{AB} \Rightarrow EO \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 1$$

y por lo tanto:

$$EO = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{1}{2} h$$

de donde $EF = 2\,EO = h$.

Probemos ahora el recíproco de este teorema para el caso del trapecio rectángulo utilizando las coordenadas cartesianas:

Sea $ABCD$ un trapecio. Supongamos que EH es un segmento paralelo a las bases AB y CD, y que su longitud es la media armónica de las longitudes de las bases. Entonces las diagonales del trapecio AD y BC se cortan en el punto medio de EH.

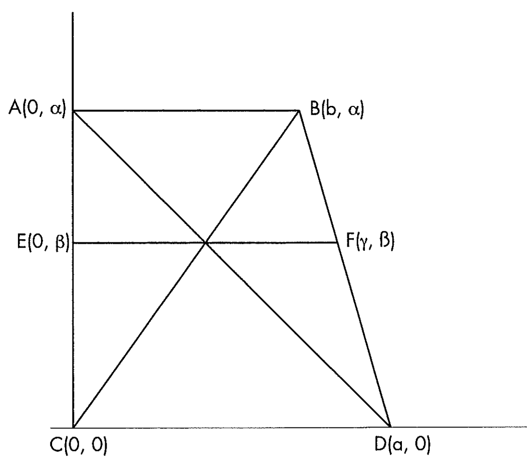


Figura 3

Vamos a hacer la demostración para el caso del trapecio rectángulo, dejando como ejercicio el caso general.

En efecto, elegimos sin pérdida de generalidad un sistema de referencia cartesiano de tal manera que todos los puntos que intervienen tengan coordenadas positivas. Así, tenemos que las coordenadas de los vértices del trapecio son, $A(0, \alpha)$, $B(b, \alpha)$, $C(0, 0)$, $D(a, 0)$, $E(0, \beta)$ y $F(\gamma, \beta)$, con

$$AB = b,\ CD = a, \text{ y } EH = \gamma = \frac{2ab}{a+b} \quad [7]$$

Ahora bien, como los puntos B, F y D están en la misma recta se obtiene, al sustituir [7], con a distinto de b, que:

$$\beta = \frac{\alpha}{b-a}(\gamma - a) = \frac{a\alpha}{b-a}\left(\frac{2b}{a+b} - 1\right) = \frac{a\alpha}{a+b}$$

Por otra parte las ecuaciones de las rectas determinadas por las diagonales del trapecio vienen dadas por:

$$r_{BC}: y = \frac{\alpha}{b}x; \qquad r_{AD}: y = -\frac{\alpha}{a}(x-a)$$

Resolviendo el sistema lineal anterior tenemos que el punto O de la intersección de las diagonales del trapecio es:

$$O\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{a\alpha}{a+b}\right) \in r_{EF} \text{ cuya ecuación es: } \beta = \frac{a}{a+b}\alpha$$

Es obvio que O es el punto medio del segmento EH, ya que dicho punto medio viene dado por:

$$\frac{E+F}{2} = \frac{(0,\beta)+(\gamma,\beta)}{2} = \left(\frac{\gamma}{2},\beta\right) = \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{a\alpha}{a+b}\right) = O$$

que era lo que se quería demostrar.

El lector puede tratar de demostrar que:

> En las mismas condiciones del trapecio anterior, si denotamos por X, Z, Y los puntos de intersección de las diagonales de cada uno de los trapecios siguientes: $ABEF$, $ABCD$, $EFCD$, entoces dichos puntos X, Z, Y están en una recta.

Este resultado no es otra cosa que una formulación del *Teorema de Pappus.*

> Si I es el punto de intersección de los lados del trapecio y O es el punto donde se cortan sus diagonales, entonces la recta IO es mediana de los triángulos IAB e ICD.

Es decir, el segmento que pasa por I y O divide a los lados AB y CD en su punto medio. Esto es, los segmentos IQ e IP son medianas de los triángulos IAB e ICD, respectivamente (Figura 2).

d) Sea $r = MN$, llamamos x e y, a las alturas de los trapecios con igual área en que se divide el trapecio $ABCD$, de manera que $x + y$ es su altura. Entonces, al indicar que las áreas de los trapecios así construidos son la mitad del área del trapecio dado, tenemos que:

$$\frac{r+a}{2}x = \frac{a+b}{4}(x+y); \qquad \frac{r+b}{2}y = \frac{a+b}{4}(x+y);$$

Las ecuaciones anteriores se pueden tratar como un sistema lineal en las incógnitas x e y. Este sistema tendrá solución única precisamente cuando:

Vamos a profundizar todavía más sobre la media armónica, interpretada como la longitud de un segmento paralelo a las bases de un trapecio y que pasa por el punto de intersección de las diagonales del mismo, con el objeto de ligar a esta figura con muchas de las propiedades intrínsecas de las cónicas regulares.

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

de aquí que r sea la media cuadrática de a y b.

El siguiente resultado se obtiene por cálculo algebraico directo o por el método geométrico basado en el teorema anterior.

> Desigualdad entre las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática:
> Si $0 < a < b$, entonces se verifica que:
>
> $$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$

Vamos a profundizar todavía más sobre la media armónica, interpretada como la longitud de un segmento paralelo a las bases de un trapecio y que pasa por el punto de intersección de las diagonales del mismo, con el objeto de ligar a esta figura con muchas de las propiedades intrínsecas de las cónicas regulares.

> *Teorema 2*
>
> Dado el trapecio rectángulo $ABCD$, de bases $AD = a$ y $CB = b$, siendo CD el lado perpendicular a las bases. Sea el segmento $EF = c$ media armónica de a y b y sean los puntos M, y N, respectivamente, las proyecciones ortogonales de F sobre AD y CB. Entonces, para números reales convenientes d, e y f, las siguientes propiedades son equivalentes:
>
> i) Si $p = AF$ y $q = FB$, entonces: $m_{-1}(p, q) = d\, m_{-1}(a, b)$;
>
> ii) Si $x = AM$ e $y = NB$, entonces: $m_{-1}(x, y) = e\, m_{-1}(a, b)$;
>
> iii) Si $u = FM$ y $v = FN$, entonces: $m_{-1}(u, v) = f\, m_{-1}(a, b)$.

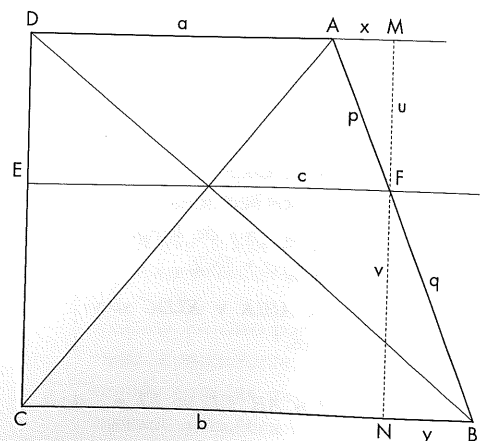


Figura 4

Los siguientes pasos son sólo un esquema de la demostración (Figura 4):

1) Como:

$$x = EF - AD = c - a = \frac{2ab}{a+b} - a =$$
$$= \frac{ab - a^2}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b};$$
$$y = BC - EF = b - c = b - \frac{2ab}{a+b} =$$
$$= \frac{b^2 - ab}{a+b} = \frac{b(b-a)}{a+b}$$

Por cociente entre ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

2) En las construcciones realizadas en la figura 4 tenemos que los triángulos *AFM* y *BFN* son rectángulos y semejantes, ya que tienen un ángulo opuesto por el vértice igual. Y de aquí, por el teorema de Thales, podemos escribir:

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y} = \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \qquad [8]$$

3) Si desdoblamos las igualdades anteriores como sigue, y se definen los números *d, e* y *f* de la forma siguiente:

$$d = \frac{a}{p} = \frac{b}{q};\ e = \frac{a}{x} = \frac{b}{y};\ f = \frac{a}{u} = \frac{b}{v};$$

tenemos después de breves cálculos que son reversibles y, usando de nuevo la igualdad [8], para el recíproco, que se verifican i) y ii).

Además, por las definiciones dadas:

$$r\,d = z\,e = w\,f = c$$

Esta última relación nos define a su vez, los números r, z y w, medias armónicas de las cantidades indicadas en i), ii) y iii), respectivamente.

Los siguientes enunciados pueden probarse como sencillos problemas:

Salvo la media aritmética, la media armónica es la única media de a y b que verifica esta propiedad.

Las siguientes afirmaciones sobre una paralela a las bases de un trapecio son equivalentes:

1) el punto donde se cortan las diagonales, divide a esta paralela en dos partes iguales;
2) la longitud de ese segmento es la media armónica de las longitudes de las bases.

Resultados

En esta sección se demostrarán los resultados citados en la introducción, ya conocidos sobre las cónicas.

Sea C una cónica con centro y de focos F y F' y sean t_P y n_P las rectas tangente y normal,- respectivamente, de un punto P arbitrario de la cónica C. Si R es el punto donde la normal n_P corta al eje real de la cónica, entonces la distancia entre P y R es la media armónica de las distancias de focos a la tangente t_P.

La demostración la haremos en el caso de la elipse. Para la hipérbola se seguirá un proceso similar (Figura 5).

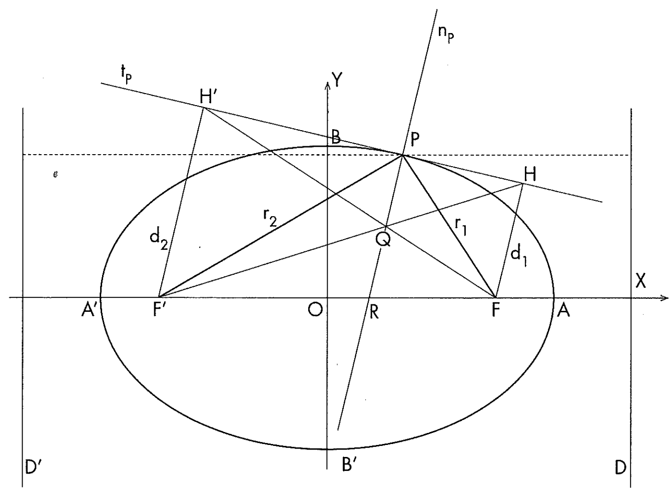


Figura 5

Tomamos como sistema de coordenadas cartesiano el formado por los ejes de simetría de la cónica. De esta forma las coordenadas de los focos son $F'(-c, 0)$, y $F(c, 0)$, y el centro de la cónica está en el origen de coordenadas. También, podemos suponer por simetría, para manejar las distancias entre punto y recta sin los valores absolutos, que el punto $P(r, s)$ de la cónica pertenece al primer cuadrante, es decir, $r > 0$ y $s > 0$.

Denotemos por E la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } a^2 = b^2 + c^2$$

Sean t_P y n_P las rectas tangente y normal en $P(r, s)$ cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$t_P: \frac{xr}{a^2} + \frac{ys}{b^2} = 1; \qquad n_P: y - s = \frac{a^2 s}{b^2 r}(x - r)$$

Si R el punto de intersección de la normal n_P con el eje real de la cónica, de su ecuación se tiene:

$$R\left(\frac{c^2 r}{a^2}, 0\right)$$

Denotemos ahora por $d = \mathrm{d}(P, R)$ la distancia de P a R, por $d_1 = \mathrm{d}(F, t_P)$ la distancia del foco F a la tangente t_P, y por $d_2 = \mathrm{d}(F', t_P)$ la distancia del foco F' a la tangente t_P. Sean $r_1 = \mathrm{d}(P, F)$ y $r_2 = \mathrm{d}(P, F')$ los radio-vectores de P, un punto arbitrario de la cónica.

Calculemos, ahora, d, d_1 y d_2:

$$d = \mathrm{d}(P,R) = \sqrt{\left(\frac{c^2 r}{a^2} - r\right)^2 + s^2} = \frac{\sqrt{r^2 b^4 + s^2 a^4}}{a^2} = \frac{K}{a^2}$$

$$d_1 = \mathrm{d}(F, t_P) = b^2 \frac{a^2 - cr}{K}$$

$$d_2 = \mathrm{d}(F', t_P) = b^2 \frac{a^2 + cr}{K}$$

$$(\text{donde } K = \sqrt{r^2 b^4 + s^2 a^4})$$

Esto es válido para la elipse y la hipérbola. Teniendo en cuenta que $P(r;\ s)$ es un punto de una cónica con centro, al sustituir el punto en la ecuación analítica de cada una de ellas, después de operar y simplificar obtenemos para ambas cónicas:

$$K^2 = b^4 r^2 + a^4 s^2 = b^4 r^2 + a^2 a^2 s^2 =$$
$$= b^2 (rc - a^2)(rc + a^2) = a^2 b^2 r_1 r_2 > 0$$

donde $r_1 = \mathrm{d}(P, F)$ y $r_2 = \mathrm{d}(P, F')$ son los radios-vectores del punto P. Una vez más efectuando los cálculos por separado que son necesarios llegamos a:

$$2 d_1 d_2 = 2b^2;\ d_1 + d_2 = 2\frac{a^2 b^2}{K}$$

luego:

$$\frac{2 d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{2b^2}{2\frac{a^2 b^2}{K}} = \frac{K}{a^2} = d$$

con lo que el teorema queda demostrado.

Podemos dar, una vez más, una nueva interpretación geométrica del *latus rectum* de una cónica, utilizando este teorema como sigue: Para los pares de los vértices, A, A' y B, B' de la cónica se tiene que:

$d = \mathrm{d}(O, B) = \mathrm{d}(O, B') = \mathrm{d}(O, t_B) = d_1 = d_2 = b$, por lo que el resultado es obvio.

Sin embargo, para los puntos A y A' la recta normal en ellos coincide con el eje real de la cónica y, por lo tanto, hay infinitos puntos de corte; el cálculo de d en esos puntos se obtiene por el paso al límite como sigue:

Si el punto X tiende al punto A, la abcisa x tiende a la abcisa a, por tanto $d = b^2/a = p$, (parámetro focal de la cónica, que es por definición, la mitad del *latus rectum* o longitud de la cuerda focal determinada por un foco).

Se deja al lector la demostración del siguiente resultado. Para ello puede usarse el segundo de los teoremas que daremos a continuación y luego plantear, resolver y discutir el problema correspondiente de lugares geométricos:

> El punto de corte de las diagonales del trapecio $F'H'FH$ formado por los focos de la cónica y las proyecciones ortogonales respectivas de éstos sobre la tangente t_P, es el punto medio del segmento PR. El lugar geometrico de estos puntos medios es una cónica con centro.

Vamos a ver dos nuevas caracterizaciones de todas las cónicas regulares a través de la media armónica, y que se probarán utilizando las coordenadas polares, ya que en estos dos casos es el método de demostración más simple y directo.

> Si A y B son dos puntos cualesquiera de una sección cónica que determinan la cuerda AB que pasa por el foco de la cónica, la expresión:
>
> $$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$$
>
> es constante.

Tomamos coordenadas polares para expresar la ecuacion de la cónica, donde el foco F coincide con el polo y el eje polar se toma como el eje principal que contiene a ese foco (Figura 6).

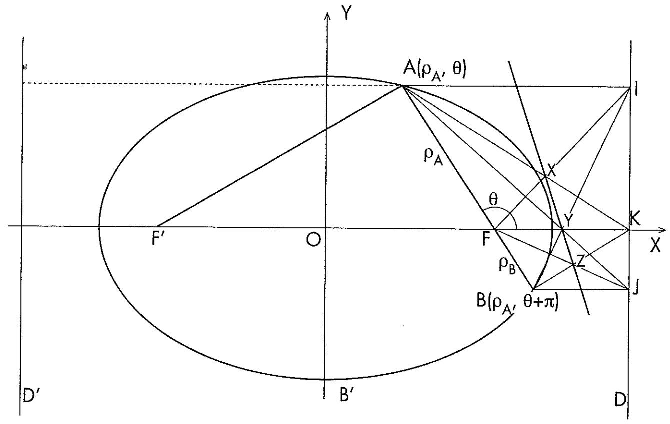


Figura 6

Podemos dar, una vez más, una nueva interpretación geométrica del latus rectum *de una cónica...*

Con estas hipótesis la ecuación polar de todas las cónicas regulares –elipse, hipérbola y parábola–, es común y viene dada, para un punto $P(\rho,\ \theta)$ arbitrario de la cónica, por la expresión:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde p es el parámetro focal o distancia del foco F a su directriz correspondiente D, y e es la excentricidad de la cónica.

Sea AB una cuerda arbitraria que pasa por el foco F. Las coordenadas polares de sus extremos son $A(\rho_A,\ \theta)$ y $\mathrm{B}(\rho_B,\ \theta + \pi)$. Tenemos que:

$$\rho_A = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

$$\rho_B = \frac{p}{1 + e\cos(\theta + \pi)} = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

Y de aqui obtenemos:

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B} =$$
$$= \frac{1 + e\cos\theta + 1 - e\cos\theta}{p} = \frac{2}{p}$$

De la expresión anterior deducimos que es constante –la media armónica– y, por lo tanto, no depende la cuerda elegida. Obsérvese que una vez más tenemos una nueva interpretación del parámetro p de una cónica a través de las cuerdas focales como la media armónica de los segmentos AF y FB.

> Sea C una cónica regular con foco F y directriz D, y sea AB una cuerda focal determinada por los dos puntos arbitrarios A y B. Denotemos por I, K, J los puntos que se obtienen por proyección ortogonal de los puntos A, F y B, respectivamente, sobre D. Entonces la longitud del segmento FK es la media armónica de las longitudes de los segmentos AI y BJ.

Se procederá como anteriormente, pero lo haremos, por ejemplo, para el caso de la elipse (Figura 6).

Si $A(\rho_A, \theta)$ y $B(\rho_A, \theta + \pi)$ son las coordenadas de los extremos de la cuerda focal tenemos, por el resultado anterior, que:

$$FK = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la expresión del parametro p de una cónica, podemos escribir las siguientes fórmulas:

$$BI = NK = FK - FN = \frac{b^2}{c} - \rho_A \cos\theta = \frac{b^2}{c} - \frac{pa\cos\theta}{a + \cos\theta} = \frac{ab^2}{c(a + c\cos\theta)}$$

$$AJ = MK = \frac{b^2}{c} + \rho_B \cos\theta = \frac{b^2}{c} + \frac{pa\cos\theta}{a - \cos\theta} = \frac{ab^2}{c(a - c\cos\theta)}$$

De todas las relaciones anteriores tenemos que:

$$\frac{1}{BI} + \frac{1}{AJ} =$$

$$= \frac{c(a + c\cos\theta)}{ab^2} + \frac{c(a - c\cos\theta)}{ab^2} =$$

$$= \frac{2ac}{b^2} = \frac{2}{FK}$$

lo que demuestra el resultado. Esto es, una vez más FK es la media armónica de BI y AJ.

Un problema interesante que dejamos como ejercicio es el siguiente:

> Dada una cónica regular C, y una cualquiera de sus cuerdas focales, entonces el punto de intersección de las dos diagonales del trapecio limitado por la cuerda, las proyecciones de sus extremos sobre la directriz asociada al foco y la propia directriz es siempre un punto situado en el eje mayor y que equidista del foco y de su directriz asociada (Figura 7).

...nos referiremos también a la versión de las cónicas según Apolonio.

En la figura 8 se da un ejemplo de un haz de cónicas, correspondiente a la ecuación:

$$2y^2 + k\,x^2 - 8x = 0$$

donde k es un número real arbitrario.

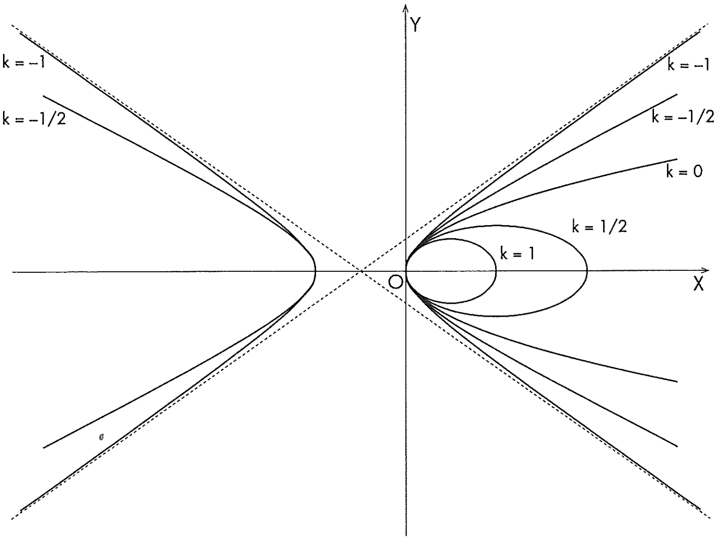


Figura 8

Del estudio de este haz de cónicas se obtiene lo siguiente:

- Si $k = 0$, se tiene la parábola $2y^2 = 8x$.
- Si k es no nulo, se tiene que:
  - — si $k > 0$ una elipse;
  - — si $k < 0$ una hipérbola.
- Si $k > 0$ $y \to 0$, las elipses se alargan y se aproximan a una parábola.
- Si $k < 0$ $y \to 0$ las hipérbolas de la derecha se aproximan a la parábola, y las ramas de la izquierda se alejan hasta el infinito.

Ecuación común de las tres cónicas

Hay distintas ecuaciones comunes de las tres cónicas. En este apartado expondremos algunas y nos referiremos también a la versión de las cónicas según Apolonio.

Se puede demostrar que elipse, hipérbola y parábola se pueden representar por una única ecuación, tomando para ello como origen de coordenadas el vértice de la curva, como eje de abcisas el que pasa por ese punto dirigido hacia el sentido de la concavidad de la curva, y el de ordenadas la recta tangente en el vértice. De aquí, por un paso al límite adecuado, se probará a su vez que la parábola es el caso límite común de la elipse y de la hipérbola (Quinet, 1996).

Se procede de la manera que sigue:

1. Se toma la ecuacion canónica de una cónica con centro.
2. Se hace una traslación de ejes llevando el origen al punto $A(a, 0)$. Llamando X e Y a las coordenadas con relación a los nuevos ejes AX y AY, tendremos:

$x = X - a, \qquad Y = y$ (elipse),

$x = X + a, \qquad Y = y$ (hipérbola),

$x = X, \qquad Y = y$ (parábola).

3. Operando se llega a la ecuación común para las tres cónicas:

$$Y^2 = 2pX + rX^2$$

donde $p = b^2/a$ (parámetro de la cónica) y $r = \pm b^2/a^2$ y donde si $r > 0$ es hipérbola, si $r = 0$ es parábola y si $r < 0$ (elipse) y recíprocamente. (Para el caso de la parábola, $y^2 = 2px$, mediante la transformación identidad, $x = X$, $y = Y$ se transforma en la parábola $Y^2 = 2pX$).

4. Utilizando esta ecuación común es fácil ver que si en una elipse o en una hipérbola uno de los vértices permanece fijo y el otro se aleja hasta el infinito, se obtiene una parábola:

$$Y^2 = 2pX$$

En efecto, hallemos a partir de la ecuación común las abcisas de los dos vértices anulando Y:

$$2pX + rX^2 = X(2p + X) = 0$$

de donde $X = 0$ (primer vértice, origen), $X = -2p/r$ (segundo vértice).

Para que el segundo vértice tienda hacia el infinito es necesario que, siendo p y r variables, r tienda a cero (con p no nulo). En este caso, la ecuación de la cónica se reduce a $Y^2 = 2pX$, que es una parábola.

De forma similar se puede ver, tanto para la elipse como para la hipérbola, que si el eje mayor aumenta indefinidamente permaneciendo fijos uno de sus focos y el vértice próximo a éste, ambas cónicas en el límite tienden hacia una parábola.

Para ello se procede como antes, llegando para la elipse, por ejemplo, a la ecuación:

$$y^2 = \left(p - \frac{p^2}{4a}\right) \cdot \left(2x - \frac{x^2}{a}\right) \qquad \text{(elipse)}$$

$$y^2 = \left(\frac{p^2}{4a} - p\right) \cdot \left(\frac{x^2}{a} - 2x\right) \qquad \text{(hipérbola)}$$

donde $b^2 = \pm\left(pa - \frac{p^2}{4}\right)$

para la elipse e hipérbola, respectivamente.

Vemos, por lo tanto, que si el foco F' se aleja indefinidamente, a tiende a infinito, resultando en ambos casos que:

$$y^2 = 2px$$

que es la ecuación de una parábola.

Las cónicas según Apolonio

Sea AB el eje de la sección cónica, con vértice en A. Desde cualquier punto de la cónica bajamos la perpendicular PQ que Apolonio llama una ordenada. Levantamos el segmento AR perpendicular a AB y tal que la longitud de AR es igual al *latus recto* de la cónica (El *latus recto* es la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje y pasa a través del foco. Apolonio da una definición diferente pero equivalente). Trazamos antes, sobre AR (o prolongado), el segmento AS de tal manera que:

$$AQ \cdot AS = (PQ)^2 \qquad [9]$$

Apolonio prueba que:

a) $AS < AR$ para una elipse:

b) $AS = AR$ para una parábola,

c) $AS > AR$ para una hipérbola.

Si denotamos el *latus recto* AR por $4p$, y ponemos $x = AQ$, $y = PQ$, entonces [9] se convierte $AS = y^2/x$, y los tres casos anteriores se escriben como:

$y^2 < 4px$ para la elipse

$y^2 = 4px$ para la parábola,

$y^2 > 4px$ para la hipérbola.

En efecto, la elipse e hipérbola tienen como ecuaciones:

$$y^2 = 4px - \frac{4px^2}{d}$$

$$y^2 = 4px + \frac{4px^2}{d}$$

respectivamente, donde d es el diámetro. La parábola se obtiene como caso límite de ambas cónicas cuando hacemos $d \to \infty$ (Salmon, 1929; Field y Gary, 1987; Boyer, 1956; Katz, 1998; Kline, 1992; Schaff, 1973; Collette, 1985; Quinet, 1996; Heath, 1981).

Para finalizar este trabajo proponemos varios problemas que dejamos al lector:

1) Demostrar que una elipse y una hipérbola que tienen los mismos focos se cortan ortogonalmente.

2) a) Hallar las curvas cuyas normales pasan por un punto fijo.

b) ¿Cuál es la curva cuya subnormal (longitud del segmento determinado por los puntos P y N, que son las proyecciones perpendicures del punto M, de la curva $y = f(x)$) es constante?

3) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas focales de una cónica.

...se puede ver, tanto para la elipse como para la hipérbola, que si el eje mayor aumenta indefinidamente permaneciendo fijos uno de sus focos y el vértice próximo a éste, ambas cónicas en el límite tienden hacia una parábola.

4) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los radios vectores de una cónica.

5) Si P_1FP_2 y Q_1FQ_2 son dos cuerdas focales perpendiculares de una cónica, demostrar que:

$$\frac{1}{P_1F \cdot FP_2} + \frac{1}{Q_1F \cdot FQ_2}$$

es constante.

6) En (Berger, 1987) encontramos algunos problemas interesantes y la generalización del problema 5:

a) Sea C una cónica central, M un punto de C y, sean P, Q los puntos donde la normal a C en M intersecta con los ejes de C. Probar que el cociente MP/MQ permanece constante, y calcularlo. Probar el recíproco. Deducir el valor de radio de curvatura en los vértices de C.

b) Sean M y N puntos sobre una elipse C con centro O, y admitamos que el ángulo formado por las semirectas OM, ON es un ángulo recto. Demostrar que:

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$$

es una constante. ¿Cuál es la envolvente de las rectas MN?

c) Sea A un punto interior de una elipse C con centro O, sea D una recta que pasa por A y que corta a C en los puntos M, N y sea P un punto de C tal que OP es paralelo a D. Demostrar que el cociente:

$$\frac{AM \cdot AN}{OP^2}$$

es constante.

d) Sean D, D' dos rectas ortogonales (en un espacio euclideo), que contienen a A y cortan a C en M, N y M', N', respectivamente. Demostrar que:

$$\frac{1}{AM \cdot AN} + \frac{1}{AM' \cdot AN'}$$

es constante. ¿Cuál es la envolvente de las rectas MN?

Conclusiones, comentarios y observaciones

La primera y principal conclusión de este artículo, con relación a los resultados propuestos, está en Eves (1969), cuando da una justificación de la utilización de los métodos de coordenadas:

> [...] Hay pocas experiencias académicas que puedan emocionar més al estudiante de matemáticas elementales universitarias que su iniciación en este método nuevo y poderoso de atacar los problemas geométricos.

...el pentagrama de oro que forma la partitura de la sinfonía musical de una buena educación matemática está determinado por la proporción aûrea que tiene como lado el alumno, y como diagonal al profesor...

La segunda conclusión de este trabajo se debe a la observación final de G. Szego en sus distintos libros:

> No deberíamos olvidar que la solución de cualquier problema digno de consideración, muy raras veces nos resulta fácil y poco trabajosa; es más bien el resultado de un esfuerzo intelectual de días, semanas o meses. ¿Por qué un joven iba a estar dispuesto a hacer un esfuerzo supremo? La explicación es probablemente la preferencia instintiva por ciertos valores, es decir, la actitud que valora el esfuerzo intelectual y el éxito espiritual más que la ventaja material... Puede que el medio más eficaz consista en transmitir a los jóvenes la belleza del trabajo intelectual y la sensación de satisfación después de un esfuerzo mental grande y con éxito...

Otra conclusión que se deduce de esta experiencia es la de llegar a alcanzar la sensibilidad del alma matemática, del que se embarca en la aventura del descubrimiento matemático y en el arte para hacerlo, queda resumido en las maravillosas, hermosas y bellas palabras de Proclo:

> Así es, pues, la matemática te recuerda la forma invisible del alma; da vida a sus propios descubrimientos; despierta la mente y purifica el intelecto; arroja luz sobre nuestras ideas intrínsecas y anula el olvido y la ignorancia que nos corresponde por nacimiento.

Finalmente, en Gillén (1999) se encuentran las siguientes reflexiones:

> La poesía es, sencillamente, la forma más bella, impresionante y efectiva de decir las cosas...
>
> ...Sin embargo, así como las ecuaciones representan el discernimiento de verdades eternas y universales, su expresión escrita es estrictamente humana y provinciana. Por eso es por lo que se parecen a los poemas, intentos maravillosamente ingeniosos de hacer comprensibles a los seres finitos las realidades infinitas... Y su legado consiste en cinco de los mejores poemas que jamás ha inspirado la imaginación humana...

En definitiva, el pentagrama de oro que forma la partitura de la sinfonía musical de una buena educación matemática está determinado por la proporción aûrea que tiene como lado el alumno, y como diagonal al profesor y que, se escribe, con las siguientes notas sublimes: Imaginación -Intuición, Creación, Resolución, Construcción y Discusión. Todo esto constituye, en esencia, el arte matemático.

Referencias

BECKENBACH, E. y R. BELLMAN (1961): *An Introduction to Inequalities,* MAA, Washington.

BOYER. C.B. (1956): *History of Analytic Geometry,* The Scholarss Bookshelf, Princenton, New Jersey.

BULLEN, P.S., D.S. MITRINOVIC y P.M. VASIC (1988): *Means and Their Inequalities,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

CAGNAC, G., E. RAMIS y J. COMMEAU (1965): *Géométrie,* Masson, París.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historía de las Matemáticas,* Vols. I y II, Siglo XXI de España Editores, Madrid.

COMMISSAIRE, H. y G. CAGNAC (1989): *Cours de Mathématiques specials,* Ed. Jacques Gabay, Paris.

DELTHEIL, R. y D. CAIRE (1989): *Géométrie et Complements,* Editions J. Gabay, Paris.

DORFMAN, A.G. (1994): *Óptica de las secciones cónicas,* Mir, Moscu.

EFIMOV, N.V. (1984): *Elements de Géométrie Analitique,* Mir, Moscu.

EVES, H. (1989): *Estudio de las Geometrias,* Vol. I y II, Uteha, Mexico.

FAUVEL, J., R. FLOOD y R. WILSON, R. (eds.) (1993): *Mobius his band,* Oxford University Press, Oxford.

FIELD, J.V. y J. GARY (1987): *The Geometrical work of Girad Desargues,* Springer-Verlag, New York.

GUILLEN, F. (1999): *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo,* Debate, Barcelona.

HADAMARD, J. (1988): *Lecons de Géométrie élémentaire,* Tomos I y II, Editions J. Gabay, Paris.

HEATH, TH. (1981): *A History of Greek Mathematics,* Vols. I yII, Dover, New York.

KATZ, V.J. (1998): *A History of Mathematics, An Introduction,* Addison -Wesley, Readings Massachusetts.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antiguedad a nuestros dias,* Vol. 1, 2 y 3, AU, Alianza Editorial, Madrid.

LEBESGUE, H. (1989): *Les coniques,* Ed. Jacques Gabay, Paris.

LEBOSSE, C. y C. HEMERY (1997): *Géométrie,* Ed. J. Gabay, Paris.

LYUBIC, YU I. y L.A. SHOR (1978): *Metodo cinemático en problemas geométricos,* Mir, Moscu.

Juan-Bosco Romero
Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología
Universidad de Valladolid.
Sociedad «Puig Adam»
de Profesores de Matemáticas

MITRINOVIC, D.S., J.E. PECARIC y V. VOLONEC (1989): *Recent Advances in Geometry Inequalities,* Kluwer Academic Press, Dordrecht.

NELSEN, R.G. (1993): *Proofs without Words, Exercises in visual Thinking,* MAA, Washington.

POGEROLOV, A. (1987): *Geometry,* Mir, Moscu.

PUIG-ADAM, P. (1967): *Geometría Métrica,* Tomo I y II, Madrid.

QUINET, J. (1996): *Curso elemental de matemáticas superiores, T.6: Geometría analítica y aplicaciones diversas,* Paraninfo, Madrid.

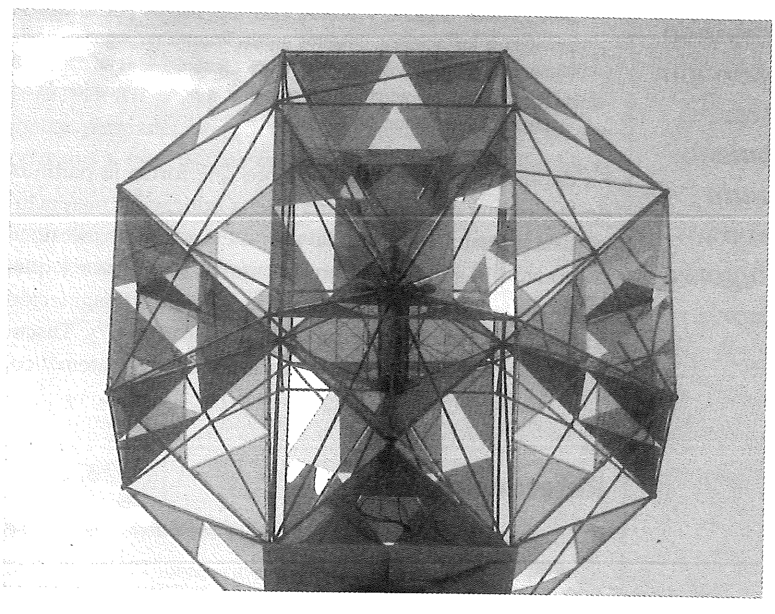
ROUCHE, E. y C. COMBEROUSSE (1997): *Traite de Géométrie,* Ed. J. Gabay, Paris.

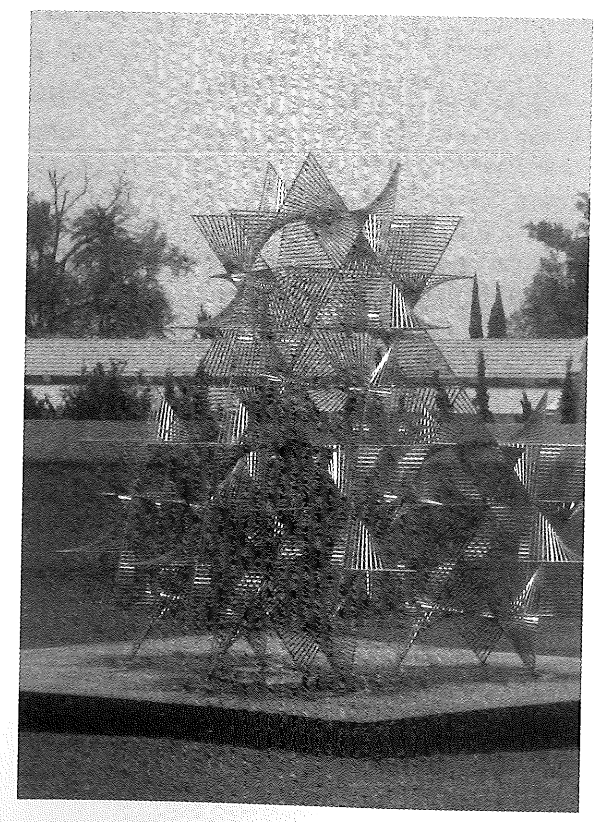
SALMON, G. (1929): *A Treatise on Conics Sections,* Logmans, Green and Co, Inc., New York.

SCHAFF, W.L. (1973): *A bibliography of recreational Mathematics,* Vols. 1, 2, 3 y 4. NTCM, Reston.

WOOTON, W., E.F. BECEKENBACH y F.J. FLEMING (1976): *Geometría Analítica Moderna,* Pub. Cultural, México.

YATES, R.C. (1977): *Curves and their propiertes,* NCTM, Reston.





Expo 92. Sevilla

(Fotos: Pilar Moreno)

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 47-58

Una experiencia en el área matemática acerca de la articulación entre la escuela media y la universidad

Virginia Montoro
Mónica de Torres Curth

ARTÍCULOS

El presente trabajo refiere una experiencia en relación a la articulación de niveles entre la escuela media y la universidad en el área matemática, surgida a partir de la demanda de una escuela media argentina, y llevada a cabo en el marco de un proyecto de extensión universitaria. El objeto de este proyecto fue realizar un diagnóstico de aprendizaje de contenidos, de los alumnos del último año, y a partir del mismo generar propuestas de trabajo con los docentes de la escuela, tendentes a subsanar la brusca discontinuidad que se observa entre los dos niveles mencionados. La realización del proyecto permitió la identificación de un listado de contenidos conceptuales y procedimentales mínimos necesarios para el ingreso en la universidad, el desarrollo de un instrumento de evaluación de alta fiabilidad y se pusieron en práctica algunas pautas que permitieran un mayor acercamiento entre la escuela media y los estudios superiores.

POR RAZONES DE ORGANIZACIÓN, el sistema educativo se subdivide en diversos tramos o niveles de enseñanza que tienen orígenes e historias diversos y que a lo largo del tiempo han adquirido rasgos e identidad propios. La articulación de estos niveles requiere el mantenimiento de la función específica de cada uno de ellos, integrándolos en el sistema educativo en su conjunto.

El proceso de aprendizaje de una persona mantiene una continuidad vital a la cual la organización educativa le impone «cortes» desde una lógica exterior al proceso de aprendizaje, convirtiéndose ésta en una condición propia de la enseñanza en contextos institucionales. La articulación, en este sentido, responde a la necesidad de que la lógica institucional no conspire contra el proceso de aprendizaje de cada persona (Ministerio de Cultura y Educación, 1996). El paso de la escuela media a la universidad presenta características particulares que hacen necesaria una coordinación entre estos dos niveles. La misma debería facilitar, en el nivel medio, la adquisición de los instrumentos necesarios para una inserción activa, creativa y eficaz de los alumnos que ingresan en el nivel de educación superior (Vilanova y otros, 1996).

En nuestra experiencia como docentes universitarias, observamos que año a año un elevado número de alumnos fracasa en las clases de matemática de los primeros años de su formación. Creemos que una de las posibles causas de este fracaso es la brusca discontinuidad entre la enseñanza de la matemática en la escuela media y en la universidad.

Ciertamente, las expectativas y exigencias puestas sobre los estudiantes se incrementan en el nivel universitario y no se presta la misma atención a las teorías de enseñanza en este nivel como se hace en otros niveles anteriores (ICMI, 1998).

En nuestra universidad se han realizado diversos esfuerzos en busca de soluciones a esta problemática. Se han probado varias estrategias como cursos de nivelación y modificaciones de programas de las asignaturas de primer año, pero en general los resultados han sido pobres. Creemos que esto puede deberse, por una parte, a que el énfasis fue puesto en suplir las carencias de contenidos conceptuales en cursos intensivos de corta duración y, por otra, a que estos esfuerzos han sido de carácter intrainstitucional, desatendiendo la conexión con las escuelas medias de las que provienen nuestros alumnos.

El presente trabajo se refiere a una experiencia llevada a cabo en relación a la articulación entre la escuela media y la universidad. Surgió a partir de la inquietud planteada por el equipo directivo y profesores del Centro Provincial de Enseñanza Media (CPEM) N.° 17, de la localidad Villa La Angostura (Provincia del Neuquén, Argentina), preocupados por el alto nivel de fracaso de sus alumnos al iniciar sus estudios universitarios.

En busca de una solución a este problema se contactó con docentes de las áreas de Matemática y de Lengua del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue (CRUB) (S. C. de Bariloche, Provincia de Río Negro, Argentina), solicitando un diagnóstico de sus alumnos que les permitiera conocer en profundidad la situación, y trabajar en forma conjunta sobre aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje a fin de lograr una adecuada coordinación de niveles.

La solicitud de los docentes de esta escuela nos llevó a la elaboración de un proyecto de extensión universitaria denominado «Diagnóstico y articulación de contenidos de Matemática y Lengua, entre la Escuela Media y la Universidad», aprobado y financiado por la Secretaría de Investigación y Extensión de la Universidad Nacional del Comahue.

En relación a ambas áreas, los objetivos del proyecto fueron los siguientes:

- Identificar contenidos conceptuales mínimos necesarios para desenvolverse adecuadamente al abordar estudios universitarios.
- Realizar un diagnóstico del aprendizaje de contenidos de los alumnos egresantes de la escuela media citada.
- Establecer una interacción entre los docentes de la universidad y los del colegio, a fin de encontrar estrategias teórico-prácticas que permitan apuntalar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Generar propuestas de trabajo conjunto de docentes de los dos niveles tendentes a lograr continuidad en los contenidos incluidos en las diferentes etapas de la enseñanza.

En este articulo nos referiremos al trabajo realizado desde el área de la Matemática.

En nuestra universidad se han realizado diversos esfuerzos en busca de soluciones a esta problemática. Se han probado varias estrategias como cursos de nivelación y modificaciones de programas de las asignaturas de primer año, pero en general los resultados han sido pobres.

Desarrollo del proyecto

El CPEM N.° 17 es la única escuela de nivel medio de la localidad Villa La Angostura. Es de gestión estatal y concurren a ella todos los adolescentes de la localidad que realizan estudios de este nivel. Villa La Angostura es una localidad turística andina, ubicada a 80 km de San Carlos de Bariloche, Argentina. Tiene una población permanente de 8.000 habitantes, y se encuentra alejada de los centros de estudios universitarios y terciarios.

En el Centro Regional Universitario Bariloche se dictan las siguientes carreras de grado: Profesorado en Matemática, Profesorado y Licenciatura en Ciencias Biológicas, Ingeniería, Tecnología en Acuicultura y Profesorado en Educación Física. Excepto para esta última carrera, se dicta un curso nivelatorio de contenidos de matemática de dos meses de duración con 20 horas semanales de clases teóricas y prácticas.

El proyecto llevado a cabo desde la Universidad se desarrolló en torno a tres ejes principales:

1) Determinación de los contenidos mínimos necesarios para el abordaje de estudios superiores.
2) El diagnóstico del aprendizaje de contenidos de los alumnos egresantes.
3) La interacción de los docentes de la Universidad con docentes y alumnos de la escuela media.

Acerca de los contenidos mínimos necesarios para el abordaje de estudios superiores

De acuerdo con los resultados de una evaluación exploratoria aplicada a los alumnos del último año del CEPEM N.° 17, a entrevistas con los docentes de matemática y equipo directivo de dicho establecimiento medio y a los programas de las asignaturas de matemática de primer año de las carreras del CRUB, establecimos lo que a nuestro criterio, representa los contenidos mínimos necesarios para acceder a estudios superiores, en carreras relacionadas con ciencias.

Entre estos contenidos distinguimos entre conceptuales, procedimentales asociados a un contenido conceptual específico y contenidos procedimentales relacionados con el quehacer matemático en general.

En la Tabla 1 encontraremos los contenidos conceptuales y procedimentales asociados a éstos, agrupados en siete bloques temáticos: Conjuntos, Conjuntos numéricos, Geometría Euclídea, Trigonometría, Funciones, Polinomios y Geometría Analítica. Estos bloques no representan ni un orden jerárquico ni una secuencia didáctica.

Determinamos también, algunos contenidos procedimentales que deberían trabajarse a lo largo de toda la formación matemática escolar media [Tabla 2], ya que los mismos están relacionados con el quehacer matemático en general y no se asocian a un contenido conceptual específico.

CONJUNTOS	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Noción de conjunto. Cardinal de un conjunto. Pertenencia, inclusión. Unión e intersección de conjuntos. Producto cartesiano. Relaciones: gráfico, dominio e imagen. Relación inversa.	Diferenciar las expresiones que definen conjuntos de las que no los definen. Distinguir conjuntos finitos de conjuntos infinitos. Dado un elemento, decidir sí pertenece o no a un conjunto sencillo. Dado un conjunto, decidir si está incluido no en otro conjunto sencillo dado. Distinguir los conceptos pertenencia e inclusión. Dados dos conjuntos sencillos, encontrar el conjunto intersección y unión de los mismos. Hallar y graficar el producto cartesiano de dos conjuntos sencillos dados. Graficar en ejes cartesianos relaciones entre conjuntos sencillos. Reconocer dominio e imagen de una relación dada. Encontrar la relación inversa de una relación dada.
CONJUNTOS NUMÉRICOS	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Números Naturales. Números Enteros: Múltiplos y divisores. Números primos, algoritmo de división en Z, Máximo común divisor, Mínimo común múltiplo, Números coprimos. Factorización en primos. Números Racionales: Operaciones en distintas representaciones (decimal y fraccionaria). Números Reales: Representación en la recta numérica. Orden. Operaciones básicas. Potenciación y radicación. Intervalos reales.	Utilización de los números naturales en problemas de contar o enumerar los elementos de un conjunto finito. Encontrar múltiplos y divisores de un número entero. Resolver problemas donde se apliquen los conceptos de m.c.m., m.c.d., números primos y restos posibles en la división entera. Encontrar factores primos de un número dado. Reconocer números primos menores que 1000 (Aplicar el algoritmo de la Criba de Eratóstenes). Operar con números racionales y manejar las propiedades de las operaciones básicas. Resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa. Representar los números reales en la recta. Operar con distintos conjuntos de números. Análisis de las propiedades de las operaciones y su uso en la resolución de problemas. Estimación y aproximación para predecir resultados, acotar su error y controlar su razonabilidad. Graficar intervalos en la recta real. Hallar unión e intersección de intervalos dados. Utilizar los intervalos para expresar la solución de inecuaciones. Justificación de las relaciones de inclusión entre los distintos conjuntos numéricos.

Tabla 1. Contenidos conceptuales y procedimentales mínimos necesarios para el abordaje de estudios superiores agrupados en bloques temáticos

GEOMETRÍA EUCLÍDEA	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Paralelismo y perpendicularidad: Posiciones relativas de rectas en el plano y de rectas y planos en el espacio. Ángulos: conceptos y clasificación. Medida de ángulos en grados sexagesimales. Radianes. Figuras: Elementos y propiedades de triángulos, cuadriláteros, otros polígonos y círculos. Construcción de polígonos. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. Cuerpos: Poliedros y redondos. Elementos y propiedades. Movimientos rígidos: simetrías, rotaciones y traslaciones en el plano. Congruencias y semejanzas. Teorema de Thales.	Resolver problemas sencillos relacionados con los conceptos de paralelismo y perpendicularidad de rectas en el plano y de rectas y planos en el espacio. Clasificar, describir, construir y representar formas planas y espaciales sencillas. Medir ángulos. Construir un ángulo de una medida dada. Resolver problemas sencillos donde se aplique el concepto de radian. Resolver problemas sencillos que impliquen la aplicación de propiedades de ángulos, triángulos, cuadriláteros y polígonos en general. Construir un polígono inscripto en una circunferencia dada. Resolver problemas que involucren triángulos rectángulos y sus propiedades. Calcular perímetros y áreas de figuras. Calcular superficies y volúmenes de cuerpos sencillos. Utilizar propiedades de movimientos rígidos para clasificar, construir y analizar figuras. Identificar y construir figuras semejantes y congruentes. Resolver problemas que involucren semejanzas y congruencias de triángulos y el Teorema de Thales.

TRIGONOMETRÍA	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Funciones trigonométricas. Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Circunferencia trigonométrica. Relaciones trigonométricas fundamentales. Resolución de triángulos. Teorema del seno. Funciones trigonométricas inversas.	Reconocer en una circunferencia trigonométrica los segmentos asociados a seno, coseno y tangente de un ángulo dado. Inferir de este gráfico relaciones sencillas entre las funciones trigonométricas. Reconocer los signos de las relaciones trigonométricas de un ángulo en los diferentes cuadrantes. Resolver ecuaciones trigonométricas sencillas. Resolver un triángulo rectángulo. Resolución de problemas que involucren relaciones trigonométricas, resolución de triángulos y teorema del seno.

FUNCIONES	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Concepto de función. Distintas notaciones. Formas de expresión a través de tablas, diagramas y gráficos. Gráficos de funciones polinómicas, función valor absoluto, función exponencial y logarítmica. Propiedades. Gráficos por desplazamiento. Composición de funciones. Gráfico de funciones lineales y cuadráticas. Propiedades. Funciones trigonométricas básicas. Propiedades y gráficos.	Analizar si relaciones sencillas son o no funciones. Dar restricciones del dominio para que lo sean. Reconocer si una gráfica corresponde a una función. Reconocer desde el gráfico el dominio e imagen de una función dada. Construir el gráfico de funciones sencillas. Analizar desde su gráfica el comportamiento de una función sencilla (crecimiento, cotas, continuidad, paridad, periodicidad, ceros, valores extremos). Resolver problemas donde sea necesario recurrir a los gráficos de funciones polinómicas y sus propiedades. Hallar el gráfico de una función por dseplazamientos respecto de un gráfico conocido. Analizar y graficar distintas funciones lineales y cuadráticas. Representar la función inversa (cuando exista). Construir la gráfica de las funciones Seno, Coseno y Tangente. Analizar el comportamiento de las distintas funciones trigonométricas.

Tabla 1 (cont.). Contenidos conceptuales y procedimentales mínimos necesarios para el abordaje de estudios superiores agrupados en bloques temáticos

POLINOMIOS	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Grado de un polinomio. Operaciones con polinomios Propiedades. Factores de un polinomio. Raíces de un polinomio.	Operar con polinomios (producto y suma). Reconocer el grado de un polinomio. Reconstruir un polinomio a partir de sus raíces. Factorizar polinomios sencillos. Resolver problemas donde se integren los conceptos de funciones polinómicas (sencillas) y sus gráficas, ecuaciones, raíces de las funciones, factorización de expresiones polinómicas.
GEOMETRÍA ANALÍTICA	
Contenidos conceptuales	***Contenidos procedimentales***
Ecuación de la recta. Recta que pasa por dos puntos. Pendiente. Paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Resolución analítica y gráfica de sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Ecuación de la parábola: Formas general y canónica. Ecuación de la circunferencia. Intersecciones entre curvas.	Relacionar la ecuación general de una recta y su gráfico (variación del gráfico según cambian los parámetros de la ecuación, pendiente y ordenada en el origen). Hallar el gráfico de una recta dada su ecuación y recíprocamente, dado el gráfico de una recta hallar su ecuación. Hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. Hallar la ecuación de una recta dada su pendiente y un punto perteneciente a la misma. Resolver problemas donde se utilicen la ecuación de una recta y el concepto de pertenencia de un punto a la misma. Hallar la ecuación de una recta perpendicular (o paralela) a una dada. Resolver analítica y gráficamente sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Construir sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas dada una de ellas de modo que cumplan ciertas premisas. Modelizar situaciones problemáticas expresando las condiciones como un sistema de ecuaciones 2x2. Relacionar la ecuación general de la parábola y su gráfico (variación del gráfico según cambian los parámetros de la ecuación). Hallar el gráfico de una parábola dada su ecuación. Aplicar el concepto de ceros de una función cuadrática para encontrar los coeficientes de la misma. Relacionar la ecuación general de la circunferencia y su gráfico (variación del gráfico según cambian los parámetros de la ecuación). Hallar el gráfico de una circunferencia dada su ecuación. Hallar la ecuación de la circunferencia conociendo el centro y el radio de la misma. Hallar analíticamente la intersección de curvas. Resolver problemas donde sea necesario recurrir a las ecuaciones de las curvas, sus propiedades y las intersecciones entre curvas.

Tabla 1 (cont.). Contenidos conceptuales y procedimentales mínimos necesarios para el abordaje de estudios superiores agrupados en bloques temáticos

• Organizar datos a través de tablas, gráficos, conteos, etc. • Comprender definiciones sencillas. • Utilizar resultados anteriores en la obtención de nuevos resultados. • Utilizar letras como símbolos algebraicos. • Comprender e interpretar consignas. • Seguir razonamientos y demostraciones sencillas. • Utilizar contraejemplos. • Enunciar conjeturas a partir del estudio de resultados particulares. • Dadas dos proposiciones A y B, distinguir entre A y B y A o B. • Dadas dos proposiciones A y B, distinguir entre $A \Rightarrow B$ y $A \Leftrightarrow B$. • Utilizar vocabulario y notación adecuados a los distintos contextos.	• Relacionar, generalizar, particularizar. • Aplicar resultados anteriores en la resolución de problemas. • Describir procedimientos y resultados. • Justificar, discutir, criticar y fundamentar los razonamientos propios y los de sus compañeros. • Crear y desarrollar estrategias para la resolución de problemas de adecuada complejidad (describir un patrón, construir tablas, gráficos, realizar un análisis sistemático de posibilidades, reducir a problemas más simples, actuar o experimentar). • Predecir, estimar y verificar resultados y procedimientos. • Adecuar conceptos a la modelización y resolución de situaciones problemáticas.

Tabla 2. Contenidos procedimentales del quehacer matemático en general en la formación media

Acerca de la evaluación del aprendizaje de contenidos de los alumnos del último año

A partir de los programas de contenidos de los cursos nivelatorios y de nuestra experiencia como docentes de asignaturas de Matemática de primer año de las distintas carreras que se dictan en nuestra Universidad, confeccionamos una primera evaluación exploratoria con la finalidad de diagnosticar el aprendizaje de contenidos, la cual se aplicó a los alumnos del último año del CPEM N.° 17, que finalizaba el último año de la escuela media

El análisis de los resultados de esta evaluación exploratoria y de los contenidos mínimos identificados, permitió la confección de un nuevo instrumento de evaluación, que fue aplicado a principios del ciclo lectivo siguiente, en dos días consecutivos, a 35 estudiantes del último año del CEPEM N.° 17. Este instrumento de evaluación se encuentra en el Apéndice.

Se solicitó a un especialista la medida de fiabilidad de coherencia interna de este instrumento, resultando 0,75 (en una escala de 0 a 1) según el método Alfa de Cronbach, lo cual muestra que se trata de una prueba de alta coherencia interna (Cronbach, 1951).

A cada estudiante se le entregó además una parrilla donde consignar los motivos que a su criterio determinaron las dificultades, para resolver cada ítem. La parrilla consistió en una tabla de doble entrada en donde figuraban en las columnas los números correspondientes a cada ítem, y en las filas, los siguientes motivos: «nunca lo vi», «no me acuerdo», «no entendí», «no me salió», «no me alcanzó el tiempo», «es muy difícil», «otra cosa». Los alumnos podían marcar con una cruz uno o varios de los motivos propuestos o agregar otras razones en un espacio que estaba previsto a tal fin.

...confeccionamos una primera evaluación exploratoria con la finalidad de diagnosticar el aprendizaje de contenidos...

Los ítems de la evaluación fueron calificados como «resuelto satisfactoriamente» (RS), «resuelto en parte» (RP), «no resuelto satisfactoriamente» (NRS) o «no contestado» (NC).

En la Tabla 3 presentamos para cada ítem, los contenidos conceptuales y procedimentales implicados en él, como así también el porcentaje de alumnos que resolvieron satisfactoriamente, en parte, no resolvieron la tarea o no contestaron.

Se realizó también un análisis de los motivos señalados por los alumnos, con los que justifican el no haber completado satisfactoriamente las tareas encomendadas. A los fines de este trabajo, se consigna en la última columna, el motivo señalado con más frecuencia para cada ítem.

Ítem	**Contenidos conceptuales**	**Contenidos procedimentales**	**Respuestas** RS	REP	NR	NC	(*)
1	Conjuntos: Caracterización.	Diferenciar las expresiones que definen conjuntos de las que no los definen.	54	0	36	10	OR
2	Conjuntos: Cardinal.	Distinguir conjuntos finitos de conjuntos infinitos.	66	0	29	5	NA
3	Unión e intersección de conjuntos.	Dados dos conjuntos, encontrar el conjunto intersección y unión de los mismos.	8	6	12	74	NA
4	Conjuntos numéricos: propiedades de los reales.	Inferir la validez de una proposición a partir de las propiedades de la potenciación de los reales.	44	1	52	3	NA
5	Conjuntos numéricos: reales.	Ubicar un racional entre dos enteros consecutivos.	4	0	14	82	NA
6	Conjuntos numéricos: representación en la recta real.	Ubicar números reales en la recta real.	57	23	9	11	NA
7	Polinomios: operaciones elementales.	Operar con polinomios (producto y suma), y reconocer el grado de un polinomio.	0	3	23	74	NA
8	Polinomios: raíces.	Reconstruir un polinomio a partir de sus raíces.	1	13	9	77	NA
9	Polinomios: factorización.	Factorizar polinomios sencillos.	0	0	17	83	NA
10	Propiedades de los números reales.	Análisis de las propiedades de las operaciones de los números reales.	6	5	29	60	NA

Tabla 3. Contenidos conceptuales y procedimentales para cada ítem de la evaluación diagnóstica y porcentajes de respuestas para cada categoría. [Leyenda: RS: Resuelve satisfactoriamente, REP: Resuelve en parte, NR: No lo resuelve, NC: No contesta. En la columna NR se consideraron las respuestas en que la resolución posee errores conceptuales y/o procedimentales. La última columna se menciona para cada ítem el motivo señalado con más frecuencia como determinante de las dificultades para resolverlo. NA: No me acuerdo, NV: Nunca lo vi, NS: No me salió, OR: Otra razón]

Ítem	Contenidos conceptuales	Contenidos procedimentales	Respuestas RS	REP	NR	NC	(*)
11	Números Enteros: Mínimo Común Múltiplo.	Reconocer la adecuación del concepto de m.c.m. en la resolución de un problema y su aplicación.	31	6	14	49	NS
12	Concepto de función.	Reconocer si una gráfica corresponde a una función de R en R.	5	19	21	55	NA
13	Funciones: Dominio e Imagen.	Analizar si relaciones sencillas son o no funciones. Dar restricciones del dominio para que lo sean.	7	0	0	93	NA
14	Gráficos de funciones por desplazamiento.	Hallar el gráfico de una función por desplazamientos respecto de un gráfico conocido.	0	0	0	100	NA
15	Función lineal y cuadrática.	Graficar funciones lineales y cuadráticas.	26	3	22	59	NA
16	Función lineal.	Hallar la ecuación de la recta dada por dos puntos y por su pendiente y un punto.	0	0	11	89	NA
17	Función lineal: . Puntos que pertenecen a la recta.	Resolver problemas donde se utilicen la ecuación de una recta y el concepto de pertenencia de un punto a la misma.	0	0	6	94	NA
18	Función cuadrática: Raíces.	Aplicar el concepto de ceros de una función cuadrática para encontrar los coeficientes de la misma.	0	0	3	97	NA
19	Gráfica de Funciones polinómicas . Lectura de gráficos. Ecuaciones polinómicas .	Resolver problemas donde sea necesario recurrir a los gráficos de funciones polinómicas y sus propiedades. Hallar analíticamente la intersección de curvas.	0	0	0	100	NV
20	Sistemas de Ecuaciones Lineales.	Construir sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas dada una de ellas de modo que cumplan ciertas premisas.	0	0	0	100	NV
21	Semejanza de triángulos.	Resolver un problema que involucre el T. de Thales.	3	0	6	91	NA
22	Polígonos inscritos. Cálculo de áreas.	Construir un polígono inscrito en una circunferencia Calcular el área conociendo el radio.	6	1	2	91	NA
23	Cálculo del área de un círculo.	Resolver un problema que involucre cálculo de áreas de círculos.	0	0	3	97	NA
24	Simetría y rotación.	Construcción del simétrico y del rotado de un figura, mediante una simetría y una rotación dadas.	0	0	0	100	NA
25	Circunferencia trigonométrica. Funciones trigonométricas.	Reconocer en una circunferencia trigonométrica los segmentos asociados a seno, coseno y tangente de un ángulo dado. Inferir de este gráfico relaciones sencillas entre las funciones trigonométricas.	2	0	5	93	NA
26	Radianes.	Calcular el radio de una circunferencia conocidos un arco y su correspondiente ángulo central.	0	0	6	94	NA
27	Funciones trigonométrica.	Reconocer los signos de las relaciones trigonométricas de un ángulo en los diferentes cuadrantes.	0	1	1	98	NA
28	Ecuaciones trigonométricas.	Resolver una ecuación trigonométrica sencilla.	0	0	0	100	NA
29	Resolución de triángulos rectángulos.	Resolver un triángulo rectángulo.	0	3	9	88	NA
30	Resolución de triángulos.	Calcular el área de un triángulo, conociendo la medida de sus tres lados.	0	0	23	77	NA

Tabla 3 (cont.). Contenidos conceptuales y procedimentales para cada ítem de la evaluación diagnóstica y porcentajes de respuestas para cada categoría. [Leyenda: RS: Resuelve satisfactoriamente, REP: Resuelve en parte, NR: No lo resuelve, NC: No contesta. En la columna NR se consideraron las respuestas en que la resolución posee errores conceptuales y/o procedimentales. La última columna se menciona para cada ítem el motivo señalado con más frecuencia como determinante de las dificultades para resolverlo. NA: No me acuerdo, NV: Nunca lo vi, NS: No me salió, OR: Otra razón]

Algunos aspectos destacables de los resultados de la evaluación de diagnóstico

Si bien en promedio el 42% de los alumnos responde satisfactoriamente a los ítems correspondientes a conjuntos, es notable que en los ítems referidos a caracterización y cardinalidad de un conjunto (ítems 1 y 2) más del 50% de los alumnos dio una respuesta satisfactoria; mientras que, en unión e intersección de conjuntos (ítem 3) sólo alcanzan al 8% las respuestas satisfactorias. Es decir, los estudiantes en general pueden reconocer conjuntos, pero les resulta difícil operar con ellos.

Respecto a las propiedades de los números reales, mientras que el ítem 4 fue resuelto satisfactoriamente por el 44% de los alumnos, sólo el 11% de los alumnos resuelve satisfactoriamente o en parte el ítem 10. Creemos que esta diferencia, puede deberse, no tanto al desconocimiento de las propiedades de los números reales, sino a un aspecto de carácter procedimental, ya que en el ítem 10 se solicitó a los alumnos seguir un razonamiento dado, lo cual involucra funciones mentales más elaboradas que en el ítem 4.

El ítem 6, que se refieren a la representación de los números reales en la recta numérica fue resuelto satisfactoriamente o en parte por el 80% de los alumnos. Sin embargo, el ítem 5 que requiere la identificación de dos números enteros consecutivos entre los que se encuentra un racional dado, sólo fue resuelto por el 4% de los estudiantes. Dado que el procedimiento requerido para resolver el ítem 5 es necesario para resolver el ítem 6, este resultado nos lleva a conjeturar que la dificultad se encontró en la interpretación de la notación utilizada (letras).

En los ítems 7, 8 y 9, que se refieren a operaciones y factorización de polinomios, más del 85% de los alumnos no da ninguna respuesta o no resuelve satisfactoriamente. Observamos que algunos alumnos, si bien intentan realizar las operaciones con polinomios, ninguno obtiene resultados satisfactorios. En particular, los ítems 7 y 9 no tuvieron ninguna respuesta correcta. Esto nos alertó sobre la necesidad de que los docentes de los últimos años del nivel medio trabajen particularmente sobre este tema.

En los ítems referidos a funciones (del 12 al 18) en promedio más del 80% de los estudiantes no contesta. Si bien aproximadamente el 50% de los alumnos realizan adecuadamente la gráfica de una función lineal (ítem 15, a), tienen dificultades para hallar la ecuación de una recta a partir de dos puntos dados, como así también para interpretar el concepto de pertenencia de un punto a una recta. Además, es notable que en los restantes ítems donde era necesario graficar una recta, más del 94% de los alumnos no reconoce la necesidad de su uso. Nos situamos nuevamente frente a una dificultad de carácter procedimental.

En lo que se refiere a los ítems 13, 14, 16 y 17 se observa una marcada dificultad en cuanto al uso de simbología.

...los estudiantes en general pueden reconocer conjuntos, pero les resulta difícil operar con ellos.

Ningún alumno intenta realizar el gráfico de una función por desplazamiento a partir de un gráfico conocido.

Es notorio que en el ítem 19, donde se solicitó (entre otras cosas) la realización del gráfico de dos funciones en el marco de un problema, ningún alumno intentó resolverlo.

Los ítems correspondientes a sistemas de ecuaciones (19 y 20), geometría euclídea (21 al 24) y trigonometría (25 a 30), no fueron resueltos satisfactoriamente o no fueron contestados por más del 90% de los alumnos. Cabe aclarar que el tema sistemas de ecuaciones, había sido trabajado en años anteriores, y los temas de geometría euclídea, corresponden a la escolaridad primaria. El tema trigonometría, no había sido visto aún por estos alumnos. Nos parece importante señalar que estos temas son consideradas como requisitos básicos para las matemáticas universitarias, y en general no forman parte de los currículos. Por ello, sería deseable que se les prestara mayor atención en la escuela.

Ningún alumno contesta los ítems 19, 20 y 23. Hemos de notar que para resolver las tareas propuestas en estos ítems es necesario actualizar contenidos de otros años de escolarización y organizarlos de una manera novedosa, por lo que podríamos afirmar que a los estudiantes estas tareas se les presentan como «problemas». Estos resultados nos dan indicios de que estos alumnos no están acostumbrados a enfrentarse con este tipo de tareas.

Acerca de la interacción con docentes y alumnos de la escuela media

De acuerdo con el análisis de la evaluación diagnóstica, diagramamos una serie de tareas para realizar con los docentes y alumnos de la escuela media. Éstas fueron:

- Reuniones de trabajo de los docentes del Centro Universitario Regional Bariloche con los docentes de Matemática de la escuela, en las cuales se propusieron y discutieron estrategias de enseñanza, formulación de los programas de contenidos de Matemática, trabajos prácticos y la planificaciones de actividades generales. Además se ofreció asesoramiento bibliográfico.

- Talleres de trabajo realizados en Villa La Angostura, en los cuales participaron docentes de la escuela, de Matemática y otras áreas afines. En los mismos se trabajó sobre propuestas metodológicas acordes a las necesidades detectadas en los encuentros realizados y a la evaluación de diagnóstico efectuada.
- Dentro del marco de la articulación y con el objeto de introducir a los estudiantes en el contexto universitario, diseñamos y pusimos en práctica una clase de matemática en la que participaron los alumnos de quinto año del CPEM N.° 17. La clase se desarrolló en aulas de la universidad, fue coordinada por las autoras, y consistió en la presentación de una situación problemática a partir de la cual se trabajaron conceptos de teoría de números.

Conclusiones

A partir de la lectura exhaustiva de las pruebas diagnósticas, desde el punto de vista de los contenidos conceptuales y procedimentales, como así también desde los motivos que los alumnos consideran como determinantes para la no resolución de los ítems de la evaluación, podemos destacar los siguientes puntos:

- Hemos advertido como un patrón que los alumnos son capaces de resolver ciertos ejercicios que reconocen como típicos dentro de una temática que está siendo desarrollada en clase. Sin embargo, si el ejercicio o problema resulta enunciado de una forma diferente, en general les resulta muy difícil concretar su solución.
- Aparece reiteradamente que los alumnos pierden (o desconocen) la conexión que existe entre los distintos contenidos que se desarrollan en la escolaridad, no pudiendo recurrir a los trabajados en años anteriores, como herramienta para la solución de nuevos problemas.
- Tenemos indicios que nos llevan a sugerir que, independientemente del nivel de creatividad necesario para abordar la tarea, los estudiantes se relacionan con ella principalmente desde un nivel de memorización. Se observa (Tabla 3, última columna) que para la gran mayoría de los ítems, la alusión más frecuente como motivo por el cual no se resuelve es «no me acuerdo», aun para aquellos temas nunca vistos como trigonometría. Creemos que estas concepciones de los alumnos, dificultan el acceso a niveles más altos de creatividad en el aprendizaje de la matemática.

...sería adecuado orientar el trabajo hacia ejercicios y problemas que requieran de mayores niveles de creatividad para su resolución, de tal manera que las tareas propuestas apunten a desarrollar en los estudiantes habilidades relacionadas con el análisis, la síntesis y la discusión, además de la memorización, interpretación y aplicación.

En resumen, pudimos inferir que las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes y que hacen necesario un trabajo de articulación se relacionan principalmente con tres aspectos:

- La estereotipación de las tareas a resolver en clases de matemática.
- La atomización de los contenidos que se desarrollan en la escolaridad.
- El nivel de creatividad al que recurren los alumnos para la resolución de las tareas que deben desarrollar.

Las corrientes actuales de educación matemática presentan, especialmente, a la resolución de problemas como una herramienta eficaz, tanto en su aspecto de dar sentido a los saberes matemáticos, como en su papel de fomentar la creatividad de los estudiantes. Por esto, consideramos que sería adecuado orientar el trabajo hacia ejercicios y problemas que requieran de mayores niveles de creatividad para su resolución, de tal manera que las tareas propuestas apunten a desarrollar en los estudiantes habilidades relacionadas con el análisis, la síntesis y la discusión, además de la memorización, interpretación y aplicación.

Para ello creemos que es necesario atender especialmente a que los ejercicios y problemas propuestos abarquen un amplio espectro en relación a los niveles de creatividad necesarios para su resolución, es decir, que estas tareas sean planificadas para que el estudiante busque soluciones, explore modelos y alternativas, formule conjeturas, utilizando la memoria y la ejercitación sólo como instrumentos necesarios para «dejar más tiempo» a la creatividad (Ferraris y Montoro, 1999).

Además, sería recomendable realizar planificaciones de las actividades que hay que desarrollar en el aula (por ejemplo en forma de mapa conceptual (Novak y Gowin, 1988)), donde aparezcan explícitamente las conexiones entre los distintos conceptos, de modo que el docente tenga presente cuáles son y esté atento a ellas.

Asimismo vemos como importante que el docente explicite cuáles son estas conexiones. Esta explicitación puede hacerse interactivamente con los alumnos de modo de que ellos mismos puedan advertirlas y comprenderlas.

Una forma que parece adecuada para el trabajo con los alumnos es la realización de guías de trabajos prácticos, elaboradas de modo que en los ejercicios y problemas propuestos sea necesario utilizar los contenidos trabajados previamente, tanto en el curso presente como en años anteriores, es decir, que se haga necesaria la utilización permanente de conceptos relacionados a los temas que se trabajan, y a las conexiones de esos conceptos con temas vistos anteriormente.

Además, sería adecuado prever un espacio de discusión (puesta en común) para la confrontación de estrategias de resolución e institucionalización de saberes. Esto, especialmente orientado a los contenidos procedimentales y actitudinales, como la justificación de razonamientos, el uso de vocabulario adecuado, respeto por la opinión del otro, optimización de estrategias, etc.

Creemos que los cambios necesarios para lograr el objetivo de articulación propuesto, son producto de un proceso lento que recién comienza a ponerse en marcha, y que necesita aún del trabajo conjunto de los docentes de los dos niveles involucrados. Para ello se hace necesario dar continuidad a talleres de trabajo con los docentes de la escuela, en reuniones periódicas.

En cuanto a las propuestas metodológicas, es deseable que se pongan en práctica durante toda la escuela media, entendidas como una forma de trabajo que se extienda progresivamente a otras áreas disciplinares.

Si bien este proyecto nace del requerimiento específico de esta escuela media, consideramos a esta problemática común al sistema educativo de nuestro país. La dimensión restringida y localizada de este proyecto fue ventajosa, ya que a la vez de satisfacer los requerimientos planteados por la institución educativa media, permitió una evaluación permanente del avance del mismo, y facilitó el mejoramiento de los instrumentos de evaluación que nos propusimos elaborar.

Es importante mencionar que se llevó a cabo un trabajo paralelo al aquí descrito en el área de Lengua. El lector interesado puede contactarse con la Prof. Dora Riestra a la dirección de correo electrónico

crivelli@bariloche.com.ar

o por correo postal a la dirección de referencia de este trabajo.

Una forma que parece adecuada para el trabajo con los alumnos es la realización de guías de trabajos prácticos, elaboradas de modo que en los ejercicios y problemas propuestos sea necesario utilizar os contenidos trabajados previamente, tanto en el curso presente como en años anteriores...

Agradecimientos

Deseamos agradecer a la comunidad educativa del CEPEM N.° 17 de Villa La Angostura, en particular a su Directora Prof. Mónica Satragni y a su asesora pedagógica Lic. Inés Freire, como así también a todos los integrantes del grupo que llevó adelante el Proyecto de extensión. Nuestro especial reconocimiento al Ing. Luis Cárdenas por su colaboración en el diseño de las pruebas de diagnóstico, por el esfuerzo realizado en la aplicación y corrección de las mismas y por su colaboración en el tratamiento preliminar de los datos. Por último, a la Prof. M. Pianni por su trabajo en la medida de la fiabilidad de las evaluaciones diagnósticas utilizadas en este proyecto.

Referencias

ICMI (1998): *Documento de Discusión: Sobre La Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario.* The International Commission on Mathematical Instruction. (Traducción al español de Dr. Néstor Aguilera). Ministerio de Cultura y Educación. Secretaría de Programación y Evaluación Educativa. CLAMI. UMA. FOMA.

FERRARIS C. y M.V. MONTORO (1999): «Procedimientos utilizados en la resolución de problemas de teoría de números: Una experiencia con alumnos de la escuela media», *Suma,* 32, 61-68.

CRONBACH, L.J. (1951): «Coefficient alpha and the internal structure of test», *Psychometrika* 16, 293-334.

NOVAK, J. y D.B. GOWIN (1988): *Aprendiendo a aprender,* Martínez Roca Editores, Barcelona

VILANOVA S.L., M.D JOLIS, S. VECINO y J. GIANOBI (1996): «Articulación escuela media–universidad. Docentes y alumnos, ¿una visión compartida?, *Aula Abierta* 5, 6-10.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN (1996): «Articulación entre nivel inicial y la EGB1», *Zona Educativa,* 9, 14-16.

Apéndice

Ítem 1: Explicar si las siguientes expresiones determinan o no conjuntos.

- El conjunto de todas las especies bellas.
- El conjunto de los alumnos de primer año de Ingeniería del CRUB.
- El conjunto formado solamente por el Presidente de la Nación.

Ítem 2: ¿Cuántos elementos tienen los siguientes conjuntos?

- {x / x es una vaca de tres cabezas y cinco patas}
- El conjunto de los hombres que son actualmente presidentes de Boca.
- El conjunto de los números pares.

Ítem 3: Dar el conjunto intersección y el conjunto unión de los siguientes conjuntos:

- El conjunto de las mujeres y el conjunto de las docentes.
- El conjunto de los humanos nacidos en 1959 y el conjunto de las mujeres nacidas en el mes de Mayo.
- El conjunto de todas las rectas horizontales del plano y el conjunto de todas las rectas verticales del plano.

Ítem 4: Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Sean a y b reales cualesquiera.

a) Si $a^2=b^2$, entonces $a=b$

b) Si $a^2=b^2$, entonces $a=b$ o $a=-b$

c) Si $a^2=b^2$, entonces $a=b$ y $a=-b$

d) Si $a^2=b^2$, entonces $a^3=b^3$

Ítem 5: Encontrar el entero m tal que:

a) $m < -13/2 < m+1$

b) $m < 18/5 < m+1$

Ítem 6: Representar en la recta numérica los siguientes números :

5 ; $-14/5$; -2 ; $11/4$; $-2/16$; $3/4$; $-4{,}8$; $\sqrt{5}$; 1,15

Ítem 7: Sean $P = 3x^2 - 2x$ y $T = 3x^2 + 2$.

- Hallar el grado de $P^2 + T^2 - 2 \cdot P \cdot T$

Ítem 8: ¿Existe un polinomio que cumpla con las siguientes condiciones?:

a) De grado 2 que tenga como raíces 0 y 3.

b) De grado 2 que tenga como raíces 1, –1 y 3.

En caso afirmativo, dar un ejemplo, y en caso que no sea posible, indicar por qué.

Ítem 9: Escribir los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles (factorizar):

a) $x^2 + 2 \cdot x - 35$

b) $x^4 - 16$

c) $x^3 + 1$

Ítem 10: Determinar por qué el siguiente razonamiento no es correcto.

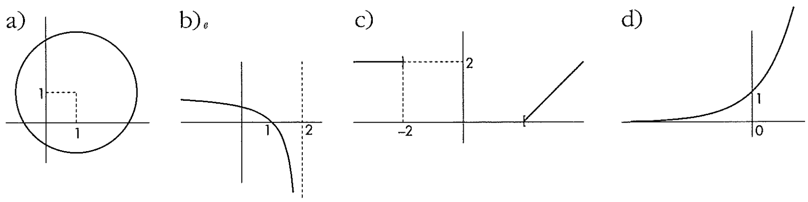
Sea a, b reales.

Si $a = b$

multiplicando por a	$a \cdot a = a \cdot b$
o sea	$a^2 = a \cdot b$
restando b^2	$a^2 - b2 = a \cdot b - b^2$
factorizanando	$(a+b) \cdot (a-b) = b.(a-b)$
dividiendo por $a-b$	$a+b = b$
pero $a = b$, entonces	$2 \cdot b = b$
dividiendo por b	2 = 1 ! ! ! !

Ítem 11: Alberto, Bernardo y Carlos son tres choferes de una determinada empresa de transporte de pasajeros. Si los tres salen juntos a las 8 de la mañana en diferentes recorridos, siendo el recorrido de Alberto de 45 minutos, el de Bernardo de 1 hora y el de Carlos de 40 minutos, ¿cuando se vuelven a reunir los tres en la empresa? Indicar también cuantos recorridos efectuó cada uno.

Ítem 12: Dados los siguientes gráficos decir si corresponden o no a funciones de R en R. Explicar por qué.



Ítem 13: Las siguientes son funciones $f: A \rightarrow$ R. Proponer un conjunto A apropiado (Dominio de la función)

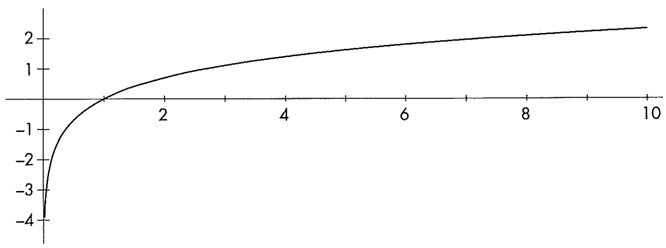
a) $f: A \rightarrow R \ / \ f(x) = \sqrt{2x+3}$

b) $f: A \rightarrow R \ / \ f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Ítem 14: Si el siguiente es el gráfico de $f(x) = \log x$; graficar (por desplazamiento):

a) $g(x) = \log(x+3)$

b) $h(x) = 3 + \log(x)$



Ítem 15: Representar gráficamente las siguientes funciones

a) $y = 3x + 1$ b) $y = (x-1)^2 + 3$

Ítem 16: Dados los puntos $P = (2, -1)$ y $Q = (4, 7)$, hallar las expresiones de las siguientes rectas y representarlas gráficamente.

a) La que pasa por los puntos Q y P.

b) La que pasa por P y tiene pendiente igual a 2.

Ítem 17: Sean $A = (2, 5)$; $B = (7, 3)$ y $C = (x, 7)$. Calcular el valor de x para que los tres puntos resulten alineados.

Ítem 18: Hallar los valores de a y b en la función $y = ax^2 + bx - 4$ para que la parábola correspondiente interseque al eje de las abscisas en los puntos $x = 4$ y $x = -1$.

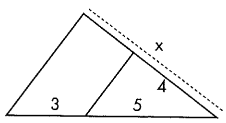
Ítem 19: Dos poblaciones A y B presentan un crecimiento que responde respectivamente a las siguientes ecuaciones: Para A: $N(t) = (5/2)t-30$ Para B: $N(t) = t^3-12t^2+44t-8$ donde t es el tiempo transcurrido en semanas en cada conteo y $N(t)$ representa el número de individuos de cada población para cada tiempo t. Sabiendo que ambas poblaciones coinciden en su número de integrantes en la 4.ª semana, se pide:

a) Hacer un gráfico aproximado de la situación, señalando qué variable se grafica en cada eje.
b) Indicar los intervalos de tiempo en los que la población de A supera a la población de B y viceversa.
c) Averiguar qué cantidad de individuos tenía cada población en el momento de iniciar las observaciones (t=0).
d) Averiguar si existirá algún otro momento en el cual el número de individuos de ambas poblaciones coincida.

Ítem 20: Considere el siguiente sistema de ecuaciones donde se da la primera ecuación. Se pide completar el sistema con otra ecuación de modo que el mismo tenga: (a) una única solución, (b) infinitas soluciones (c) ninguna solución. Resolver los sistemas gráfica y analíticamente para mostrar que la ecuación elegida es adecuada.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \quad \dots \end{cases}$$

Ítem 21: Encontrar la longitud del segmento x en la siguiente figura:



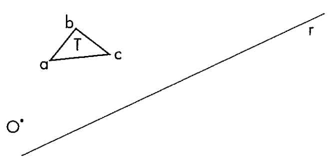
Ítem 22: Dada una circunferencia de radio 5 cm

a) Construir un cuadrado (cualquiera) inscrito en la circunferencia.
b) Construir un hexágono regular inscrito en la circunferencia y dibujar los ejes de simetría del hexágono.
c) Calcular las áreas de los polígonos regulares antes construidos.

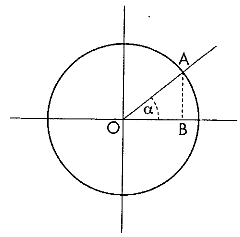
Ítem 23: Demostrar que si el radio de la circunferencia exterior de una corona es el doble del de la interior, el área de la corona es el triple de la del círculo interior.

Ítem 24: Dado el siguiente triángulo:

a) Hallar el rotado del triángulo T con centro en O y un ángulo de rotación de 135° en sentido horario.
b) Hallar el simétrico del triángulo T respecto del eje r.

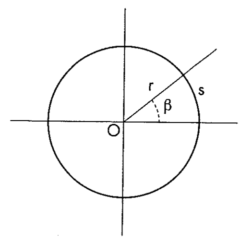


Ítem 25: a) Marcar en el gráfico los segmentos que representan sen α, cos α y tg α.



b) Podrías explicar por qué $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$? ¿Y por qué $\text{tg}\alpha = \text{sen}\alpha / \cos\alpha$?

Ítem 26: Hallar el radio r de un círculo en el cual, a un arco s de 15 cm le corresponde un ángulo central β de 2,5 radianes.



Ítem 27: a) Dada la siguiente tabla, colocar el signo de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.

Cuadrante	sen α	cos α	tg α	cotg α	sec α	cosec α
I						
II						
III						
IV						

b) Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{3}$ y que α está en el segundo cuadrante, calcular cuánto valen las de las restantes funciones trigonométricas para el mismo ángulo.

Ítem 28: Hallar el valor de α con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; que verifique la siguiente ecuación: $\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha$.

Ítem 29: Hallar la medida de los ángulos interiores y de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 15 cm y que la medida de un cateto es 3/4 de la medida del otro.

Ítem 30: Calcular el área de un triángulo cuyos lados son a = 18 cm; b = 15 cm; c = 10 cm.

Virginia Montoro
Mónica de Torres
Centro Universitario Regional Bariloche.
Universidad Nacional del Comahue.
Bariloche (Argentina)

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 59-63

Generación de desigualdes en dos variables a partir de la interpretación geométrica de la integral definida

Juan Carlos Cortés López
Gema Calbo Sanjuán

En este artículo se estudia un método basado en la interpretación geométrica de la integral definida de una función y de su inversa para generar desigualdades en dos variables. Sin pretender agotar la técnica descrita vemos cómo el método permite deducir una gran variedad de desigualdades, algunas de ellas ciertamente sofisticadas. La potencia del método se muestra probando de un modo distinto al tradicional algunas desigualdades clásicas. El artículo está planteado como un modelo de trabajo-investigación dirigido por el profesor, para ser llevado al aula, y para que de esta forma, a partir de ejemplos sencillos, los alumnos acaben por generalizar los resultados. Por ello, a lo largo de la exposición del trabajo se van intercalando las tareas que se les fueron encomendando a los alumnos, así como los resultados que obtuvieron y las ayudas que se les fueron proporcionando para que esta actividad dirigida alcanzara los objetivos establecidos inicialmente.

EN LAS PROGRAMACIONES actuales de Matemáticas en Secundaria y Bachillerato el estudio de desigualdades sólo llega a tener –en el mejor de los casos– un «pequeño hueco» en el segundo curso de bachillerato de las modalidades científico-tecnológica y ciencias de la naturaleza y de la salud, y, siempre, como una aplicación mecánica del cálculo diferencial, donde la potencia del método «permite» ocultar toda interpretación geométrica de las inecuaciones que se demuestran.

Son varios los artículos recientes en los cuales se proponen interesantes métodos geométricos para estudiar algunas desigualdades clásicas en dos variables (Fernández y González, 1997 y 1998), por ejemplo, o métodos para obtener desigualdades en dos variables (Cortés, 1998).

En el siguiente trabajo damos un método para generar desigualdades en dos variables a partir de la interpretación geométrica de la integral definida de una función y de su inversa. La base matemática que se requiere es la propia de cualquier alumno del nivel educativo antes citado, y, sin embargo, la aplicación de la técnica permite demostrar, de un modo distinto al usual, algunas inecuaciones importantes. Así, por ejemplo, aplicando este método demostraremos la conocida desigualdad de Young.

El artículo no está planteado para agotar la técnica descrita, sino como un modelo de trabajo-investigación para ser llevado al aula de segundo de bachillerato o de un primer curso universitario científico-tecnológico; por ello, durante la exposición de estas páginas iremos explicitando la forma en la que el trabajo se llevó al aula, con las correspondientes indicaciones que se les dio a los alumnos, así como las tareas que se les encomendó realizar. Se trata, por tanto, de una *investigación matemática dirigida*. *Investigación*, porque pretendemos que sean los alumnos quienes se adentren fuera de las fronteras propias de la

ARTÍCULOS

programación de matemáticas que cursan, y pisen un terreno, el de las desigualdades en dos variables, que les resulta prácticamente desconocido. *Dirigida*, por que pretendemos que con nuestra ayuda y dirección, *todos* los alumnos puedan realizar la siempre difícil, pero excitante, aventura del descubrimiento.

La estructura del trabajo es como sigue: en primer lugar, veremos cómo podemos generar desigualdades en dos variables sobre algunas familias de funciones elementales que los alumnos de estos niveles educativos conocen bien. Seguidamente, expondremos algunas observaciones, obtenidas como consecuencia del trabajo en el aula, que resultan de utilidad cuando los alumnos tratan, a propuesta nuestra, de extender las desigualdades a recintos más amplios. Ello nos conducirá, de forma natural, al desarrollo de su espíritu crítico cuando les pidamos que comparen esta técnica geométrica que se les propone con los métodos analítico-algebraicos, que ya conocen. Finalmente, y como aspiración propia del quehacer matemático, propondremos que generalicen los resultados obtenidos.

Desigualdades sobre familias de funciones elementales

Familia potencial-radical

Comenzamos ilustrando la técnica que proponemos mediante varios ejemplos sencillos en los cuales, los alumnos, bajo una primera labor fuertemente dirigida por nosotros, fueron generando desigualdades en dos variables para la familia de funciones potenciales y sus inversas, las funciones radicales. Posteriormente, les pedimos que generalizasen las inecuaciones establecidas en los primeros ejemplos particulares.

Empezamos nosotros considerando la función $f(x) = x^2$, y su inversa, $g(x) = \sqrt{x}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ a partir de la gráfica de la figura 1 se deduce que el área del rectángulo de lados a y b es menor que la suma de las áreas A_1 y A_2, siendo A_1 el área bajo la función $f(x) = x^2$ en $[0, a]$, y A_2 el área bajo la función $g(x) = \sqrt{x}$ en $[0, b]$; esto es. utilizando la interpretación de la integral definida:

$$a \cdot b \leq \int_0^a t^2 dt + \int_0^b \sqrt{t}\, dt = \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3} b\sqrt{b} = \frac{1}{3}\left(a^3 + 2b\sqrt{b}\right)$$

o equivalentemente

$$3ab \leq a^3 + 2b\sqrt{b}, \quad \forall a, b \geq 0 \qquad [1]$$

Además geométricamente se deduce que en [1] se da la igualdad sí y sólo sí $b = a^2$, como es sencillo comprobar algebraicamente.

Ahora, les propusimos a ellos que partiesen de la función $f(x) = x^3$ y su inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$, razonando como antes y a partir de la gráfica análoga a la dada en la figura 1 obtuvieron:

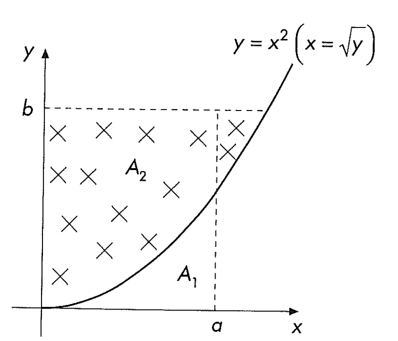


Figura 1

$$a \cdot b \leq \int_0^a t^3 dt + \int_0^b \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{a^4}{4} + \frac{3}{4} b\sqrt[3]{b} = \frac{1}{4}\left(a^4 + 3b\sqrt[3]{b}\right)$$

$$4ab \leq a^4 + 3b\sqrt[3]{b} \quad \forall a, b \geq 0 \qquad [2]$$

Después de trabajar algunos casos particulares más, establecieron que en general, dado $n \in \mathbb{N}$, y a partir de un razonamiento análogo al anterior sobre la función potencial $f(x) = x^n$ y su inversa $g(x) = \sqrt[n]{x}$, se tiene para $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$a \cdot b \leq \int_0^a t^n dt + \int_0^b \sqrt[n]{t}\, dt = \frac{a^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1} b\sqrt[n]{b} = \frac{1}{n+1}\left(a^{n+1} + nb\sqrt[n]{b}\right)$$

$$(n+1)ab \leq a^{n+1} + nb\sqrt[n]{b} \quad \forall a, b \geq 0, \; n \in \mathbb{N} \qquad [3]$$

La riqueza de este trabajo dirigido nos brindó, llegado este momento, la oportunidad de introducir aquí el método de inducción como mecanismo de demostración matemática para resultados que dependen de una variable discreta.

Comenzamos ilustrando la técnica que proponemos mediante varios ejemplos sencillos...

Familia exponencial-logarítmica

Veamos cómo se aplicó el método desarrollado en el subapartado anterior para establecer desigualdades en dos variables sobre la función exponencial y su inversa, la función logaritmo. Se les propuso que realizasen el mismo trabajo que habían hecho sobre las funciones potenciales, pero sobre la función logarítmica. Así, empezando para distintos casos particulares de la base (base decimal y base natural), después se pasó a analizar directamente el caso general. Sea entonces $f(x) = c^x$ y supongamos $c > 1$. Consideremos su función inversa, $g(x) = \log_c x$. De nuevo, por la interpretación geométrica de la integral definida y la figura 2, obtuvieron:

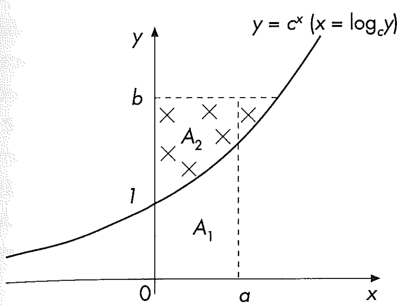


Figura 2

$$a \cdot b \le \int_0^a c^t dt + \int_1^b \log_c t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\ln c}\left(c^a + b \ln b - b\right) \quad \forall a \ge 0,\ \forall b \ge 1,\ \forall c > 1 \qquad [4]$$

o, equivalentemente,

$$ab \ln c \le c^a + b \ln b - b \Rightarrow c^{ab} \le e^{c^a - b} b$$

$$\left(\frac{c^a}{b}\right)^b \le e^{c^a - b}, \quad \forall a \ge 0,\ \forall b \ge 1,\ \forall c > 1 \qquad [5]$$

Otras familias

Sin pretender agotar en este trabajo la técnica expuesta para generar las desigualdades correspondientes sobre todas las familias de funciones elementales, en este apartado mostraremos cómo este método sirvió para generar desigualdades ciertamente sofisticadas.

Propusimos que partiesen de la función $f(x) = \tan x$, y su inversa $g(x) = \arctan x$. Entonces para todo $a \in [0, \pi/2)$ y $b \ge 0$, obtuvieron (ver figura 3)

$$a \cdot b \le \int_0^a \tan t \, dt + \int_0^b \arctan t \, dt = -\ln(\cos a) + b \arctan b - \frac{1}{2}\ln(1 + b^2)$$

es decir

$$a \cdot b \le b \arctan b - \ln\left(\sqrt{1 + b^2} \cdot \cos a\right), \quad \forall a \in [0, \pi/2),\ \forall b \ge 0 \qquad [6]$$

Algunas observaciones sobre las desigualdades obtenidas

La aplicación sistemática de esta técnica sobre una amplia colección de funciones nos ha deparado algunas situaciones interesantes que merece la pena comentar. A continuación, recogemos a modo de observaciones, algunas de las conclusiones que resultaron del trabajo en el aula.

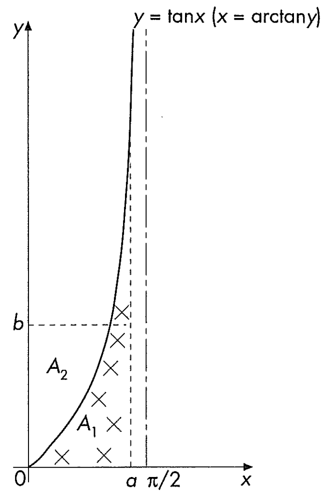


Figura 3

Observación 1

En ocasiones, el método utilizado permite extender la validez de las desigualdades a recintos más amplios aplicando la misma técnica. Así, por ejemplo, la desigualdad [2] no sólo es válida en el primer cuadrante, $(a, b) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, sino en todo el plano, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir:

$$4ab \le a^4 + 3ab\sqrt[3]{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad [7]$$

Los casos $(a, b) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$ y $(a, b) \in [0, +\infty) \times (-\infty, 0]$, esto es cuando $a \cdot b < 0$, son triviales, pues el miembro izquierdo de [7] es negativo y el derecho positivo. El caso $a \le 0$ y $b \le 0$ se estudia sin más que aplicar la técnica en el tercer cuadrante (ver figura 4)

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \le -\int_a^0 t^3 dt - \int_b^0 \sqrt[3]{t}\, dt = \int_0^a t^3 dt + \int_0^b \sqrt[3]{t}\, dt$$

obteniendo [7] exactamente igual que [2]. Más aún, se obtuvo que por este argumento es posible extender la

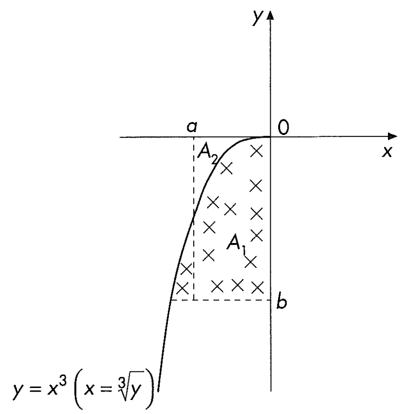


Figura 4

desigualdad [3] a todo el plano real, cuando la función potencial es de exponente impar

$$(n+1)ab \leq a^{n+1} + nb\sqrt[n]{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ impar} \qquad [8]$$

Se pensó, empezando por extender la región de validez de la desigualdad [1], en obtener el recinto más amplio del plano donde se verifica [3] para el caso n par. Aunque dejamos esta cuestión abierta, sí se observó que [1] (y [8] para n par) sólo tiene sentido ampliarlas al segundo cuadrante, $a \leq 0$ y $b \geq 0$, y, desde luego, [1] no se verifica en toda esta región, pues si $a = -10^{-1} < 0$, $b = 10^{-8} > 0$ y $n = 2$, se tiene

$$-3 \cdot 10^{-9} = 3ab > a^3 + 2b\sqrt{b} = -10^{-3} + 2 \cdot 10^{-12}$$

Resumiendo, el uso de esta técnica geométrica nos permitió obtener desigualdades en dos variables con validez en un recinto que, en ocasiones pero no siempre, se podían ampliar utilizando la misma técnica.

Observación 2

También conviene subrayar a los alumnos que a veces las desigualdades que aporta este método geométrico no sólo pueden demostrarse por procedimientos algebraico-analíticos, sino que éstos permiten deducir la validez de dichas inecuaciones en regiones más extensas. Así, por ejemplo, se les comentó que si particularizamos la desigualdad [4] para $c = e > 1$, deducimos geométricamente

$$a \cdot b \leq e^a + b \cdot \ln b - b, \ \forall\, a \geq 0, \ \forall\, b \geq 1$$

Sin embargo, esta desigualdad puede deducirse analíticamente con una restricción más suave: $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}^+$. En efecto, si les sugerimos que partan de la conocida desigualdad

$$e^x \geq 1 + x, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad [9]$$

y definimos $x = a - \ln b$ para $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces aplicando [9] llegan a que

$$e^{a - \ln b} \geq 1 + a - \ln b$$

esto es

$$\frac{e^a}{b} \geq 1 + a - \ln b \Rightarrow e^a \geq b + ab - b \ln b$$

$$a \cdot b \leq e^a + b \cdot \ln b - b, \ \forall\, a \in \mathbb{R}, \ \forall\, b \in \mathbb{R}^+.$$

Aplicación del método a la deducción de algunas desigualdades clásicas

Para demostrar la potencia del método propuesto, a continuación utilizaremos esta técnica para probar tres desigualdades clásicas

$$2ab \leq a^2 + b^2, \ \forall\, a, \ b \in \mathbb{R} \qquad [10]$$

$$-2ab \leq a^2 + b^2, \ \forall\, a, \ b \in \mathbb{R} \qquad [11]$$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b > 0, \ \forall p > 1 \text{ racional tales que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad [12]$$

Las desigualdades [10] y [11] son bien conocidas por los alumnos (obsérvese que [10] es una representación equivalente de la desigualdad de las medias geométrico-aritmética en dos variables), y son consecuencia de las inecuaciones elementales $(a - b)^2 \geq 0$ y $(a + b)^2 \geq 0$ respectivamente. Sin embargo, nosotros les ayudamos a que observasen que [10] también puede probarse a través del método geométrico, ya que es un caso particular de [9] tomando $n = 1$.

Para demostrar la potencia del método propuesto, a continuación utilizaremos esta técnica para probar tres desigualdades clásicas...

Llegado este punto, conviene señalar a los alumnos que acaban de encontrar una demostración geométrica de [10] (y luego veremos que también de [11]) independiente del método geométrico expuesto aquí, que requiere en principio evaluar dos integrales. En efecto, si partimos de la función $f(x) = x$ y tomamos $a, b \in \mathbb{R}^+$, el área bajo $f(x) = x$ en $[0, a]$ y el área bajo su función inversa, $g(x) = x$ en $[0, b]$, puede evaluarse sin necesidad del cálculo integral al tratarse de dos triángulos rectángulos isósceles T_1 y T_2; luego, a partir de la figura 5, se tiene

$$a \cdot b \leq \text{Área}(T_1) + \text{Área}(T_2) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

A continuación, les pedimos que extendieran esta desigualdad, lo que hicieron sin problemas al segundo cuadrante, $(a, b) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$, y al cuarto cuadrante, $(a, b) \in [0, +\infty) \times (-\infty, 0]$, ya que el miembro de la izquierda es negativo y el de la derecha es positivo. Para justificar [10] en el recinto $(a, b) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$, tuvieron en cuenta la primera observación realizada en el apartado 3 y la figura 6

$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad \forall (a, b) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$$

La desigualdad [11] puede deducirse también geométricamente de un modo análogo, pero partiendo de la función $f(x) = -x$.

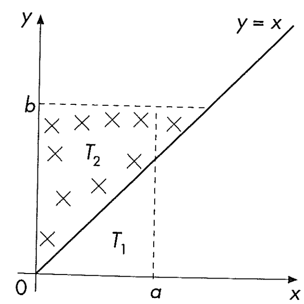


Figura 5

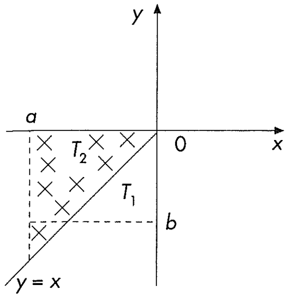


Figura 6

Saliéndonos de la labor desarrollada propiamente en el aula, subrayemos que la desigualdad de Young además de ser una generalización de [10] en el primer cuadrante, ya que se obtiene en el caso particular $p = q = 2$, desempeña un papel importante en el estudio de los espacios L^p. A continuación, y aplicando el método geométrico, estableceremos una demostración de [12], pero puede verse otra prueba distinta en el problema 301 (Shklarsky, 1994). Para ello, primero observemos que razonando como al principio, [3] se puede extender para $n = \alpha > 0$ racional

$$(\alpha+1)ab \leq a^{\alpha+1} + \alpha b b^{1/\alpha}, \quad \forall a, b \geq 0,\ \forall \alpha > 0 \qquad [13]$$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{p-1}{p} b^{\frac{p}{p-1}}$$

Dado $p > 1$ racional, aplicaremos la última desigualdad para $\alpha = p - 1 > 0$.

$$a \cdot b \leq \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1} b^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

si q es tal que $1/p + 1/q = 1$, entonces $(p-1)/p = 1/q$, y $p/(p-1) = q$, por lo que de la última desigualdad se deduce [12].

Generalización de los resultados y conclusiones

Es interesante ayudar a los alumnos para que observen que en los razonamientos seguidos en los ejemplos anteriores subyacen unas hipótesis comunes a partir de las cuales puede establecerse un resultado general. Así, en nuestra experiencia en el aula, después de proponerles que realizasen por grupos de tres personas, la labor de abstracción que exige el enunciar las condiciones generales bajo las cuales se verifican las conclusiones a las cuales se pueden llegar a través del método que se les propuso, y tras una puesta en común dirigida por nosotros, se llegó al siguiente resultado:

Es interesante ayudar a los alumnos para que observen que en los razonamientos seguidos en los ejemplos anteriores subyacen unas hipótesis comunes a partir de las cuales puede establecerse un resultado general.

Teorema

Sea $f(x)$ $(p(x))$ una función continua estrictamente creciente (decreciente) para $x \geq 0$ y cuya inversa es $g(x)$ $(q(x))$. Sean $F(x)$ $(P(x))$ y $G(x)$ $(Q(x))$ las primitivas de $f(x)$ $(p(x))$ y $g(x)$ $(q(x))$ respectivamente, entonces se verifica

1. $a \cdot b \leq \{F(a) - F(0)\} + \{G(b) - G(f(0))\}$, $\forall\, a \geq 0$, $\forall\, b \geq f(0) \geq 0$
1. $-a \cdot b \leq \{P(0) - P(a)\} + \{Q(p(0)) - G(b)\}$, $\forall\, a \geq 0$, $\forall\, b \leq p(0) \leq 0$

En los ejemplos expuestos a lo largo de este trabajo la función $f(x)$ –con la notación del teorema anterior– siempre ha sido elegida creciente sobre los reales positivos, y aunque en el teorema anterior damos la desigualdad análoga para el caso en que sea decreciente, aún quedan por estudiar las correspondientes inecuaciones sobre los reales negativos. Inducir a los alumnos a través de ejemplos sencillos a que intenten generalizar los resultados, así como que investiguen la extrapolación de las conclusiones obtenidas a otros casos distintos a los estudiados previamente, es siempre un camino interesante para que ellos se inicien y profundicen en la finalidad del verdadero quehacer matemático.

Como en otros trabajos basados en experiencias similares (Cortés, 1998), concluimos que la realización de experiencias dirigidas de este tipo arrastran una gran riqueza, tanto para los alumnos como para el profesor, ya no sólo por el cambio de dinámica de trabajo, que obviamente al ser más creativa nos estimula más a todos, sino que también observamos que nos ha permitido, trabajar en el aula aspectos propios del currículo de Bachillerato, como son el estudio de las funciones elementales, sus funciones inversas (incluyendo las gráficas de ambas, así como la relación de simetría respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, entre dichas representaciones), el cálculo de primitivas así como sus propiedades, la interpretación geométrica de la integral definida, e, incluso, otros aspectos que quedan fuera de estudio bajo el itinerario de las programaciones oficiales, como son las desigualdades en dos variables, el método de inducción o estrategias propias de la resolución de problemas, como son estudiar, primero, casos particulares y, posteriormente, generalizar los resultados.

Juan Carlos Cortés
IES Bonifacio Sotos.
Casas Ibáñez (Albacete).
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Gema Calbo
IES Fernando de los Ríos.
Quintanar del Rey (Cuenca).
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

CORTÉS LÓPEZ, J.C. (1998): «Algunas aplicaciones de un teorema de Peano», *Puig Adam*, n.° 48, 59-65.

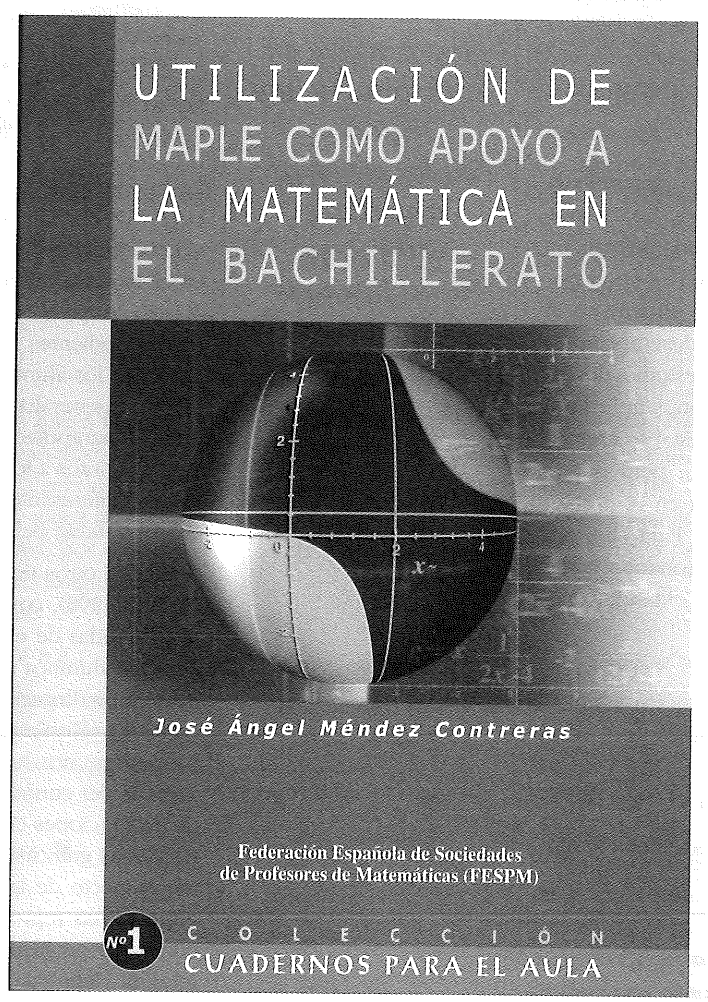
CORTÉS LÓPEZ, J.C. y A. BEDMAR SÁNCHEZ (1997): «La probabilidad en la Teoría de Números», *Epsilon*, n.° 37, 79-90.

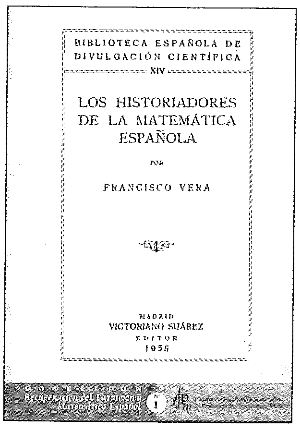
FERNÁNDEZ HERCE, J. y M. GONZÁLEZ MENORCA (1997): «Una visión distinta de un problema clásico», *Suma*, n.° 24, 59-62.

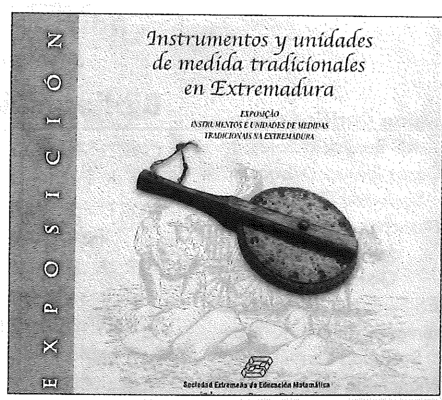
FERNÁNDEZ HERCE, J. y M. GONZÁLEZ MENORCA (1998): «Una visión distinta de un problema clásico (II)», *Suma*, n.° 28, 5-9.

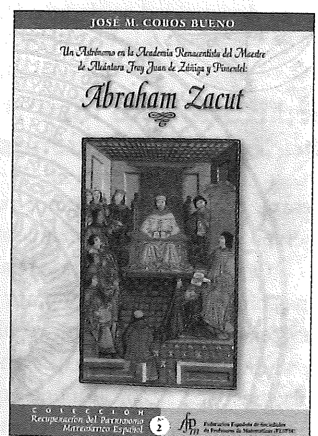
SHKLARSKY D.O., N.N. CHENTZOV e I.M. YAGLOM (1994): *The URSS Olympiad Problem Book*, Dover, Nueva York.

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN









SUMA 41
noviembre 2002, pp. 65-68

¿Se puede predecir el número de cifras de un número periódico estudiando la fracción que lo genera?

Agustín Colell Martínez

ARTÍCULOS

La enseñanza de los números racionales e irracionales a los alumnos de ESO y Bachillerato pasa por dar algunos ejemplos de números periódicos. Normalmente, recurrimos a fracciones con un múltiplo de 3 en el denominador.
Para obtener 2, 3, 4... cifras en el período la cosa cambia, el método suele ser inverso. Partimos de un decimal con 2, 3, 4... cifras en el período y obtenemos la fracción generatriz.
Con un sencillo estudio de divisibilidad podemos relacionar el denominador con el número de cifras del período.

SE TRATA en este artículo de estudiar la relación entre las fracciones que dan lugar a números periódicos y el número de cifras del período.

En el proceso de introducción de los números irracionales, tanto en alumnos de ESO como de Bachillerato, acabamos por identificar lo números irracionales como aquellos cuya expresión decimal está compuesta por infinitas cifras decimales y que no son periódicos. Esto supone que, previamente, el alumno haya aprendido la noción de número decimal finito y número decimal periódico.

Con más o menos dificultad, los alumnos son capaces de aprender el procedimiento de obtención de las fracciones generatrices de números decimales finitos o periódicos.

Desde la Enseñanza Primaria los alumnos han ido viendo que cualquier fracción da origen a un número decimal finito o periódico. Como casi siempre, nos limitamos a dar unos cuantos ejemplos y los alumnos quedan convencidos del hecho.

«Por suerte», con pocos ejemplos los alumnos admiten que las fracciones dan lugar a números decimales finitos o periódicos. Digo «por suerte», porque a la hora de buscar estos ejemplos es cuando, personalmente, me he encontrado con más dificultades. Pruebe el lector a buscar directament una fracción que dé lugar a un número decimal periódico puro con cinco cifras decimales en su período. O con seis.

Otra manera de darnos cuenta de que no existen muchas fracciones cuya expresión decimal tenga un período corto consiste en efectuar los cocientes de unas cuantas fracciones propias con numerador y denominador elegidos aleatoriamente. Si el lector dispone de una calculadora a mano puede comprobar rápidamente que en la mayoría de cocientes la calculadora no dispone de suficientes dígitos como para que aparezca claramente el período.

Si se quiere dar ejemplos de fracciones que den lugar a un número predeterminado de cifras en el período el mejor método es partir del número decimal periódico puro y hallar su fracción generatriz.

Veamos, seguidamente, un estudio sobre la relación entre el número de cifras periódicas y las fracciones que los generan.

Centraremos el estudio en los decimales periódicos puros.

Dado un número decimal periódico puro, se obtiene, por el procedimiento habitual, la fracción generatriz con 9 como única cifra en el denominador. La fracción simplificada da lugar a una fracción irreducible $a/b = c/9\ldots9$ siendo a y b primos entre sí.

De la igualdad $b \cdot c = a \cdot 9\ldots^{(n}9$, y por ser b primo con a, deducimos que b es divisor de $9\ldots^{(n}9$. El número de cifras en el período coincide con el número de nueves del denominador.

En lo que sigue, supondremos que b es un número primo, y diferente de 2 y 5 puesto que éstos no generan números periódicos.

El denominador es de la forma $9\ldots^{(n}9$, que supondremos descompuesto según $9 \cdot 1\ldots^{(n}1$. En el decurso de este trabajo aparecerán, sucesivamente, los números conteniendo únicamente la cifra 1. Convengamos en anotar $U_n = 1\ldots^{(n}1$.

Para una sola cifra en el período el denominador es 9, el único divisor primo es 3.

Para dos cifras en el período el denominador es 99, aparte del 3, el divisor primo es 11. Quiere ello decir que las fracciones irreducibles con denominador 11 tienen en el período dos cifras. Ejemplo: 1/11 = 0,09090909…

Si aparecen tres cifras en el período el denominador es $999 = 9 \cdot 111$. El número $U_3 = 111$ se descompone según $111 = 3 \cdot 37$. Con este resultado, cuando se quiera números periódicos con tres cifras en el período deberemos usar fracciones con 37 como factor en el denominador. Ejemplo: 4/37 = 0,108108108…

Permítaseme el detalle del caso de cuatro cifras en el período para reforzar la importancia de la descomposición de los números U_n (el 1 como única cifra).

Para cuatro cifras el denominador es $9999 = 9 \cdot U_4 = 9 \cdot 1111 = 9 \cdot 11 \cdot 101$.

Ejemplo: 53/101 = 0,524752475247…

Obsérvese que en los denominadores van aprareciendo los factores primos de U_2, U_3, U_4…

Descomposición de los denominadores

En la descomposición de los números U_n emergen inmediatamente dos propiedades elementales de las reglas de divisibilidad del número 3 y del número 11. Primero, U_{3n} es divisible por 3, ya que la suma de las cifras es $3n$. Segundo, U_{2n} es divisible por 11, puesto que hay tantos unos ocupando las posiciones pares como las impares, luego la suma de las cifras ocupando las posiciones pares será igual a la suma de las cifras de las posiciones impares.

Hay otra manera de ver que U_{2n} es divisible por 11, solamente hay que observar el resultado de la división de U_{2n} por 11.

$$U_4 = 11 \cdot 101$$
$$U_6 = 11 \cdot 10101$$
$$U_8 = 11 \cdot 1010101$$
$$\ldots$$

De hecho, los número anteriores admiten otra descomposición similar (no en factores primos) que ayudará en la descomposición general de U_n.

$$U_6 = 111111 = 111000 + 111 = 1000 \cdot 111 + 1 \cdot 111 = (1000 + 1) \cdot 111 == 1001 \cdot 111 = U_3 \cdot 1001$$

$$U_8 = 10001 \cdot 1111 = U4 \cdot 10001$$

$$U_{10} = U5 \cdot 100001$$

$$U_{12} = U_6 \cdot 1000001 = U_4 \cdot 100010001 = U_3 \cdot 1001001001$$

$$U_{14} = U_7 \cdot 10000001$$

…con la ayuda de programas informáticos se puede obtener la descomposición de los primeros 25 números U_n

De esta observación puede enunciarse que los divisores de U_n serán también divisores de U_{kn}.

Los casos más difíciles de descomponer serán, por supuesto, U_5, U_7, U_{13}…

Combinando esta técnica con la ayuda de programas informáticos se puede obtener la descomposición de los primeros 25 números U_n, con los cuales ya se pueden inferir conjeturas sobre el número de cifras de los periodos.

En las descomposiciones que siguen figuran en negrita los factores nuevos que van apareciendo.

$U_1 = 1$, y, como ya se ha dicho, se corresponde con el denominador 3.

$U_2 = \mathbf{11}$
$U_3 = 3 \cdot \mathbf{37}$
$U_4 = 11 \cdot \mathbf{101}$
$U_5 = 11111 = \mathbf{41} \cdot \mathbf{271}$
$U_6 = 111111 = 3 \cdot \mathbf{7} \cdot 11 \cdot \mathbf{13} \cdot 37$
$U_7 = \mathbf{239} \cdot \mathbf{4649}$
$U_8 = 11 \cdot \mathbf{73} \cdot 101 \cdot \mathbf{137}$
$U_9 = 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot \mathbf{333667}$

$U_{10} = 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot \mathbf{9091}$

$U_{11} = \mathbf{21649 \cdot 513239}$

$U_{12} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot \mathbf{9901}$

$U_{13} = \mathbf{53 \cdot 79 \cdot 265371653}$

$U_{14} = 11 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot \mathbf{909091}$

$U_{15} = 3 \cdot \mathbf{31} \cdot 37 \cdot 41 \cdot 271 \cdot \mathbf{2906161}$

$U_{16} = 11 \cdot \mathbf{17} \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot \mathbf{5882353}$

$U_{17} = \mathbf{2071723 \cdot 5363222357}$

$U_{18} = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \mathbf{52579} \cdot 333667$

U_{19} es primo.

$U_{20} = 11 \cdot 41 \cdot 101 \cdot 271 \cdot 9091 \cdot \mathbf{27961}$

$U_{21} = 3 \cdot 37 \cdot \mathbf{43} \cdot 239 \cdot \mathbf{1933} \cdot 4649 \cdot \mathbf{10838689}$

$U_{22} = 11 \cdot 11 \cdot \mathbf{23} \cdot \mathbf{4093} \cdot \mathbf{8779} \cdot 21649 \cdot 513239$

U_{23} es primo.

$U_{24} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 9901 \cdot \mathbf{99990001}$

$U_{25} = 41 \cdot 271 \cdot 21401 \cdot \mathbf{25601} \cdot \mathbf{182521213001}$

Reinterpretemos el hecho de que U_{19} sea primo: el mínimo denominador que genera un número decimal con 19 cifras en el período es $11\ldots^{(19}1$. Ídem para U_{23}.

Aparte del interés de las descomposiciones anteriores con respecto al número de cifras del período, se puede destacar alguna curiosidad referente a la divisibilidad de los números U_n.

Cuando un factor primo p aparece por primera, vez lo hace en U_n con $p = n \cdot k + 1$; por ejemplo: el 7 y el 13 aparecen en U_6. También se observa que 41 y 271 aparecen en U_5. Y 21649 aparece en U_{11} siendo $21649 = 11 \cdot 1968+1$.

...se puede destacar alguna curiosidad referente a la divisibilidad de los números U_n.

Enunciado propuesto

En términos de periodicidad, podríamos decir: Dado un número primo p, el número n de cifras del período de la fracción propia a/p es un divisor de $p-1$.

Lo comprobaremos para los números primos 7 y 11:

El número de cifras del período de 1/7 es un divisor de 6 ($6 = 7 - 1$). El período es 142857.

El número de cifras del período de 1/11 es un divisor de 10 ($10 = 11 - 1$). El período es 09.

De las descomposiciones de U_n y de lo dicho anteriormente podemos extraer la tabla 1, en la que se recorren los primeros números primos con expresión del número de cifras del período.

Núm. primo	3	7	11	13	19	29
Núm. cifras período	1	6	2	6	18	28

Tabla 1

Aunque no se halle la descomposición de U_{28}, se comprueba, efectuando la división correspondiente, que el período de la fracciones $a/29$ es 28. Así:

1/29 = 0,0344827586206896551724137931
0344827586206896551724137931

Esta división se ha efectuado con un programa en Visual Basic cuyo código puede descargarse en la web <www.xtec.es/~acolell2>; el símbolo ~ se corresponde con la combinación de teclas <alt>+126.

En la tabla 1 no aparece el período con 3 cifras, 5 cifras, 7 cifras, etc., porque los números primos que generan estos períodos son mayores. Podemos completarla, como se ve en la tabla 2, dando mayor importancia al número de cifras del período. Escribimos los denominadores menores que generan dichos períodos.

Núm. cifras período	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Denominador	3	11	37	101	41	7	239	73	333667

Tabla 2

Esta última tabla responde a la cuestión que se plantea cuando queremos dar muestras de números periódicos generados por fracciones. Si en los denominadores aparecen otros factores distintos de los anteriores el período tiene tantas cifras que se hace tedioso encontrarlo.

¿Qué pasa cuando el denominador es un número compuesto?

Tomemos como ejemplo $407 = 11 \cdot 37$ en el denominador.

1/11 = 0,0909... El número de cifras del período es 2

1/37 = 0,027027... El número de cifras del período es 3.

1/407=0'002457002457... El número de cifras del período es 6, que coincide con el mcm(2, 3).

Parece plausible que, cuando el denominador es un número compuesto, el número de cifras del período es el mcm de los números de cifras de los períodos correspondientes a los factores del denominador considerado.

Con ayuda del referido programa de ordenador se puede comprobar esta conjetura para cualesquiera otros casos sencillos. He aquí otra muestra.

Sea 287 = 7 · 41.

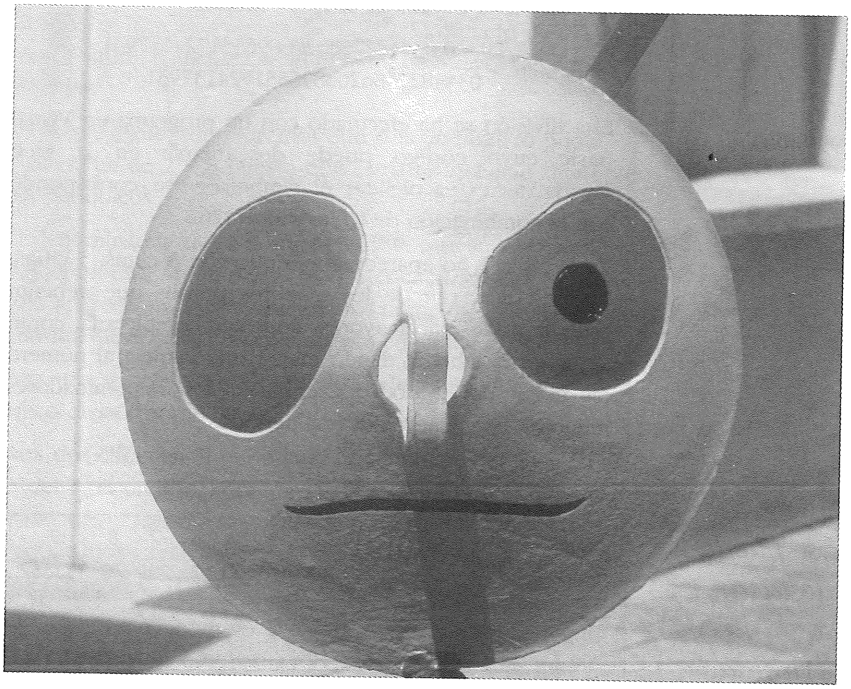
1/7 = 0,142857142857... El número de cifras del período es 6.
1/41 = 0,0243902439... El número de cifras del período es 5.
1/287 = 0,00348432055749128919860627177700348432057491289198606271777...

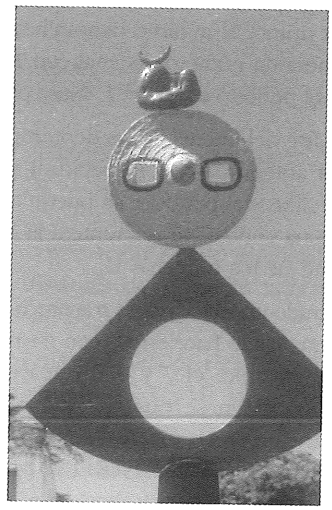
Como cabía esperar, el número de cifras del período es 30.

Agustín Colell
IES Ramón Berenguer IV.
Amposta (Tarragona)

Conclusión

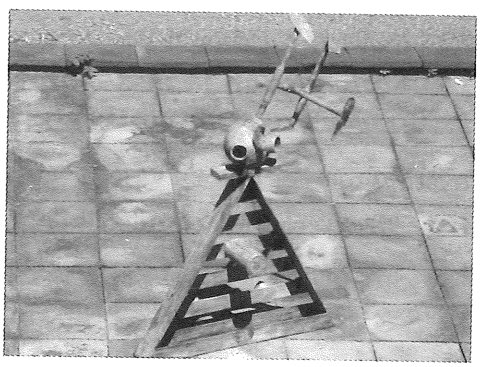
Si no queremos períodos demasiado largos hemos de restringir las fracciones que tomemos como ejemplo en la introducción de los números periódicos a aquellas cuyos denominadores estén contenidos en la última tabla, esto es: 3, 11, 37, 101, 41, 7, 13, 239, 73... Para otros denominadores, el número de dígitos de las calculadoras resultarán insuficientes.

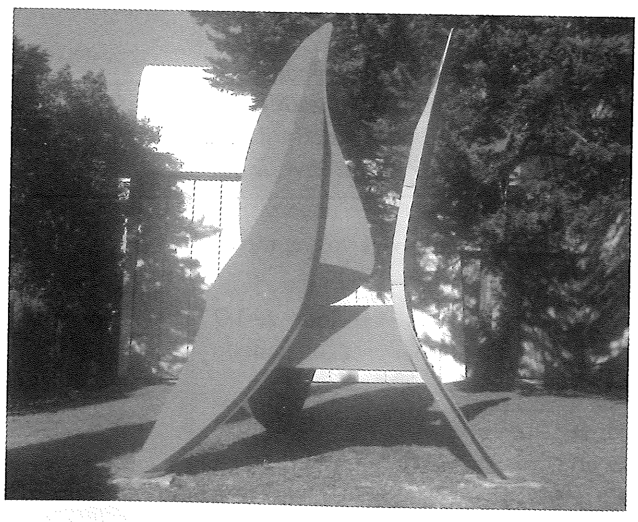




Fundación Joan Miró. Barcelona

(Fotos: Pilar Moreno)





SUMA 41
noviembre 2002, pp. 69-75

Experiencias sobre la aproximación intuitiva en Geometría. Una aproximación del número π en la ESO

Antonia Redondo Buitrago
M.ª José Haro Delicado

En este artículo se presentan algunas experiencias sobre la aproximación intuitiva en Geometría y sus implicaciones en el cálculo aproximado del número π en la ESO.
El proceso se gradúa en torno a cuatro actividades. En las dos primeras se aproxima experimentalmente el número π y se pretende descubrir el grado de madurez de los alumnos para enfrentarse, desde el punto de vista intuitivo, a los procesos geométricos de aproximación. En las dos últimas se hace una estimación de π; en un caso encontrando una sucesión de números irracionales convergente a ese número; y, en otro, a partir de una simplificación del método utilizado por Arquímedes, que permite además dar una demostración, diferente de la habitual, de las propiedades

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$$
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\alpha}=1$$

ARTÍCULOS

Una de las grandes incoherencias didácticas en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria, de la que difícilmente podemos escapar, es el tratamiento del fascinante número π. Por un lado, la introducción del concepto de número irracional se inicia en el cuarto curso de la ESO, posponiendo su estudio, más o menos riguroso, para el Bachillerato, pero, sin embargo, al alumno le hemos pedido en etapas anteriores que conozca y utilice el número irracional π, y, además, esperamos que se crea que tiene infinitas cifras decimales que nunca se repiten de forma periódica...

Este trabajo es el resultado de nuestra experiencia didáctica en la búsqueda y diseño de actividades sobre la aproximación del número π, que pudieran ser propuestas a alumnos de la ESO que no posean conocimiento alguno de Trigonometría. El proceso seguido se organiza en torno a cuatro actividades comentadas, dirigidas a un nivel de competencia curricular especificado en cada una de ellas, pero que podrían realizarse en cualquier etapa posterior. La última es la menos original, pues se basa, en esencia, en el método utilizado por Arquímedes para aproximar el número π, pero la incluimos porque en el Bachillerato constituiría un instrumento diferente para probar las propiedades

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$$
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\alpha}=1$$

Como suele ocurrir en el campo de cualquier investigación nos encontramos con una dificultad no prevista: todo proceso de aproximación en Geometría implica un planteamiento «dinámico» e, inevitablemente, aparecen implicados componentes intuitivos sobre el concepto de límite. Sin embargo, este hecho, no sólo no representa un inconveniente, sino que se convierte en un recurso didáctico para la actividad 3. En ella subyacen ideas de Análisis Matemático (integral de Riemann, sucesiones convergentes) que, consideradas desde un punto de vista exclusivamente geométrico, nos permiten obtener una sucesión de números irracionales que converge a π.

La dificultad a la que nos referíamos queda patente si analizamos los resultados obtenidos en una prueba inicial sobre contenidos geométricos realizada a alumnos del tercer curso de la ESO. Se les propuso: «Formamos un cuadrado con 16 fichas cuadradas y lo deformamos para construir con las mismas fichas un rectángulo. ¿Qué pasa con el perímetro al pasar del cuadrado al rectángulo?». Aquellos alumnos a los que se les proporcionó el correspondiente material o se les permitió utilizar una representación gráfica (figura 1) no tuvieron dificultad en contestar que el perímetro aumenta, pero aquellos a los que se les pidió que contestaran por intuición, lo hicieron correctamente sólo en un 6,7 %, mientras que un 75 % afirmó que el perímetro era el mismo.

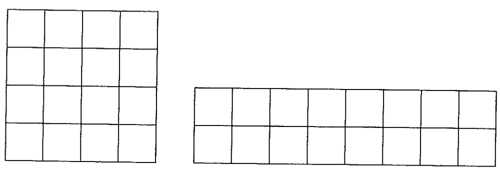


Figura 1

También se les propuso: «Une los extremos de un hilo y forma sobre la mesa un cuadrado. Ahora defórmalo para construir un rectángulo. ¿Cómo son las áreas del cuadrado y del rectángulo?». Intuitivamente, la mayoría contestó que el área no cambia y en este caso la utilización de un modelo geométrico (hilo, cadena, cordón de las zapatillas...) no mejoró los resultados. La justificación posiblemente está en que el concepto de «límite» no se había adquirido todavía en esos alumnos, y no recurrieron a su utilización como estrategia de manera espontánea. Cuando el profesor llevó en el modelo la deformación «al límite» (figura 2) un alto porcentaje de los alumnos afirmó que el área cambia y algunos de ellos que disminuye.

Estas dos situaciones ponen de manifiesto que antes de intentar abordar con nuestros alumnos una aproximación del número π hay mucho trabajo por hacer. En un primer paso deberían descubrir por ellos mismos que es posible que las cifras decimales de π no se repitan. Este objetivo se pretende alcanzar en la actividad 1. Ésta solo presenta la dificultad de utilizar hábilmente un hilo para medir el perímetro de un circulo y su diámetro (es más fácil si se utiliza un cilindro) y únicamente se requiere que el alumno conozca el sistema decimal y la proporcionalidad de segmentos.

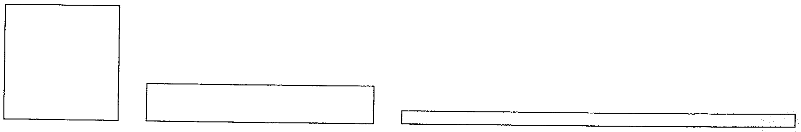


Figura 2

...todo proceso de aproximación en Geometría implica un planteamiento «dinámico» e, inevitablemente, aparecen implicados componentes intuitivos sobre el concepto de límite.

Actividad 1

- *Nivel de aplicación:* Primer y segundo Ciclo de la ESO
- *Objetivos:* Obtener experimentalmente algunas cifras decimales del número π.
- *Conocimientos previos:* Concepto de círculo, circunferencia y diámetro. Sistema decimal. Proporcionalidad entre segmentos.
- *Materiales:* Cilindro, hilo, tijeras y material de dibujo (regla).

Vamos a ver cuántas veces está contenido el diámetro de un círculo en la longitud de la circunferencia. Con el hilo corta dos trozos que midan exactamente lo mismo que el diámetro y la circunferencia de la base del cilindro. Sobre la primera recta en la que está representado el cero, toma como unidad el trozo de hilo que representa el diámetro y señala los puntos que corresponden a los números 1, 2, 3, 4, 5. Ahora ajusta uno de los extremos del otro hilo al 0 y señala el punto P_1 que queda determinado hacia la derecha por el otro extremo del hilo. Como ves, la longitud de la circunferencia contiene al diámetro mas de tres veces, pero menos de cuatro, es decir, el número de veces es un número decimal. Para saber cuál es la cifra de las décimas traza una recta que pase por el 3 de la primera recta y el 3,0 de la segunda. Traza otra recta que una el 4 con el 4,0. Estas dos rectas se cortan en un punto que llamaremos Q_1. Si trazas una recta que una el punto Q_1 con el punto P_1, cortará a la segunda recta en un punto P_2 que como ves está entre 3,1 y 3,2. Esto quiere decir que la primera cifra decimal es 1. Si repites la operación con las otras rectas irás obteniendo las demás cifras decimales (figura 3).

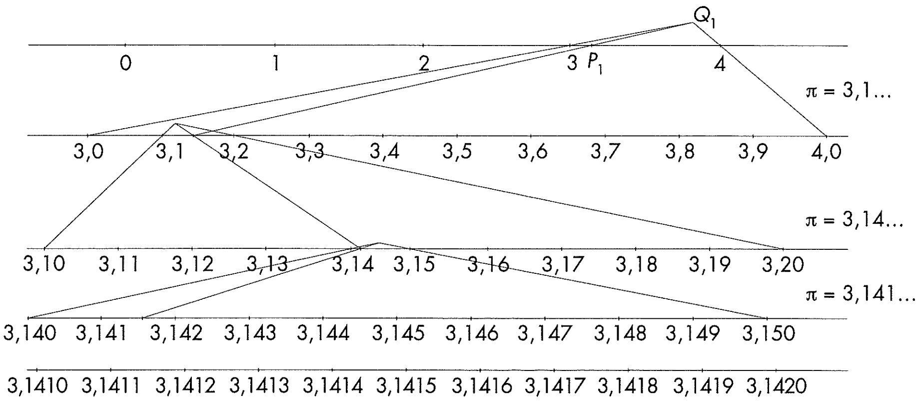


Figura 3

Es cierto que no se van a poder hallar gráficamente las infinitas cifras decimales de π, pero, después de un número razonable de iteraciones, el alumno se ve obligado a plantearse la posible necesidad de un «paso al límite», y está en condiciones de admitir que pueda ser cierto que las cifras decimales de ese número no se repiten. Por tanto, hemos cambiado, a partir de una experiencia, un «acto de fe» por una «intuición razonable». Una intuición que se fundamenta en el mundo que nos rodea, como queda maravillosamente reflejado en un fragmento de la película, *Smila, misterio en la nieve,* de Bille August, en el que la protagonista describe la fascinación que siente por los números de la siguiente forma:

> [...] para mí el sistema numérico es como la vida misma, primero están los números naturales, los que son enteros y positivos, son los números de un niño pequeño, pero la conciencia humana se amplía y el niño descubre el deseo, ¿sabe cuál es la expresión matemática del deseo?, los números negativos, la formalización de la sensación de que te falta algo. Entonces el niño descubre los espacios intermedios entre las piedras, entre las personas, entre los números y aparecen las fracciones, eso es como una locura, porque nunca se llega al final, nunca se detienen allí, hay números que no podemos ni empezar a comprender, las matemáticas son un paisaje inmenso y abierto, te diriges hacia el horizonte, que siempre retrocede [...]

La actividad 2 es fundamental, puesto que evidencia que el «paso al límite» no es en modo alguno evidente y con ella el alumno se cuestionará lo que su intuición le sugiere a primera vista, preparándole para adquirir más adelante los conceptos de curva rectificable y región medible.

...evidencia que el «paso al límite» no es en modo alguno evidente y con ella el alumno se cuestionará lo que su intuición le sugiere a primera vista, preparándole para adquirir más adelante los conceptos de curva rectificable y región medible.

Actividad 2

- *Nivel de aplicación:* Segundo ciclo de la ESO.
- *Objetivos:* Trabajar sobre la intuición en los procesos de aproximación geométrica.
- *Conocimientos previos:* Teorema de Pitágoras, triángulo equilátero, área de un triángulo.
- *Materiales:* Calculadora y material de dibujo.

El segmento AB mide 1 cm. Señalamos un punto Q de manera que ABQ sea un triángulo equilátero. Llamamos p_1 a la poligonal $[A, Q, B]$ y S_1 a la superficie del triángulo limitada por p_1 y el segmento AB (figura 4).

Dividimos ahora el segmento AB en dos partes iguales, construimos dos triángulos equiláteros de base cada una de esas partes y llamamos p_2 a la poligonal $[A, Q_{11}, M_1, Q_{12}, B]$ y S_2 a la superficie de la región limitada por p_2 y AB (figura 5).

Continuamos dividiendo el segmento AB en tres partes iguales y obtenemos la poligonal $p_3 = [A, Q_{21}, M_1, Q_{22}, M_2, Q_{23}, B]$ y el área S_3 de la región limitada por p_3 y AB (figura 6).

Imagina que vas dividiendo en 4, 5, 6... partes el segmento y vas obteniendo las correspondientes poligonales $p_4, p_5, p_6\ldots$ y áreas $S_4, S_5, S_6,\ldots$

a) Si repites el proceso infinitas veces, ¿qué pasará con la sucesión de poligonales? ¿Y con la sucesión de áreas? (Contesta intuitivamente).

b) Comprueba algebraicamente lo que sucede completando la tabla 1 y compara si se obtiene lo que habías previsto en a). Intenta dar una explicación de lo que sucede.

Cuando se propuso esta actividad a un grupo de alumnos de 3.° de ESO, el 90 % contestó en el primer apartado intuitivamente que la poligonal se convierte en el segmento *AB* y sólo un 10 % dijo que al final tendríamos un segmento pero con «puntitos por encima», «triangulitos muy pequeños»... Todos admitían que al final las áreas eran prácticamente cero.

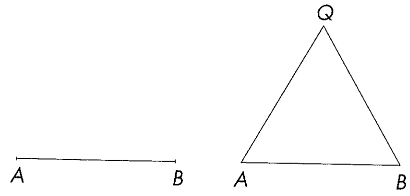


Figura 4

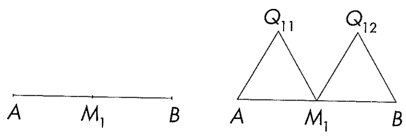


Figura 5

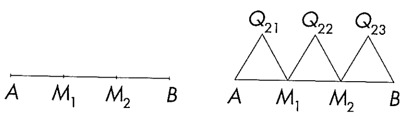


Figura 6

...cuando queremos aproximar el área de una región (por supuesto medible), podemos hacerlo a través de regiones limitadas por cualquier poligonal...

Está claro que los alumnos que contestaron que al final se obtiene el segmento *AB* han ido más lejos de lo permitido, es decir, su intuición les ha llevado a hacer una aproximación incorrecta de la longitud del segmento. El resto, bien por prudencia o por no saber como realizar ese «paso al límite», se quedaron un paso atrás y eso les impidió contestar de forma errónea.

Una vez realizada la actividad, el profesor puede hacer ver a los alumnos que en los procesos de aproximación en geometría, por decirlo de alguna manera, debemos tener mucho cuidado al aproximar un arco (por supuesto rectificable) por una poligonal, pues sólo tenemos garantías de que la aproximación sea fiable si todos los vértices de la poligonal están en la línea (figura 7b), por el contrario en el caso de una poligonal como la de la figura 7a, al final se obtendrían puntos «muy próximos» a la línea pero no estarían sobre la línea.

Sin embargo, cuando queremos aproximar el área de una región (por supuesto medible), podemos hacerlo a través de regiones limitadas por cualquier poligonal (figuras 8 y 9).

En la actividad 3, damos una estimación del número π, utilizando la aproxima-

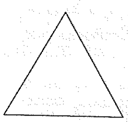
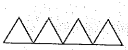
Región	*Núm. de divisiones*	*Lado del triángulo*	*Longitud de* p_n	*Área del triángulo*	S_n
	1	1	2	$\sqrt{3}/4$	$\sqrt{3}/4$
	2	1/2	$4 \cdot 1/2 = 2$	$\sqrt{3}/16$	$\sqrt{3}/8$
	3	1/3	$6 \cdot 1/3 = 2$	$\sqrt{3}/36$	$\sqrt{3}/12$
	4	1/4	$8 \cdot 1/4 = 2$	$2\sqrt{3}/64$	$\sqrt{3}/16$
...	...	...	...	...	...

Tabla 1

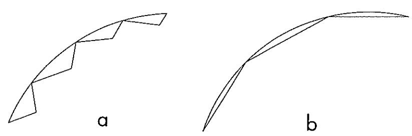


Figura 7

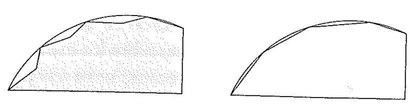


Figura 8

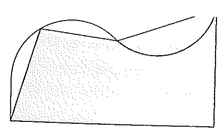


Figura 9

ción del área de un sector circular por una sucesión de áreas de rectángulos inscritos, que nos permite obtener una nueva fórmula para el número π. La novedad reside en que la altura de los rectángulos se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.

Actividad 3

- *Nivel de aplicación:* Segundo ciclo de la ESO.
- *Objetivos:* Aproximar el número π por defecto.
- *Conocimientos previos:* Teorema de Pitágoras, área de un rectángulo, área del círculo.
- Materiales: Calculadora, material de dibujo y ordenador (programa Derive).

En el sector circular AOB el ángulo α es de 90° y los radios OA y OB miden 1 cm. Señalamos el punto medio Q_{21} de OB y construimos el rectángulo inscrito de base OQ_{21} (figura 10).

Evidentemente el área S_2 del rectángulo $P_{20}P_{21}Q_{21}O$ es una aproximación muy mala del área del sector, pero podemos mejorar la situación si dividimos el segmento OB en tres partes iguales e inscribimos dos rectángulos (figura 11).

Si divides el segmento OB en 4, 5, 6... partes y repites el proceso obtendrás sucesivas regiones formadas respectivamente por 3, 4, 5... rectángulos inscritos, de áreas que llamaremos S_3, S_4, S_5...

a) Completa la tabla 2 y comprueba que la sucesión S_1, S_2, S_3..., de áreas es estrictamente creciente. Encuentra una fórmula general para el área de la región cuando el número de divisiones es n.

b) Si repites el proceso infinitas veces, ¿en qué se convierte la región? ¿A qué tiende la sucesión de áreas obtenidas?

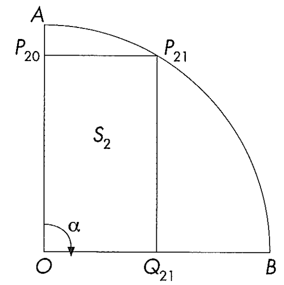


Figura 10

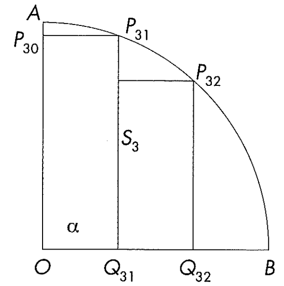


Figura 11

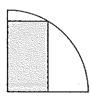
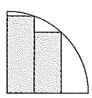
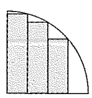
Región	*Núm. de divisiones*	*Área de la región*
	2	$S_2=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=0{,}433012...$
	3	$S_3=\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=0{,}562721...$
	4	$S_4=\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2}{4}\right)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=0{,}623927...$
...	...	... ...

Tabla 2

En general, si el número de divisiones es n se tiene

$$S_n=\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

y con una sencilla manipulación algebraica obtenemos

$$S_n=\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

La convergencia es muy lenta y los alumnos no pueden prever experimentalmente a que número tiende la sucesión S_n, pero este es el momento de utilizar lo que sabemos. Como el área del sector es la cuarta parte del área de un círculo de radio 1 cm, se tiene que

$$\frac{\pi}{4}\approx\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

y, por tanto,

$$\pi \approx \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

Como ya hemos dicho, la convergencia es muy lenta y para obtener valores satisfactorios de la aproximación de π necesitamos adelantarnos mucho en la sucesión, pero esto no es un problema si disponemos de un programa de ordenador. Los siguientes cálculos se han realizado con el programa Derive y un poco de paciencia.

$n = 10$	$\pi \approx 2{,}90451\ldots$
$n = 100$	$\pi \approx 3{,}12041\ldots$
$n = 1000$	$\pi \approx 3{,}13955\ldots$
$n = 10.000$	$\pi \approx 3{,}14139\ldots$
$n = 100.000$	$\pi \approx 3{,}14158\ldots$
$n = 200.000$	$\pi \approx 3{,}14159\ldots$

La convergencia es más rápida si en lugar de aproximar por rectángulos utilizamos trapecios y un triángulo (figura 12).

En este caso se cumple

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

y de esta forma

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)\right]$$

Los valores que se obtienen con esta fórmula son

$n = 10$	$\pi \approx 3{,}10451\ldots$
$n = 100$	$\pi \approx 3{,}14041\ldots$
$n = 1000$	$\pi \approx 3{,}14155\ldots$
$n = 10000$	$\pi \approx 3{,}14159\ldots$

La actividad 3 se puede completar proponiendo que se razone de forma análoga aproximando la longitud del arco AB, por la de la poligonal formada por el segmento $AP_{n,0}$ el borde superior de los rectángulos y el segmento $Q_{n,n-1}B$. Los alumnos están ya en condiciones de prever que esa aproximación no es la apropiada. En efecto, en este caso la poligonal siempre mide 2 cm y sólo podemos afirmar que $\pi/2 < 2$ y, por tanto, $\pi < 4$ (figura 13).

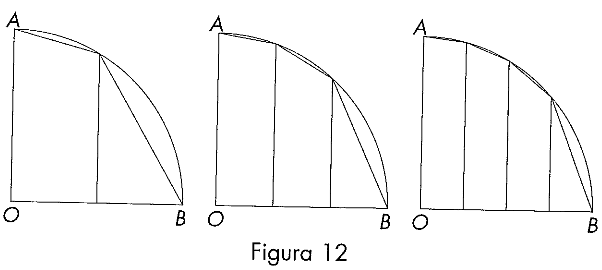


Figura 12

...es una variante simplificada del tradicional método seguido por Arquímedes.

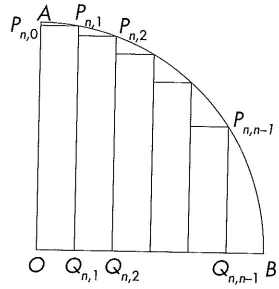


Figura 13

Los alumnos de la opción B de 4.° de ESO poseen suficientes conocimientos de trigonometría para realizar la siguiente actividad, que es una variante simplificada del tradicional método seguido por Arquímedes.

Actividad 4

- *Nivel de aplicación:* 4.° curso de ESO, opción B.
- *Objetivos:* Dar una aproximación por defecto del número π.
- Conocimientos previos: Seno de un ángulo agudo, perímetro de un polígono, longitud de la circunferencia.
- Materiales: Calculadora, material de dibujo.

En la circunferencia de centro O y radio $R = 1$ cm. Inscribimos un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular... (figura 14)

Los perímetros van aumentando al aumentar el número de lados y se pueden considerar una aproximación de la longitud de la circunferencia, más satisfactoria al ir aumentando el número de lados.

a) Teniendo en cuenta que todo polígono regular de n lados $A_1A_2\ldots A_n$ se puede considerar formado por n triángulos isósceles iguales al OA_1A_2, comprueba que el valor del perímetro p_n se puede expresar con la fórmula

$$p_n = 2n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

b) Si hacemos crecer indefinidamente el número de lados n del polígono inscrito ¿Qué pasará con la sucesión p_n formada por los sucesivos perímetros? ¿A qué número tiende la sucesión $p_n/2$?

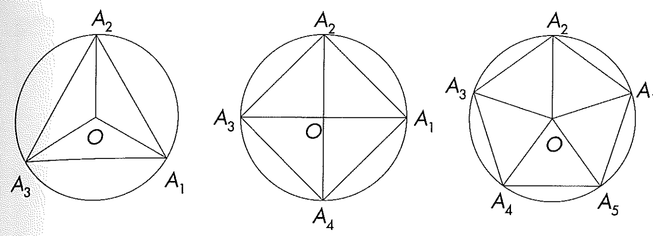


Figura 14

En esta actividad es imprescindible que se calculen las razones trigonométricas del ángulo, expresando éste en grados sexagesimales (si se hiciera en radianes caeríamos en un circulo vicioso al tener que utilizar el valor de π). Considerando que el triángulo OQA_1 es rectángulo, que el segmento OA_1 mide 1 cm, y que QA_1 es la mitad del lado l del polígono se obtiene (figura 15)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{360°}{2n}\right) = \frac{l}{2}$$

$$l = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$p_n = 2n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Al hacer tender $n \to \infty$ el perímetro del polígono p_n tiende a la longitud de la circunferencia, que en este caso es 2π, y, de esta forma, en la columna de la derecha de la tabla 3 obtendremos una sucesión creciente que tiende al número π.

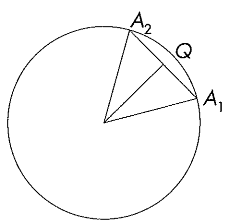


Figura 15

Antonia Redondo
IES Diego de Siloé.
Albacete.
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas.
M.ª José Haro
IES Al-Basit.
Albacete.

Núm. de lados n	Ángulo $= \frac{180°}{n}$	$\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$	$\frac{p_n}{2} = n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$
10	18°	0,309016...	3,09016...
100	1,8°	0,0314107...	3,14107...
1000	0,18°	0,00314158...	3,14158...
10.000	0,018°	0,000314159...	3,14159...

Tabla 3

Si el ángulo $180°/n$ se expresa en radianes, obtenemos

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\cdot\frac{\pi}{180°}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

y, en realidad, lo que hemos probado es que

$$1 = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$

Esto proporciona un procedimiento diferente del habitual para la demostración en el Bachillerato del resultado

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

puesto que basta con hacer en la igualdad obtenida, sucesivamente, los cambios de variable $n = 1/m$ y $m\pi = \alpha$ y entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{m\to 0}\frac{\operatorname{sen} m\pi}{m\pi} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

Si en la actividad anterior se utilizan polígonos circunscritos, obtendríamos una sucesión decreciente que proporciona aproximaciones por exceso de π, pues el perímetro del polígono es

$$P_n = 2n\tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

y se deduciría de ahí, análogamente al caso anterior, que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$$

Bibliografía

FERNÁNDEZ, M. y otros (1991): *Circulando por el círculo*, Síntesis, Madrid.

GARCÍA, J. y C. BERTRÁN (1988): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid

GARDNER, M. (1982): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GUEDJ, D. (2000): *El teorema del loro*, Anagrama, Barcelona.

NEWMAN, J.R. (1980): *SIGMA: El mundo de las matemáticas*, Grijalbo, Barcelona.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*, Huerga y Fierro, Madrid.

Páginas web

<http://webs.adam.es/rllorens/pidoc.htm>

<http://www.escape.com/~paulg53/math/pi/archimedes/index.html>

<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3550/pi.htm>

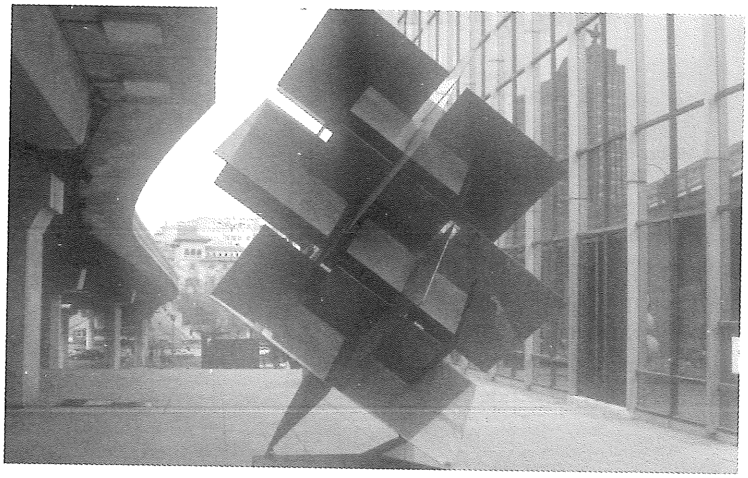
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html>

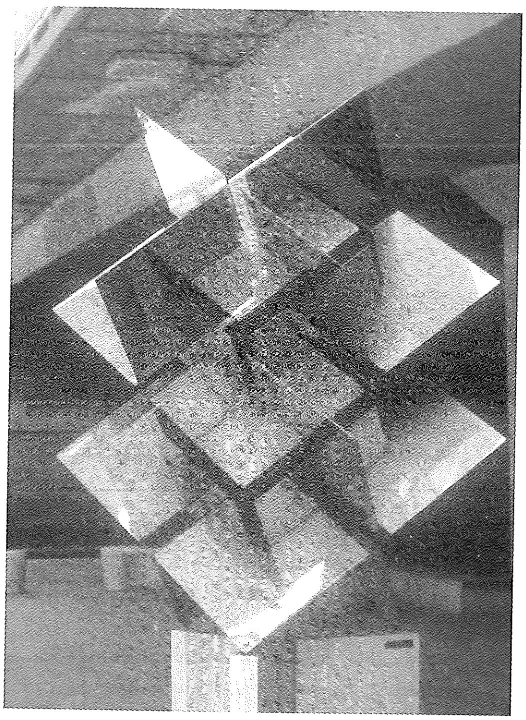
<http://www.mcs.csuhayward.edu/~malek/Mathlinks/pi.html>

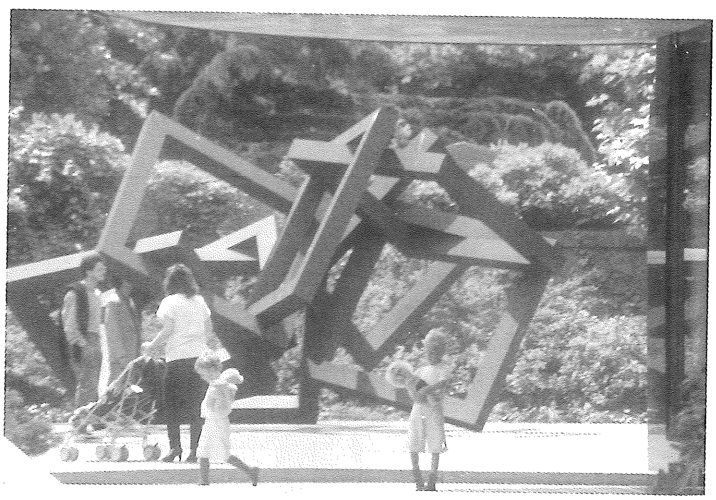
<http://www.joyofpi.com/pifacts.htm>

Madrid

(Fotos: Pilar Moreno)







SUMA 41
noviembre 2002, pp. 77-82

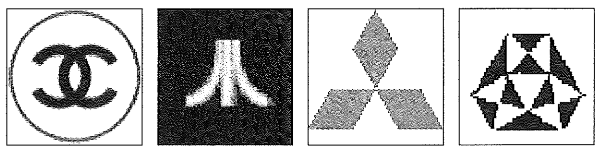
2002: celebración de un año capicúa

Amparo Sáiz Sapena
Marta I. Trapero Navarro
Mónica Vivó Gomis

IDEAS Y RECURSOS

El presente artículo ha surgido a raíz de la celebración del Día Mundial de la Simetría, el pasado 20 de febrero, y su relación con los palíndromos. Uniéndonos a tan universal evento, entramos en la red, y descubrimos en sus páginas todo un mundo sobre los números capicúas y su relación con las matemáticas: desde búsqueda de capicúas a cuál mayor y cumpliendo ciertas propiedades, aprovechando para dar nombre propio a los nuevos récords conseguidos, hasta todo un análisis matemático de frecuencia de aparición de capicúas, pasando por problemas de aula de ahora y de siempre. Hemos aprovechado los recursos de la red y de otros medios para elaborar una colección de actividades para el aula relacionadas con los números capicúa.

SIMETRÍA EN LA NATURALEZA hay miles de ejemplos en ella; simetría hay en el lenguaje, como los palíndromos; en la arquitectura; en el ajedrez el tablero, las fichas, ¿quién no ha jugado de negras imitando a las blancas?; simetría en la pintura, como el fascinante Mauritius Escher; en la publicidad, como los logotipos de marcas famosas (figura 1)[1], en juegos y estrategias de ciertos juegos (tipo nim y similares)... Y también, cómo no, simetría en los números: los números capicúa.



Chanel Atari Mitsubishi TDK

Figura 1

Un número capicúa, como todo el mundo sabe, es aquel cuya secuencia de dígitos se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda; la palabra o frase con esta misma característica se conoce como palíndromo (del griego «palin», en sentido inverso, y «dromos», carrera), y es por ello que al número capicúa también se le llama palíndromo numérico. De hecho, es por este nombre como se le conoce en los demás países, y solamente en nuestro país hay una palabra específica, capicúa, para determinarlo. ¿Y cuál es el origen de este vocablo? Parece ser que viene del catalán «cap-i-cua» (que significa cabeza y cola), haciendo referencia a la simetría entre el principio y el final de un número, y los vocablos «capicúa» en castellano, «capicúa» en gallego y «Kapicua» en vasco, son todos ellos derivados del termino catalán; el término apareció en Barcelona a finales del siglo XIX[2], refiriéndose a los números perfectamente simétricos pero preferentemente con cifras distintas (es decir, se apreciaba más el

1 Marcelo Iglesias. *Logotipos simétricos*. Ver: www.geocities.com/lasimetria
2 Según el historiador Josep maria Garrut i Romà, *Boletín de la Asociación Tucumana de Folklore* (1955)

15251 que el 11811), y además generalmente los de cinco cifras, ya que se empezó a utilizar de modo masivo en los billetes de tranvía cuyo número tenía esta característica; de hecho, aparecieron coleccionistas de billetes capicúa (como el Círculo Coleccionistas Capicúas) y hay datadas colecciones ya en los años treinta, como una actividad paralela a la filatelia, la numismática o las colecciones de vitolas de cigarros[3].

Acontecimientos

Este año, el 2002, ha vuelto a poner la palabra capicúa en boca de todos y ha exaltado la imaginación de más de uno, bien hacia predicciones o hechos supersticiosos, bien hacia la búsqueda de la belleza en la simetría; como evento estrella, se celebró el 20-02-2002 el Día Mundial de la Simetría, alcanzando su máximo esplendor a las 20:02 (nótese la simetría numérica al escribir fecha y hora juntas). José Luis Álvarez, creó una página web dedicada especialmente a este día (www.geocities.com/lasimetria) donde, a esa hora, hizo un vuelque de todas las curiosidades y los trabajos que le habían estado enviando hasta el momento; huelga decir que hubo mucha participación, bloqueando incluso la red, básicamente de internautas de lengua hispana. Aunque también participaron internautas americanos, para ellos la celebración de este acontecimiento no tuvo tanto sentido en esta fecha puesto que ellos la escriben como 02-20-2002, que no es «capicúa» (¡aunque sí lo sería añadiendo la hora delante!).

La búsqueda

Aunque científicamente los números capicúas carecen de sentido, son muchos los matemáticos que imbuidos de la belleza y originalidad de la simetría numérica han emprendido como reto la búsqueda de números capicúas que cumplan determinadas condiciones, como ser primo (por ejemplo, el 131) o ser «Pronic Number», números definidos como $P_n = 2 \cdot T_n = n \cdot (n+1)$ donde Tn es un número triangular[4] (por ejemplo, para $n = 16$, $P_n = 272$).

Se han buscado números capicúa que al ser elevados a un determinado exponente siguen siendo capicúa (por ejemplo, $202^2 = 40804$, $111^3 = 1367631$, $11^4 = 14641$), se han observado sus características en distintas bases, se ha estudiado la frecuencia con que se presentan los palíndromos en cualquier base y con cualquier número de dígitos dando fórmulas generales de conteo, etc. De tal modo que, como si de una competición se tratara, se han utilizando las potentes herramientas de los últimos avances de la informática para dar extensos listados de capicúas a cuál más grande en los que junto al número hallado aparece el nombre del autor[5]. Sin más que echar un vistazo en la red, con un buscador cualquiera, tenemos acceso a multitud de páginas, como en la que se anuncia «el palíndromo más bonito nunca descubierto», el 3 654 345 456 545 434 563, un capicúa de sólo cuatro dígitos distintos para el cual el número triangular asociado es también capicúa, o el número 775 781 766 082 836 455 602, que es la base del número triangular capicúa de 42 dígitos y nuevo record conseguido: el 300 918 674 293 302 389 819 918 983 203 392 476 819 003[6].

Aunque científicamente los números capicúas carecen de sentido, son muchos os matemáticos que imbuidos de la belleza y originalidad de la simetría numérica han emprendido como reto la búsqueda de números capicúas que cumplan determinadas condiciones...

Una de las búsquedas principales ha sido siempre la comprobación de la Conjetura Capicúa que nace a partir del algoritmo siguiente: se toma un número entero positivo cualquiera, se invierten sus dígitos y se suman las dos cantidades; si el número resultante no es capicúa, se repite el procedimiento con él. La conjetura dice que en un número finito de pasos se llega siempre a un número capicúa, pero no está demostrada (para bases de numeración potencia de 2 sí se ha demostrado que es falsa, pero para el resto de bases no se ha comprobado su veracidad o falsedad). Se han hecho comprobaciones del número de pasos necesarios para conseguir el capicúa a partir del número de dígitos y sus propiedades (por ejemplo, con dos dígitos, si las cifras suman menos de 10, es evidente que se acaba en un solo paso); de los 10.000 primeros números, solo 249 no producen un capicúa en no más de 24 pasos, pero para ciertos números como es el caso del 196 se han llegado a computar 9.480.000 iteraciones sin éxito[7].

Capicúas en el aula

En la escuela quizá el tema de los palíndromos pase sin pena ni gloria, como mera casualidad («Arte: la letra»), pero en el área de matemáticas ¿quién se ha resistido a poner un problema con números capicúa? Por ejemplo, el típico ejercicio cuando vemos divisibilidad: «Sin escribirlos, ¿puedes decirme cuántos números capicúa hay entre 500 y 600 divisibles por 5? ¿Y entre 200 y 300?» o «¿cuántos capicúas hay de tres cifras que sean a la vez múltiplos de 2 y de 3?».

Nuestra intención en el presente artículo es sumarnos de alguna manera a las diferentes actividades que el 2002 ha

3 Colaboración de Marius Serra.

4 Cualquier número triangular viene expresado en la forma $n \cdot (n+1)/2$, con la base $n \in N$.

5 www.ping.be/~ping6758/consec.htm, con entrada a la Enciclopedia On-line de Neil Sloane's *Integer Sequences*.

6 P. De Geest. Ver www.worldofnumbers.com

7 Martín Gardner, *Circo Matemático*.

suscitado, para dar una colección de actividades para el aula de distintos niveles (de ESO a Bachillerato), algunos problemas clásicos y otros de cosecha propia, y celebrar así este nuestro año capicúa.

Clasificación de actividades sobre números capicúas

Acertijos

- Soy capicúa, del 2 al 10 sólo hay un divisor mío, tengo cuatro cifras, pero algunos me ven como si fuera un 9 con la base cambiada. ¿Qué número soy?
- Si divides el primer número capicúa del Tercer Milenio por la mala suerte obtienes el aroma de un buen café. ¿Cuál es?

Múltiplos y divisores

- ¿Cuántos capicúas hay de tres cifras que sean múltiplos de 3 y de 5?
- Números primos capicúas entre 100 y 200 hay 5 que son: 101, 131, 151, 181 y 191. Números primos capicúas entre 300 y 400 hay 4 que son: 313, 353, 373 y 383. ¿Cuántos números primos capicúas hay entre 200 y 300?
- Un número «desnudo» es aquel cuyos dígitos son todos divisores del número. Hallar todos los números desnudos de 3 dígitos que sean capicúas y que no tenga todas las cifras iguales.

Un número «desnudo» es aquel cuyos dígitos son todos divisores del número. Hallar todos los números desnudos de 3 dígitos que sean capicúas y que no tenga todas las cifras iguales.

Sistemáticos o por conteo

- ¿Cuál es la diferencia entre el año 2002 y el inmediato año capicúa anterior a él?
- Las antiguas matrículas de coches tenían cuatro números, ¿cuántas de ellas eran capicúa (obviando las letras)?
- Las nuevas matrículas de los coches constan de tres letras y cuatro números; averigua qué letras son válidas para las matrículas (por ejemplo: la Ñ no es válida) y calcula cuántas matrículas se pueden fabricar siendo palíndromo tanto la secuencia de letras como la de números.
- Un día palindrómico es aquel cuya fecha en notación española de día y mes (sin el año) es capicúa. ¿Cuántos días palindrómicos hay en 1 año? ¿Existe algún bisiesto palindrómico en el siglo XXI?
- Suponiendo la notación española para escribir las fechas (día-mes, en número), ¿cuál es el único mes que no tiene día capicúa? ¿Por qué? (Pista: Los ceros a la izquierda no se escriben).
- ¿Cuántos números capicúas hay menores de 1000 cuyo cuadrado sea capicúa? ¿Cuántos de los que acabas de obtener tienen su cubo capicúa? ¿Y cuántos capicúas hay menores de 1000 cuyo cuadrado, cubo y cuarta potencia sean capicúas?
- ¿Qué número capicúa de 4 cifras es el producto de dos primos capicúa, de dos y tres cifras respectivamente?
- ¿Cuántos números capicúa de 7 cifras se pueden escribir con las cifras del 1 al 9? ¿Cuántos de ellos son impares?
- El día 18 de septiembre de 1981, en una emisora de radio, el presentador cayó en la cuenta de que tal fecha (18-9-81) era capicúa. Esto le dio lugar a lanzar en antena la siguiente pregunta: ¿cuáles son las dos fechas capicúa más cercanas entre sí del siglo XX? ¿Podrás adivinarlas?
- En la taquilla del tren hay un rollo de 100.000 billetes numerados del 00000 al 99999. (a) ¿Cuántos capicúas tendrá el rollo? (b) ¿Cuáles serán los que están más cerca entre sí? (c) ¿Cuáles serán los que están más separados entre sí? (d) ¿Cuál será la cantidad mínima de billetes ordenados que pueden albergar tres capicúas? (e) ¿Cuál es la cantidad mínima de billetes que tenemos que comprar para estar seguros de que compramos tres capicúas?
- Descontando los números de una sola cifra: (a) ¿Cuál es el menor número primo capicúa? (b) ¿Cuál es el mínimo cuadrado perfecto capicúa? (c) ¿Cuántos cuadrados perfectos capicúas hay menores que 100?
- Hay cinco primos capicúas entre 100 y 200, ¿cuáles son? ¿Por qué no hay ningún número primo capicúa entre 400 y 700? Demuestra que todos los números capicúas entre 1000 y 2000 tienen un factor común.
- ¿Cuál es el siguiente capicúa después de 14941?

Colocar las operaciones necesarias

- El número 666 es el famoso «número de la bestia». ¿Sabes que se puede conseguir insertando cuatro signos de suma (+) dentro de la secuencia 987654321? En contraposición con el anterior está otro capicúa considerado como símbolo de la perfección, el 777, que también puedes conseguirlo insertando cuatro signos de suma o resta, en la secuencia 987654321.

- Escribe, una detrás de otra, siete cifras del uno al siete: 1 2 3 4 5 6 7. Intercalando signos de suma o resta, se puede obtener el resultado 40 como sigue: 12+34-5+6-7=40. Encuentra otra combinación de estas mismas cifras que dé 55 y no 40.
- Disponiendo de cinco doses y de los signos de las operaciones matemáticas que creas necesarios, obtén el número 11.
- ¿Puede expresarse el número 111 por medio de cuatro doses?

Curiosidades

Hay un famoso problema no resuelto, llamado «conjetura del capicúa». Dice que al tomar un número cualquiera escrito en la base decimal y sumarle él mismo en orden inverso, puede darnos un número capicúa, si no es así, se reitera el proceso hasta que conseguir un número capicúa.

a) Averigua mediante este proceso los capicúas que generan los siguientes números: 84, 75 y 68.

b) Se llama *Orden Palindrómico* de un número a la cantidad de veces que se ha reiterado el proceso hasta obtener palíndromo, es decir, capicúa. ¿De qué orden son los números anteriores?

c) ¿Puedes encontrar números de 2 dígitos de orden palindrómico 1? ¿Qué característica deben cumplir sus cifras?

d) ¿Puedes encontrar números de 3 dígitos de orden palindrómico 1? ¿Qué característica deben cumplir sus cifras?

e) ¿Cuál es el mayor número de 3 dígitos de orden palindrómico 1?

f) ¿Qué significa que un número tenga orden palindrómico 0?

g) Si cambiamos ahora el procedimiento de sumar por restar, ¿crees que se mantendrá la conjetura? Para comprobarlo, investiga todos los números de dos dígitos para determinar: si el proceso siempre produce un número capicúa, el número máximo de pasos que se requieren, y los capicúa que se obtienen en ese proceso. Compruébalo, ahora, para números de tres dígitos[8].

Probabilidad

- ¿Qué probabilidad hay de que el número que salga en el primer premio de la Lotería de Navidad sea capicúa?
- Se lanza una moneda hasta que se obtiene una secuencia capicúa de caras y/o cruces (por ejemplo CC, CXC, CXXC, CXCXC, XXX,...). No se consideran capicúa las secuencias de un solo lanzamiento (C y X). La moneda está cargada, pues la probabilidad de que salga cara es de 2/3. ¿Cuántas tiradas por término medio serán necesarias para obtener una secuencia capicúa? ¿Y si la moneda está equilibrada?[9].

Demostraciones

- Encontrar un número capicúa tal que su factorial termine exactamente en 1999 ceros[10].
- AB + BA = 121, ¿Cuánto valen A y B?
- CAP + CUA = «?» ¿Es posible encontrar C, A, P y U tales que el resultado sea 111? ¿Y 212? ¿Y 313?
- Demostrar que todos los números capicúa con número par de cifras son divisibles por 11 y, por consiguiente, salvo el 11 ninguno es primo.
- A los números como el 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se les llama capicúas. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11. ¿Es cierto?
- Fíjate:

  $121_{(3} = 16$ $121_{(4} = 25$ $121_{(5} = 36$
  $121_{(6} = 49$ $121_{(7} = 64$ $121_{(8} = 81$

  Demuestra que $121_{(n} = (n+1)^2$

Problemas

- ¿Qué número capicúa de cuatro cifras cumple que la suma de sus cifras da 16 si la cifra de las decenas es el triple que la de las unidades?
- Un motorista sale a la carretera con el cuentakilómetros marcando: 13931. Va a una velocidad constante y, dos horas después, se detiene en el próximo número capicúa. ¿A qué velocidad circula?

Encontrar un número capicúa tal que su factorial termine exactamente en 1999 ceros.

8 Don Buckeye. *Palindromic Differences.* Ver explorer.scrtec.org, y buscar «palindromic».

9 Ángel Gutiérrez. Colección de problemas de probabilidades.

10 VI Concurso de problemas Martínez Maurica (1999); Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria.

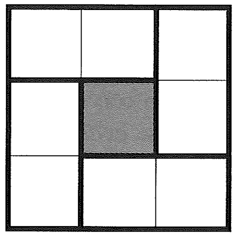
- El otro día compré un boleto de lotería capicúa. Si sumaba sus cinco cifras daba el mismo resultado que si las multiplicaba. La primera cifra de la izquierda era la edad de mi hermana pequeña, las dos siguientes la edad de la mediana, y las dos últimas la edad de la mayor, que le lleva más de un año a la mediana. ¿Cuál era la numeración del boleto?
- Colocar los números naturales del 1 al 9 formando un triángulo y sumarlos. El número resultante de la suma ha de ser capicúa.

```
        X
     X  X  X
  X  X  X  X  X
  -------------
  C  A  P  I  C  Ú  A
```

- Un número de 5 cifras que termina en 7 se pasa 4 números de un capicúa y le faltan 7 para el siguiente capicúa. ¿Qué número es?
- Comprueba que en un año no bisiesto, el total de sus días capicúas es igual a un número capicúa, que a su vez es el producto de dos números capicúas.
- Pedro debía sumar todos los números capicúas de cuatro cifras, pero se olvidó de sumar uno de ellos. Si obtuvo como resultado 490776, hallar el número capicúa que se olvidó de sumar[11].
- Una compañía de n soldados forman filas de modo que de 3 en 3, quedan dos soldados en la última fila; de 4 en 4, quedan tres y de 5 en 5, quedan cinco. Averigua el mínimo n sabiendo que es capicúa y mayor que 1000.
- El número es capicúa, y si sumo sus cinco cifras da el mismo resultado que si las multiplico. La cifra de la izquierda coincide con la edad de mi hermana pequeña, las dos siguientes la edad de mi novia y las dos últimas la de mi hermana mayor, que tiene al menos un año más que mi novia.

Pedro debía sumar todos los números capicúas de cuatro cifras, pero se olvidó de sumar uno de ellos. Si obtuvo como resultado 490776, hallar el número capicúa que se olvidó de sumar.

- Cuatro fichas de dominó pueden elegirse de tal modo que con ellas pueda hacerse un cuadrado, en el que cada uno de los lados contenga la misma suma de puntos. ¿Puedes formar uno cuyos lados sumen 11 cada uno?



- Se considera un primer número de 3 cifras distintas, ninguna de ellas cero. Intercambiando dos de sus cifras de lugar, se obtiene un segundo número menor que el primero. Si la diferencia entre el primero y el segundo es un número de dos cifras y la suma del primero y el segundo es un número capicúa menor que 500, ¿cuales son los posibles capicúas que se obtienen?
- La siguiente columna de cinco filas contiene 15 cifras impares:

1	1	1
3	3	3
5	5	5
7	7	7
9	9	9

  El problema consiste en tachar nueve cifras, eligiéndolas de manera, que al sumar las columnas de las seis cifras restantes se obtenga el resultado 1111.

Juegos

Incluimos aquí unos juegos que, si bien no están relacionados con capicúas propiamente dichos sino con números con todas sus cifras iguales, creemos que son interesantes para utilizar en el aula.

- *¿Quién suma más rápido?* Es un juego tipo NIM, en el que los jugadores acuerdan un número de tres cifras iguales al que hay que llegar, mediante sumas o restas, como sigue: el primer jugador escribe un número cualquiera de tres cifras todas diferentes y por turnos, los jugadores deben sumar o restar un número de dos cifras hasta conseguir el número propuesto. Sólo se puede sumar cuando el número acordado es menor que el que queda escrito, y sólo restar cuando es mayor. Todos los cálculos se hacen mentalmente. Gana el jugador que consigue formar el número acordado.

11 18ª Olimpiada Argentina

- *Suma de seis*. Se toma al azar un número de tres cifras abc (por ejemplo, usando la función RAN# de la calculadora), y se forman los otros cinco números posibles que hay cambiando de orden los dígitos. Gana el jugador que da antes la solución correcta a la suma de la seis cantidades.

  Nota: lo interesante de este juego es que hay una solución rápida y elegante: $222\cdot(a+b+c)$. Habrá que hacerles una reflexión con números «fáciles» y darles la solución para luego pedirles la demostración.

- *El Juego de papá*[12]. Cuando era pequeña, mi padre me ponía multiplicaciones para que practicara, y siempre me asombraba cuando me ponía todos los números seguidos del uno al nueve excepto el ocho, y me decía: ¿qué numero quieres que salga? Me hacía multiplicar por el número de dos cifras que él me decía, y al sumar... aparecían todos los números iguales y ¡era justo el que yo había dicho! Por ejemplo, si yo decía «¡el 7!» tenía que multiplicar por 63: 12345679 · 63 = 777.777.777. Suponemos que muchos de los lectores conocerán el juego y el truco, consistente en multiplicar por $9n$, con n la cifra que se repite en la solución.

  Pues bien, proponemos llevar al aula este juego pero guiado por el profesor: se le pide al alumno que escriba los dígitos del 1 al 9, en orden, excepto el 8. El profesor da una cantidad a multiplicar (que no sea el 9) y gana el alumno que dé antes el resultado correcto. En un primero intento, el alumnado multiplicará o intentará dar por supuesta la solución en cuanto vea que se repiten los dígitos; después supondrá que siempre se repiten (de ahí que el profesor deba jugar un poco cambiando los números); por último, habrá que hacer una reflexión de por qué según el número que multipliques aparecen los números repetidos o no, y se le pedirá al alumnado que averigüen cuál es el «truco».

12 «Papá» es Emilio Sáiz.

Amparo Sáiz
IES Pobla de Farnals
(Valencia)
Marta I. Trapero
IES Pla del Quint.
Mislata (Valencia).
Mónica Vivó
Societat d'Educació Matemàtica
de la Comunitat Valenciana
«Al-Khwarizmi»

Referencias bibliográficas

GARDNER, M. (1985): *Circo matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

GARDNER, M. (1987): *Inspiración ¡Ajá!*, Editorial Labor, Barcelona.

PERELMAN, Ya.I. (1983): *Problemas y experimentos recreativos,* Editorial Mir, Moscú-Madrid.

Nota

Queremos hacer constar que mucha información ha sido extraída de páginas de internet que después, al intentar localizarlas de nuevo para incluirlas en el presente artículo, han desaparecido; es por ello que ofrecemos nuestras disculpas a los autores que no hayan sido citados aquí.

Duelo en la FEAPM

La Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas (FEAPM) está en duelo. Jean-Paul Bardoulat, presidente de la FEAPM, nos comunica que Neil Bibby, representante de la Mathematical Association del Reino Unido, acaba de morir en el mes de septiembre de 2002.

Neil Bibby representaba a la Mathematical Association en todas las reuniones de la FEAPM, fundada en mayo de 1999. Recientemente, en las jornadas nacionales de octubre de 2001, de la asociación francesa, APMEP, Neil Bibby había participado activamente en el vaciado del cuestionario sobre la enseñanza primaria de las matemáticas en Europa.

Con una gran dedicación a su vida profesional, asistía regularmente a las reuniones de nuestra federación a pesar de las dificultades lingüísticas y de las fechas en finales de semana o vacaciones. Su conocimiento del francés permitió una comunicación más fácil en un grupo multilingüe donde el francés y el inglés se escogieron como lenguas de uso. En febrero de 2001, expuso en el consejo de la FEAPM la situación de la enseñanza de las matemáticas en el Reino Unido, haciendo hincapié en la introducción de los nuevos programas para los alumnos de 11 a 16 años.

Neil Bibby era miembro del consejo de la Mathematical Association. Se le conoce por sus contribuciones a la investigación en historia de las matemáticas, especialmente en las charlas que pronunciaba regularmente en la sociedad británica para la historia de las matemáticas (British Society for the History of Mathematics).

La muerte de Neil Bibby deja un gran vacío en el seno de la FEAPM. Su sentido del rigor, su amabilidad, su humor nos van a faltar.

Carmen Azcárate
Vocal de la FESPM para las relaciones con Europa

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 83-92

El libro de espejos. Aplicaciones didácticas

Antonio Bermejo Fuertes

IDEAS Y RECURSOS

Los profesores tenemos que ser conscientes de que establecer la labor diaria del aula (lo que quiere decir, determinar claramente qué queremos que nuestros alumnos aprendan y mediante qué actividades intentaremos que se consiga este aprendizaje) no se puede dejar al simple uso del libro de texto; y, aunque el uso de este material sigue siendo prioritario en las aulas, es importante que no sea el único referente curricular.
Los materiales que aquí se presentan pueden ser útiles como un primer paso para entrar en la Geometría en el segundo ciclo de la ESO. Se plantea el estudio de las figuras planas como una investigación que el alumno realiza a partir de unas premisas mínimas por parte del profesor. En este sentido se hace más patente que nunca la frase: «Una clase de Geometría sólo está viva si los alumnos hacen Geometría».

LA FORMACIÓN del docente, por su propia naturaleza, exige procesos de aprendizaje diversos que incluyan desde el análisis y la reflexión sobre la propia práctica, hasta el acceso significativo a contenidos y habilidades pertenecientes a diversos ámbitos del conocimiento. En esta vía, el profesor ha de avanzar hacia un modelo de enseñante «capaz de reflexionar críticamente sobre su práctica, de analizar el contexto y adecuar a ese análisis sus decisiones, de desarrollar su autonomía profesional y de lograr una visión global de los problemas implicados en su trabajo; finalmente, capaz de desarrollar un trabajo cooperativo en su centro en el marco de una cultura de colaboración».

El trabajo que se presenta, se encuadra en el Bloque 2.° «Geometría» del 3.^{er} curso de la ESO, e intenta ser una herramienta de trabajo a través de la cual se pretende poner de manifiesto que el proceso de asimilación de conocimientos por parte del alumno mejora cuando éste participa directamente en la construcción de sus propios aprendizajes. La dinámica que conlleva consigo este proceso implica la asunción de determinados roles por parte de profesores y alumnos; así hablamos de un profesor en la vía de facilitador, innovador en la acción, cooperador. Profesor que interviene sólo cuando es necesario, estimulando la colaboración y la discusión entre sus alumnos; favoreciendo el uso de estrategias, explorando posibilidades diversas, experimentando, es decir, reforzando la necesidad de la investigación en el estudio de las matemáticas. En este sentido cabe recordar que:

> El miedo que muchos niños y muchos adultos sienten hacia las matemáticas, deriva muy a menudo del énfasis que se da a la respuesta «correcta». En el trabajo de investigación se trata de estimular la actitud de llegar a saber, de probar, de experimentar y modificar esas cosas que estamos tratando de comprender y utilizar. (Fisher y Vince, 1990: 3)

En la actividad que se presenta vamos a desarrollar algunos aspectos: título, objetivos y contenidos que se trabajan, materiales y recursos que se necesitan, tiempo, evaluación y anexos.

Título de la actividad: «El libro de espejos. Aplicaciones didácticas»

A lo largo de la actividad se pretende que el alumno vaya haciendo un recorrido por el plano, centrando su atención, en primer lugar, en las formas poligonales, atendiendo a su clasificación según diferentes propiedades.

Objetivos

Al término de esta actividad, los alumnos han de ser capaces de alcanzar los siguientes objetivos:

1.° Dibujar, construir y manipular formas poligonales analizando el potencial generador de las formas geométricas.

2.° Resolver problemas de clasificación, trazado o combinación de formas poligonales.

Estos objetivos se concretan de la siguiente forma, a la hora de trabajarlos en el aula (objetivos didácticos):

1.° Utilizar correctamente el libro de espejos para obtener polígonos regulares.

2.° Reconocer figuras planas y describirlas utilizando un vocabulario geométrico preciso.

3.° Clasificar figuras planas atendiendo a criterios sencillos.

4.° Conocer los elementos característicos de los polígonos.

5.° Reconocer los elementos geométricos: lado, ángulo, vértice y arista.

6.° Manejar formas planas con ciertas regularidades.

7.° Elegir formas planas que se ajusten mejor a unas condiciones dadas.

8.° Confiar en las propias capacidades para percibir las construcciones planas.

Contenidos

Conceptuales

- Libro de espejos: elementos.
- Clasificación de los polígonos: regulares e irregulares.
- Elementos característicos de los polígonos: apotema, ángulo central, ángulo interior.

A lo largo de la actividad se pretende que el alumno vaya haciendo un recorrido por el plano, centrando su atención, en primer lugar, en las formas poligonales, atendiendo a su clasificación según diferentes propiedades.

- Medida de ángulos centrales y ángulos interiores en los polígonos regulares.
- Tratamiento manipulativo del concepto de simetría.
- Ejes de simetría en las figuras planas. Estudio de los elementos que se conservan en las simetrías.

Procedimentales

- Manejo del libro de espejos para la obtención de polígonos, tanto regulares como irregulares, y observación de su descomposición en triángulos.
- Utilización del transportador para la obtención de los ángulos centrales de los polígonos regulares.
- Búsqueda de regularidades y utilización del lenguaje algebraico para expresar las medidas de distintos ángulos de los polígonos regulares.
- Identificación de simetrías y regularidades en figuras geométricas, formas de la naturaleza, dibujos, etc.
- Localización de figuras planas que verifican unas determinadas propiedades bien al azar, bien por métodos rigurosos.
- Comprobación de propiedades que caracterizan las figuras planas.
- Utilización de la estrategia «suponer el problema resuelto» para resolver problemas de construcciones geométricas.

Actitudinales

- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Confianza en las propias capacidades para percibir el plano y resolver problemas geométricos.
- Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
- Valoración del trabajo cooperativo en equipo.

Orientaciones didácticas

La dinámica prevista en la actividad es la de proponer la realización de las distintas partes de la actividad (acciones) como una labor personal, que después dé lugar a una discusión y trabajo en grupo, para una posterior puesta en común de conclusiones de toda la clase.

En cualquier caso, se ha de propiciar un diálogo participativo de todos los alumnos, que permita completar las acciones y profundizar en aquellos aspectos que el profesor estime más oportuno. El profesor ha de procurar sacar a la luz todas las aportaciones, correctas o no. En primer lugar, para dar a todos los alumnos la oportunidad de expresarse; y, en segundo, para que las aportaciones erróneas puedan corregirse, o enriquecerse en su caso, con las sugerencias de los demás.

En cada acción se propone siempre alguna de las premisas siguientes donde se intentan recoger las características más importantes que deberían cumplir todo tipo de actividades:

1.° *Descubrir.* Se da una información por dibujos y el alumno tiene que encontrar las figuras o transformaciones objeto de estudio. Aquí se recoge una de las características más importantes de toda actividad: *debe posibilitar descubrir propiedades.* Este es un apartado fundamentalmente motivador para el alumno.

2.° *Diseñar.* Se trata de realizar dibujos o esquemas a partir de un modelo abierto y flexible dado, con el fin de generar algo nuevo relacionado con el tema de estudio. Se recoge así la importancia de que toda actividad potencie un pensamiento creativo, así como el permitir establecer relaciones entre las situaciones estudiadas y las construidas.

3.° *Experimentar.* Es una experiencia tipo taller a partir de materiales que se dan al alumno, tratando de que se generen aplicaciones, fundamentalmente, de cara a la vida ordinaria.

4.° *Calcular.* Resolución de una situación problemática planteada. En este sentido conviene tener en cuenta que toda actividad debe generar, primero desequilibrio, y, después, asimilación y acomodación de los nuevos conceptos.

Es muy sencillo de construir [el libro de espejos]. Basta tomar dos espejos de 10 × 10 cm, y unirlos por uno de sus bordes con cinta adhesiva, de manera que las superficies reflectantes queden hacia el interior.

En el cuadro 1 se recogen las opciones que se contemplan, como más significativas, para cada uno de los once puntos comunes que componen la actividad.

Núm. acción	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Descubrir	*							*			*
Diseñar					*		*				
Experimentar		*				*			*		
Calcular			*	*						*	

Cuadro 1

Después de la puesta en común, en cada acción, el profesor ha de hacer una síntesis de conclusiones, completando aquellos aspectos que sea preciso, dando rigor cuando sea necesario y siempre reforzando la importancia de la investigación en el estudio de las matemáticas.

¿Qué es el libro de espejos?

Es muy sencillo de construir. Basta tomar dos espejos de 10 × 10 cm, y unirlos por uno de sus bordes con cinta adhesiva, de manera que las superficies reflectantes queden hacia el interior (figura 1).

Si tomamos un papel y situamos encima el libro de espejos, y a continuación dibujamos un punto o una recta entre sus láminas, inmediatamente veremos como se produce la multiplicación de imágenes. Donde antes había un punto ahora aparecen multitud de ellos, donde antes había un segmento ahora tenemos polígonos.

Acción 1

Traza una línea en un papel, sitúa encima el libro de espejos. Abre y cierra sus hojas; aparecerán polígonos. Consigue uno de 3 lados; otro de 4; otro de 5... Cada uno

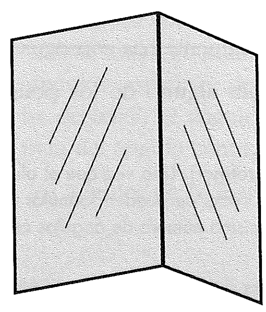


Figura 1

de estos polígonos aparece descompuesto en una serie de triángulos. ¿Cuántos en cada caso?

¿De qué forma, o en qué posición tenemos que colocar el libro de espejos sobre la línea recta para que el polígono que resulte parezca regular? ¿Cómo son, en este caso, los triángulos en que se descompone cada uno de ellos?

Acción 2

Sitúa las hojas del libro sobre la línea, de forma que el polígono obtenido sea un cuadrado. Observa la figura 2. Aparecen dibujados dos ángulos: el ángulo A que se denomina central y el B que se denomina interior.

Podrás calcular fácilmente la suma de los cuatro ángulos centrales del cuadrado y, en consecuencia, el valor de uno de ellos.

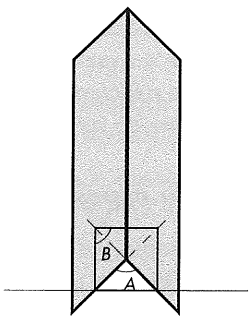


Figura 2

Completa a continuación la tabla:

Núm. de la dos del polígono obtenido	3	4	5	6	...	*n*
Valor del ángulo central						

Utilizando un transportador de ángulos podemos dar la vuelta al problema. Así, con el transportador, el libro de espejos y una hoja en blanco: ¿cómo debemos colocar los espejos para estar seguros de ver un cuadrado? ¿Qué ángulo deben formar las hojas del libro?

A continuación une, mediante una línea, los dos extremos de las hojas del libro, o bien dos puntos equidistantes, comprobando si efectivamente has conseguido un cuadrado.

Haz lo mismo para alguno de los polígonos de la tabla anterior.

NPP (Nota para el profesor). Una vez que el alumno calcula el ángulo central de un cuadrado, se pueden formular conjeturas: ¿todos los polígonos tienen el mismo número de ángulos centrales?, ¿su suma es siempre la misma?

El libro de espejos es una herramienta muy útil para buscar las respuestas adecuadas. Por otro lado, es conveniente que los alumnos conozcan que la idea de ángulo central sólo es válida para los polígonos que pueden inscribirse en una circunferencia. Sin embargo, el concepto de ángulo de un polígono o angulos interiores (el formado por dos lados consecutivos) permanece en cualquier polígono.

Además, a partir de un polígono regular cualquiera y cerrando poco a poco las hojas del libro, se pueden ir obteniendo progresivamente polígonos regulares de mayor número de lados; si apenas dejamos espacio entre sus hojas podemos conseguir una aproximación intuitiva al concepto de círculo como polígono regular de infinitos lados.

¿De qué forma, o en qué posición tenemos que colocar el libro de espejos sobre la línea recta para que el polígono que resulte parezca regular?

Acción 3

Como puedes observar en la figura 2, el triángulo formado por las hojas del libro y la línea dibujada en el papel es isósceles, ya que dos de sus lados (los que forman las hojas del libro) son iguales; en consecuencia, los ángulos opuestos también serán iguales; la suma de estos dos ángulos da justamente otro ángulo que aparece en la figura. ¿Cuál?

Completa la tabla:

Polígono de partida (número de lados)	3	4	5	6	...	*n*
Valor de cada uno de los dos ángulos iguales						
Valor del ángulo interior						

N.P.P. En el caso de *n* lados, en las tablas de las dos acciones anteriores, es preciso utilizar el lenguaje algebraico. Además, el proceso de generalización no siempre es sencillo. Se trata de hacer una conjetura y después preguntarse: ¿qué ocurriría si le doy a *n* un valor cualquiera?; esta propiedad, ¿es válida para todos los casos?; ¿supongamos que en lugar de... tuviésemos...?

Algunas estrategias reconocidas como muy interesantes para realizar la generalización son las que siguen: — Reconocer relaciones y regularidades.— Hacer conjeturas.— Generar ejemplos para poner a prueba una conjetura.— Considerar la iteración: añadir uno.— Coleccionar una variedad de ejemplos: probar números grandes.

Acción 4

Vamos a ver otro método para calcular el ángulo interior de un polígono. Observa la figura 2. Deseamos calcular la suma de todos sus ángulos interiores. Aunque en este caso es sencillo (puesto que se trata de 4 rectos) no siempre es así de fácil.

Vamos a hacerlo descomponiendo en triángulos el polígono de partida (en el menor número posible), en este caso 2, por lo que la suma de sus ángulos será 180 × 2 y, en consecuencia, el valor de cada uno de ellos será 360/4, o sea 90°. Completa la tabla:

Número de lados	3	4	5	6	...	*n*
Mínimo número de triángulos en que puede descomponerse						
Suma de los ángulos interiores						
Valor de cada ángulo interior						

Compara éstos con los resultados obtenidos en la tabla anterior. ¿Son semejantes las dos expresiones algebraicas para *n* lados?

Acción 5

Vamos a trazar la perpendicular a una recta *r* desde un punto *O* exterior a ella. Utilizaremos como regla una de las hojas del libro (figura 3).

1. Sitúa el vértice del libro en el punto y abre sus hojas, sobre la recta, de forma que se visualice un cuadrado. En consecuencia, el ángulo que forman las hojas del libro será de 90°.
2. Mantenemos fija una hoja y giramos la otra hasta que éstas formen un ángulo de 45º. Por lo tanto, la hoja coincide con la apotema del cuadrado y será la perpendicular buscada ¿Por qué?

- Haz lo mismo cuando el punto se encuentra sobre la recta de partida.
- ¿Cómo trazarías la paralela a una recta por un punto exterior a ella?

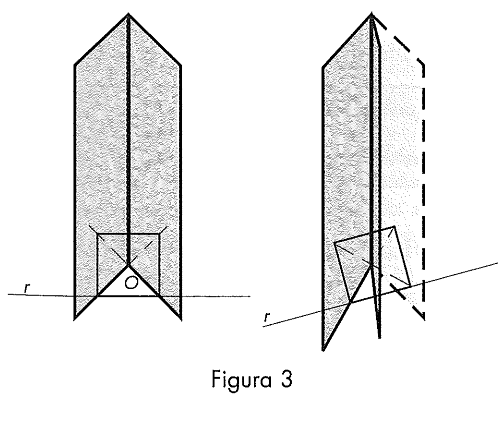


Figura 3

¿Cómo dividirías un segmento en dos partes iguales? ¿Y en cuatro? ¿Y en ocho?

- ¿Cómo dividirías un segmento en dos partes iguales? ¿Y en cuatro? ¿Y en ocho?

N.P.P.- Para dividir un segmento en dos partes iguales hay que situar el libro de espejos en sus extremos de forma que se visualice un cuadrado, por lo que las láminas serán así la mitad de las diagonales del cuadrado. A continuación basta aplicar el punto 2 anterior.

La división en 4, 8, 16..., es inmediata volviendo a aplicar sucesivamente este proceso.

Acción 6

Utilizando la técnica empleada en la acción anterior, coloca una de las hojas del libro de espejos perpendicular a la línea trazada en el papel. Mueve la otra hoja del libro abriéndolo o cerrándolo. ¿Qué observas?

- ¿Cómo es el triángulo que forman las hojas del libro de espejos y la línea recta dibujada en el papel?
- ¿Qué abertura tiene que tener el libro de espejos para conseguir los distintos polígonos regulares?
- ¿Cuántos triángulos rectángulos «caben» en cada polígono?

Completa la tabla:

Número de lados	3	4	5	6	...	*n*
Número de triángulos						
Valor de la abertura						

Vamos a comparar los dos métodos que hemos empleado para construir un polígono regular con el libro de espejos.

Enumera sus semejanzas y sus diferencias. Completa después la tabla y valora los aciertos o errores.

Para el cuadrado	*Por el método 1*	*Por el método 2*
Número de triángulos en que puede descomponerse		
Valor del ángulo que forman las hojas del libro		
Valor del ángulo interior		
Suma de los ángulos que forman las hojas del libro		
Suma de los ángulos interiores		

Acción 7

El ángulo dibujado en la figura 4 corresponde al ángulo interior de un polígono regular. Utiliza el libro de espejos para comprobar de cuál se trata. A continuación, mediante el transportador de ángulos, asegúrate de la validez de tu respuesta. ¿Cuánto ha de medir el ángulo que forman las hojas del libro? ¿Se trata del ángulo central del polígono?

Haz lo mismo para los ángulos de la figura 5.

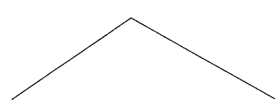


Figura 4

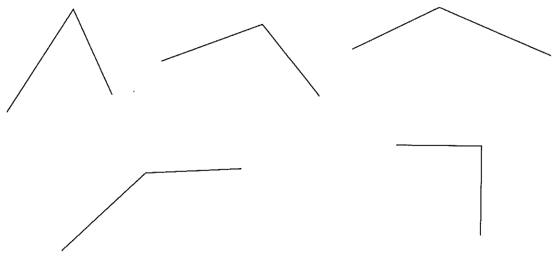


Figura 5

Ya habrás comprobado que la figura 4 corresponde al ángulo interior de un hexágono. Colocando de forma simétrica, sobre los lados de la figura, el libro de espejos, abrimos y cerramos sus hojas hasta conseguir los seis lados.

Existe, además, otra forma de colocar las hojas del libro para obtener el hexágono. Basta con mantener fija una de las hojas y mover la otra hasta alcanzar el vértice del ángulo interior. ¿Qué observas entonces? ¿Cómo se denomina la línea que ocupa ahora la hoja del libro que hemos movido, con respecto al ángulo interior del polígono?

Acción 8

En la naturaleza, en el arte, en el mundo cotidiano, estamos rodeados de figuras simétricas. Observa los dibujos de la figura 6.

A simple vista es fácil apreciar sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene cada una de ellas?

Una técnica muy sencilla para estudiar las simetrías es mediante el uso de un espejo. Así para tratar de encontrar las simetrías de estas figuras, sitúa un espejo sobre ellas y varía su posición hasta conseguir ver la figura completa.

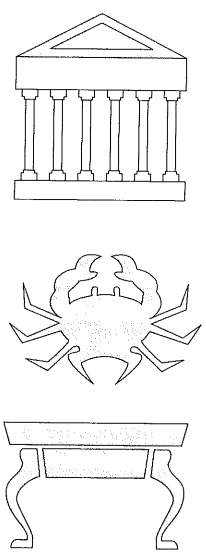


Figura 6

En la naturaleza, en el arte, en el mundo cotidiano, estamos rodeados de figuras simétricas.

La línea sobre la que apoya el espejo es el eje de simetría. Comprueba de esta forma si las respuestas que acabas de dar son acertadas.

Acción 9

Analiza los dibujos de la figura 7. Busca todos sus ejes de simetría. Hazlo de dos formas:

1.ª Visualmente, sin utilizar ninguna herramienta, ni siquiera lápiz y papel. Es decir, observa atentamente cada uno de los dibujos y, utilizando solamente la vista, imagina sus ejes de simetría.

2.ª Mediante un espejo, y comprobar la validez de tus conjeturas.

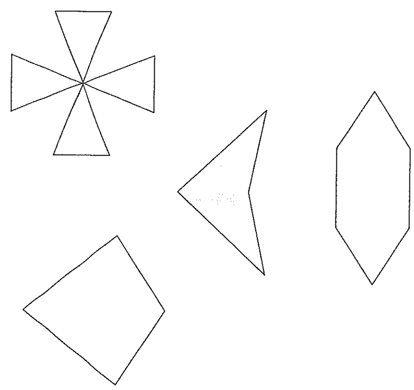


Figura 7

Acción 10

Aplicando los pasos de la acción anterior dibuja triángulos, cuadrados, pentágonos…, todos ellos regulares. Vamos a ver si existe relación entre ejes de simetría y número de lados. Completa la tabla:

Número de lados del polígono regular	3	4	5	6	…	*n*
Número de ejes de simetría						

Habrás comprobado que algunos ejes de simetría van de lado a lado, otros de vértice a lado y, finalmente, otros de vértice a vértice. ¿Cuántos de cada clase? Completa la tabla:

	De lado a lado	*De vértice a lado*	*De vértice a vértice*	*Número de lados*
Triángulo				
Cuadrado				
Pentágono				
Hexágono				
...				

¿Observas alguna relación entre todos los polígonos que tienen un número impar de lados? ¿Y entre los que tienen un número par?

Acción 11

A partir del primer dibujo de la figura 8 que hace la labor de modelo. ¿En qué posición deberás colocar el espejo para obtener el resto?

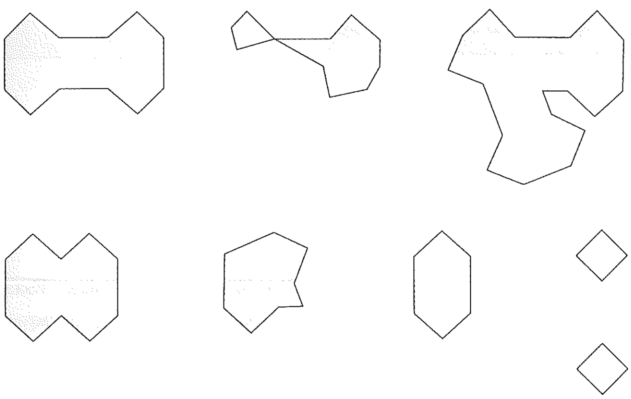


Figura 8

N.P.P. A partir de unos minutos y una vez que el alumno ha ensayado alguna posibilidad, también se puede estudiar el problema al revés: viendo la solución estudiar la posición en la que se ha de colocar el espejo para obtener la figura de partida.

La técnica consiste en observar detenidamente cada una de las figuras, imaginar cómo pueden obtenerse a partir de un modelo dado, y, una vez que tengamos completa seguridad, utilizar el espejo para comprobar si la hipótesis era cierta o no.

Es decir, se hace más hincapié en el análisis de cada figura y de sus ejes de simetría, y supone buscar «media figura» en el modelo de partida. Así, por ejemplo, la figura 9 tiene dos ejes de simetría:

En el primero, la mitad de esa figura, no se encuentra en el modelo de partida; en el segundo, la mitad de la figura sí que se encuentra en el modelo de partida, lo que nos indica cómo colocar el espejo.

En la ESO es preciso dotar a todos los alumnos de un tronco común...

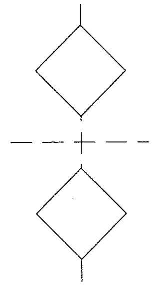


Figura 9

Tratamiento de la diversidad

En la ESO es preciso dotar a todos los alumnos de un tronco común, pero sin olvidar asegurar y exigir, al mismo tiempo, el desarrollo máximo de las capacidades de todos y cada uno de los alumnos. Se señala así la necesidad de atender a la diversidad facilitando itinerarios formativos, que, en algunos tramos, pueden ser distintos, según se correspondan con sus capacidades.

En el caso que nos ocupa, las acciones vistas hasta ahora se consideran básicas y, en consecuencia, comunes para todos los alumnos. Además hay previstas otros dos tipos:

1.° Acciones que podríamos llamar «complementarias» destinadas a aquellos alumnos que hayan realizado la parte común explicitada anteriormente.

2.° Acciones «de recuperación», para aquellos alumnos que encuentren serias dificultades para realizar las acciones comunes.

Actividades complementarias

Acción 12

Utilizando la técnica explicitada en la acción 5, vamos a trazar el simétrico de un punto O respecto a una recta r (figura 10).

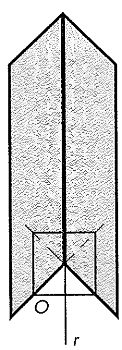


Figura 10

1.° Trazamos la perpendicular a la recta *r* desde el punto *O*.

2.° Situamos el vértice del libro de espejos sobre la recta r y una de sus hojas sobre el punto *O* y visualizamos un cuadrado moviendo la segunda hoja.

3.° El punto de corte de esta segunda hoja con la perpendicular trazada anteriormente nos da el punto buscado. ¿Por qué?

Acción 13

Nos planteamos dividir el ángulo de la figura 4 en dos partes iguales o, lo que es lo mismo, trazar la bisetriz. ¿Cómo conseguirlo? (figura 11).

Prolonga los lados del ángulo de forma que su longitud sea superior a la de las hojas del libro.

Sitúa sobre ellas el libro, mueve una de sus láminas hasta que la imagen especular del lado visible coincida en nuestra visual con la prolongación del lado no visible.

Puedes ahora utilizar un transportador para comprobar que no te has equivocado.

Haz lo mismo para el resto de ángulos de la acción anterior.

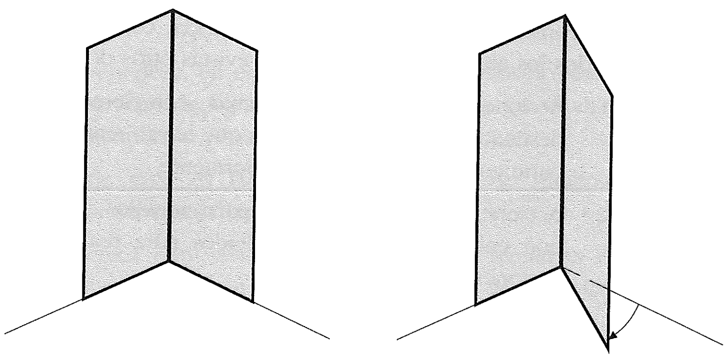


Figura 11

Acción 14

Observa la figura 12. En ella hay dos palillos. ¿Cómo tienen que colocarse para visualizar un cuadrado? ¿Qué ángulo forman entonces? ¿Cómo se llama dicho ángulo? ¿Y cómo han de colocarse para obtener un polígono estrellado de cuatro puntas?

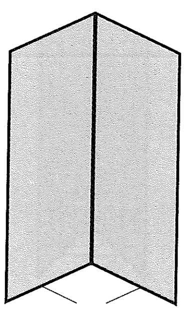


Figura 12

Acción 15

Completa las tablas:

Polígonos a obtener (número de lados)	3	4	5	6	...	*n*
Ángulo que forman los palillos						

Número de puntos de la estrella	3	4	5	6	...	*n*
Ángulo que forman los palillos						

Acción 16

Los polígonos estrellados también se pueden conseguir con una simple hoja en la que hemos dibujado una recta y el libro de espejos. ¿Cómo? Completa la tabla:

Número de puntos de la estrella	3	4	5	6	...	*n*
Ángulo de la abertura del libro						

Actividades de recuperación

Acción 17

Juega con las letras mayúsculas. Esas letras tienen eje de simetría; aunque varían de unas a otras. ¿Por qué?

A B C D

Utiliza el espejo para validar tus respuestas.

Acción 18

Observa las letras del abecedario. Algunas no tienen ejes de simetría, otras uno, otras dos, e incluso una tiene infinitos. ¿Cuál?

Completa la tabla:

Número de ejes	*Letras del abecedario*
1	
2	
...	
infinitos	

Inventa frases que tengan eje de simetría, bien vertical, bien horizontal. Utilizando después el espejo podrás obtener la frase entera. ¿Siempre?

Acción 19

Utilizando papel cuadriculado dibuja las figuras simétricas respecto al eje de simetría señalado con la letra «r» (figura 13). A continuación comprueba con un espejo si las respuestas son correctas.

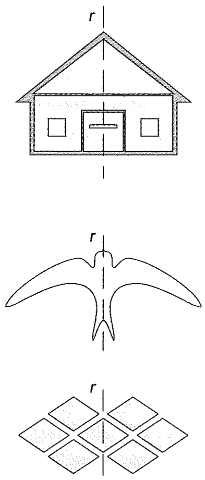


Figura 13

Acción 20

Si colocas un espejo, en cada dibujo de la figura 14, sobre la línea de puntos ¿cuál será la figura resultante? Dibújala en un papel y después utiliza el espejo para comprobar la validez de tu respuesta.

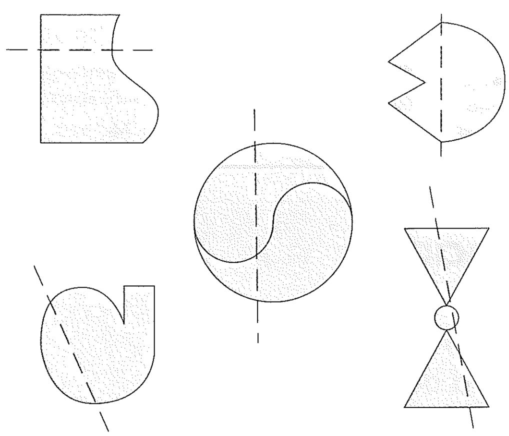


Figura 14

La introducción de cualquier material debe de ir precedida de un primer contacto libre y espontáneo por parte de los alumnos.

Recursos materiales

La introducción de cualquier material debe de ir precedida de un primer contacto libre y espontáneo por parte de los alumnos. Así, es importante que en este primer momento, no se les den orientaciones; que centren su atención en investigar, intercambiar ideas, lo que les permitirá descubrir por sí mismos algunas posibilidades del material. Posteriormente, se ha de promover la reflexión sobre lo que están haciendo, centrando su interés en las características y posibilidades que ofrece dicha manipulación.

En cualquier caso es preciso tener en cuenta que:

> Aunque enseñar es un arte, ningún artista toma sus instrumentos de trabajo y actúa directamente ante su público. Nuestra actuación en clase requiere una minuciosa puesta en escena. (Pérez Gómez, 1994: 67)

Para el desarrollo de la actividad se sugiere que cada alumno trabaje con el siguiente material:

- Material personal: espejos rectangulares pequeños, regla, cartabones, transportador.
- Material de clase:
  1.° Fungible: papel, cartulina de colores, tramas diversas.
  2.° No fungible: paquetes de polígonos y círculos, retroproyector.

En cuanto al aula, conviene contar con mesas y sillas que permitan realizar trabajos por grupos. En este sentido, sería necesaria una organización flexible, para que podamos tener a distintos alumnos trabajando con actividades también diferentes, lo que conlleva la necesidad de delimitar claramente los tiempos y los recursos necesarios para poder llevar a cabo de una forma eficaz dicha labor.

Tiempo

Aunque cada grupo de alumnos tiene su propio ritmo de aprendizaje, es conveniente marcarse un horario indicativo, que permita dar un sentido global a la unidad dentro del bloque del curso en el que se lleve a cabo.

El tiempo previsto para realizar la actividad es la que sigue:

- Primera clase: acciones 1, 2, 3 y 4
- Segunda clase: acciones 5, 6 y 7
- Tercera clase: acciones 8, 9 10 y 11.

Para las actividades, bien de recuperación, bien complementarias, se pueden destinar dos clases.

Evaluación

La evaluación es un instrumento de investigación del profesor y debe de entenderse más como un medio, que como un fin; dentro del marco de la LOGSE, entre los fines u objetivos de la evaluación cabe destacar el de *descubrir las verdaderas necesidades de los alumnos*, en el sentido de ser capaces de conocer qué variables permiten que aprenda mejor, en qué situaciones de la clase rinde más, qué ayudas necesita, qué momento es el más adecuado para introducir estímulos o conceptos nuevos, con qué compañeros o grupos se relaciona mejor. La observación de los alumnos en el aula aporta datos fundamentales al profesor: iniciativa e interés por el trabajo, participación, aceptación del trabajo en equipo, hábitos de trabajo, conceptos mal aprendidos...

Asimismo, es importante que los alumnos conozcan los objetivos de aprendizaje, es decir, sepan lo que se espera que aprendan y tengan información de en qué grado lo van consiguiendo; así como de las dificultades que van encontrado y de los recursos que disponen para superarlas.

De los ocho objetivos que se proponían al principio del trabajo podemos concretarlos en dos criterios de evaluación:

1.° Conocer las posibilidades del libro de espejos para dibujar y construir formas poligonales, sabiendo clasificarlas. Reconocer y manejar los distintos elementos geométricos de los polígonos en general, y regulares en particular.

2.° Ser capaces de identificar ejes de simetría, saber trazarlos, reconocerlos en figuras y conocer propiedades básicas, apreciando su presencia en las formas cotidianas, industriales y artísticas.

Para su valoración basta diseñar alguna acción específica, semejantes a las descritas anteriormente, o bien proponer la realización de un proyecto de trabajo de formato semejante al presentado en el texto *Matemáticas de la forma* (Alsina, 1993: 16). El tema objeto del proyecto, puede ser el estudio de las simetrías en un edificio, cuadro o escultura que podamos visitar, además de que nos sea relativamente sencillo encontrar información escrita.

En definitiva, la Geometría nos permite acercar la matemática al mundo real, los alumnos, partiendo de un planteamiento experimental e intuitivo, y a través de la visualización, representación y experimentación, pueden analizar y resolver distintas situaciones problemáticas, con lo que cobra fuerza el aspecto formativo sobre el informativo: «Los aspectos de pensamiento son tan importantes como los productos finales del mismo»

...la Geometría nos permite acercar la matemática al mundo real...

Antonio Bermejo
Centro de Profesores
y Recursos de Astorga.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

Bibliografía

ALSINA CATALÁ, C. y otros (1989): *Simetría dinámica*, Síntesis, Madrid.

ALSINA CATALÁ, C. y otros (1988): *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA CATALÁ, C. (1993): *Materiales Didácticos. Matemáticas de la Forma*, MEC.

BERMEJO, A. (1995): «Materiales didácticos. Decorando el plano», *Sigma*, n.° 17, 95-114.

BERMEJO, A. (1999): «Mosaicos. Movimientos en el plano», *Suma*, n.° 30, 111-120.

FISHER R., y A. VINCE (1990): *Investigando las matemáticas*, Akal, Madrid.

GRUPO CERO (1983): *Es posible*, ICE de la Universidad de Valencia, Valencia.

GRUPO CERO (1984): *De 12 a 16. Un proyecto de Currículum de Matemáticas*, Mestral, Valencia.

HERNÁN, F. y otro (1988): *Recursos en el aula de Matemáticas*, Síntesis, Madrid.

MARTÍNEZ RECIO y otros (1989): *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

MEC (1995): «Guía de recursos didácticos», *Matemáticas ESO*, Madrid.

O'DAFFER PH. G. y otro (1976): *Laboratory Investigations in Geometry*, Addison-Wesley.

PEREZ GÓMEZ, R. (1994): «Construir la Geometría», en *Geometría en todos los niveles y según el nivel*, *Revista Uno*, Graó, Barcelona.

REVISTA UNO (1994): *Geometría en todos los niveles y según el nivel*, Graó, Barcelona.

WEYL, H. (1990): *Simetría*, McGraw Hill, Madrid.

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 93-101

La matemática de los cuentos

María Aurelia Noda Herrera
Inés del Carmen Plasencia Cruz

Se relata en este artículo una experiencia didáctica que se realizó con alumnado de formación de Maestro del Centro Superior de Educación de La Universidad de La Laguna, a quienes se les propuso trabajar aspectos de la Matemática a través de la confección de un cuento, utilizando como recurso el recortado de papel. Presentamos en este trabajo la metodología utilizada en esta experiencia, así como modelos de los cuentos construidos y algunas reflexiones surgidas de la puesta a punto de esta experiencia.

IDEAS Y RECURSOS

PRESENTAMOS una experiencia de formación en didáctica de las matemáticas, en los estudios de diplomatura de Maestro de la Universidad de La Laguna, realizada en los cursos académicos 1999-2000 y 2000-2001, con alumnos y alumnas que cursan la asignatura optativa y de libre elección *El Material Didáctico en la Enseñanza de la Matemática*, ofertada por el Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático. Esta asignatura, en la que se matriculan un promedio de cuarenta estudiantes por curso, procedentes de distintas facultades y especialidades de Maestro, pretende que éstos tengan una idea amplia de los materiales y recursos didácticos que se pueden utilizar para la enseñanza de la Matemática. Para ello, una de las actividades propuestas consistía en la elaboración de un cuento, utilizando como técnica de construcción el recortado de papel y considerando algunas de las ideas de Gianni Rodari (1985). De esta manera, se pretendía relacionar dos disciplinas, la Geometría y la Literatura, así como observar las potencialidades que implicaba esta actividad.

En relación a la primera disciplina, el estudio de las formas geométricas constituye uno de los objetivos que hay que tratar en las primeras edades escolares. Concretamente, los Diseños Curriculares Base para la Educación Infantil y Primaria (MEC, 1989) expresan, entre los procedimientos que se deben de desarrollar, la construcción de figuras geométricas planas a partir de datos previamente establecidos y la formación de figuras planas a partir de otras por composición y descomposición.

En nuestro trabajo, tomamos como marco de referencia la teoría elaborada por los educadores matemáticos Pierre y Dina van Hiele, la cual hace referencia a la capacidad cognitiva del estudiante en el área de Geometría. Ellos consideraron que el pensamiento matemático sigue un modelo concreto en el que se identifican una secuencia de tipos de razonamiento, llamados los «niveles de razonamiento», a través de los cuales progresa el razonamiento matemático de los individuos, desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual, en el campo correspondiente.

El modelo consta de cinco niveles de razonamiento, de tal manera que el alumno, apoyado por diseños instruccionales concretos, se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico, «visualización», donde el espacio es simplemente observado, y las propiedades de las figuras no se reconocen explícitamente, hasta el último nivel, «rigor», relativo a la deducción de aspectos formales y abstractos de la Geometría.

Teniendo en cuenta las ideas de los párrafos precedentes, el conocimiento geométrico no consiste, únicamente, en reconocer visualmente unas determinadas formas y saber su nombre correcto, es algo más profundo y complejo, que implica y desarrolla capacidades muy diversas de la persona, como la imaginación, la creatividad, el análisis...; no obstante, no podemos olvidar que estamos pensando en edades tempranas, donde la capacidad evolutiva tiene sus limitaciones.

El tratamiento de la Geometría se puede iniciar intuitivamente, a partir de experiencias de la vida cotidiana. En la experiencia que aquí se describe, proponemos la construcción de figuras empleando para ello distintas formas geométricas. Recortando, pegando, uniendo, doblando..., diferentes papeles, se van descubriendo figuras geométricas y diferentes formas que van saliendo de los mismos. Además de las habilidades implícitas utilizadas en la manipulación del material, se desarrollan las capacidades de análisis y reflexión, como iremos viendo en el desarrollo de este trabajo, lo que conlleva una actividad mental, propia del pensamiento matemático.

Por otra parte, en el área de la Literatura, los cuentos son un recurso didáctico reconocido por la LOGSE y constituyen un medio eficaz de comunicación entre las personas. Al escribir un cuento, el autor ofrece su experiencia, sus conocimientos, sus emociones, sus fantasías y sus sueños y, a través de los temas que elige y de la forma en que los presenta, expresa parte de su sistema de valores y sus creencias.

El cuento es un buen medio globalizador, a través del cual podemos motivar a los estudiantes en la asignatura de matemáticas. El alumnado puede cambiar esa actitud generalizada de rechazo ante las matemáticas, al no presentársele como un compendio de conceptos abstractos e incomprensibles para él. Por ejemplo, el triángulo puede ser un ciudadano de «Triangulandia» país de los triángulos gobernado por la Reina Equilátera (Plasencia y Rodríguez, 1999). Los contenidos matemáticos tratados en el cuento adquieren verdadera significación en tanto y cuanto que él, el alumnado, los relaciona con lo que le ocurre en la vida diaria. Así, el rombo es la cabeza de una cometa y un polígono cóncavo de cuatro lados puede ser un pájaro o un boomerang.

En la experiencia que aquí se describe, proponemos la construcción de figuras empleando para ello distintas formas geométricas. Recortando, pegando, uniendo, doblando..., diferentes papeles, se van descubriendo figuras geométricas y diferentes formas que van saliendo de los mismos.

Realización

Para la realización de esta experiencia, la metodología seguida en clase, fue la de trabajar en grupos de tres o cuatro alumnos y una puesta en común, ya que pensamos que esto puede motivar la discusión y confrontación de diversos puntos de vista sobre el contenido y las formas más adecuadas de realizar la actividad propuesta, y, además, obliga a establecer un plan para organizar el trabajo y a considerar el papel de cada miembro del grupo, para lograr una producción rica que recoja todas las aportaciones.

Centrado el problema, consistente en utilizar el recortado de papel como recurso didáctico en la construcción de un cuento, fue necesario, para encontrar la solución y después de introducir a los alumnos en la técnica del recortado, recurrir a la información que nos permitía dar unas pautas a los alumnos para la producción del guión o argumento del cuento.

Las ideas de Gianni Rodari, expresadas en su libro *Gramática de la Fantasía*, nos sirvieron como punto de partida. Ellas hacen referencia a algunas formas de inventar historias para niños y de cómo ayudarles a inventarlas ellos solos. De todas estas opciones, elegimos inventar una historia a partir de determinadas palabras.

En el curso 1999-2000, los alumnos trabajaron con la indicación de que el argumento del cuento debía reflejar ideas o conceptos matemáticos, a partir de palabras dadas por las profesoras. En el curso 2000-2001, el contenido del argumento del cuento era libre y elaborado a partir de palabras elegidas por el alumnado; para ello, cada miembro de la clase aportaba una palabra que le fuese significativa. Con todas las palabras sugeridas se formó un listado, del que cada grupo de alumnos debía elegir siete u ocho palabras que tenían que figurar en dicho argumento.

Por otra parte, las ilustraciones del cuento tenían que ser construidas con imágenes creadas a partir de las formas geométricas surgidas de la técnica del doblado y recortado de papel.

A continuación explicaremos brevemente en qué consiste esta técnica.

Técnica del recortado

Recortar es algo que interesa al niño desde edades muy tempranas, de manera que podemos «aprovechar la ocasión» y, a partir de este interés, ayudarle a crear imágenes sencillas que en ocasiones es incapaz de realizar con la ayuda del lápiz, y de esta manera trabajar aspectos de la Matemática como el reconocimiento de las formas geométricas a través de la manipulación y construcción de las mismas, así como la composición y descomposición de figuras e imágenes, con las que poder además expresarse.

Para explicar la técnica del doblado y recortado de papel partimos de la utilización de algunos doblados útiles (figura 1). El libro surge de doblar el cuadrado por la mitad (por la mediana), haciendo coincidir los ángulos de dos en dos al mismo tiempo que los lados; el pañuelo, de doblar el cuadrado una vez en una dirección, y una vez en la otra (siguiendo las medianas del cuadrado); la pañoleta, de doblar el cuadrado siguiendo una de las diagonales del mismo.

El aprendizaje de estos doblados, permite al niño/a descubrir: a) que es posible doblar en una y otra dirección; para obtener el pañuelo, ha sido necesario dar la vuelta al papel entre las dos operaciones; b) que partiendo de una figura geométrica como el cuadrado, se puede obtener otra figura totalmente distinta (un rectángulo o un triángulo), o bien lograr la misma en tamaño más pequeño.

Figura 1

...las ilustraciones del cuento tenían que ser construidas con imágenes creadas a partir de las formas geométricas surgidas de la técnica del doblado y recortado de papel.

A partir de estos dobleces, proponemos actividades con las que los niños puedan construir y reconocer formas geométricas, así como componer y descomponer figuras más o menos detalladas, en las que identifiquen las formas geométricas y establezcan un «parecido» con algo conocido. De esta manera, al dar nombre a las formas geométricas obtenidas, en su memoria se asocian imágenes y sonidos con la mayor facilidad.

Comenzaremos con la obtención de figuras de lados rectos, como el cuadrado, el triángulo y el rectángulo, ya que cortar líneas rectas es lo más fácil para niños pequeños. Posteriormente, cuando la muñeca sea más flexible, podemos trabajar la línea curva, y obtener figuras como el círculo, el óvalo, la elipse...

A modo de ejemplo mostramos algunas actividades para trabajar el concepto de triángulo, organizadas en orden de dificultad creciente (Lugo Canaleta, 1986).

Actividad 1

Como ilustra la figura 2, de un trozo de papel se pueden obtener triángulos, con uno, dos o tres cortes, y con ellos componer diferentes figuras, pegando los triángulos en plantillas incompletas elaboradas por el profesor, con el objeto de que el alumno observe a qué puede parecerse el triángulo.

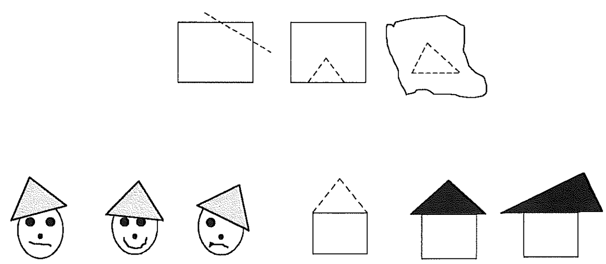


Figura 2

Actividad 2

A partir de cortes en el doblado del libro, podemos obtener diferentes triángulos, con la ventaja que de que cada corte surgen dos triángulos iguales, lo que permite elaborar figuras más complejas (figura 3).

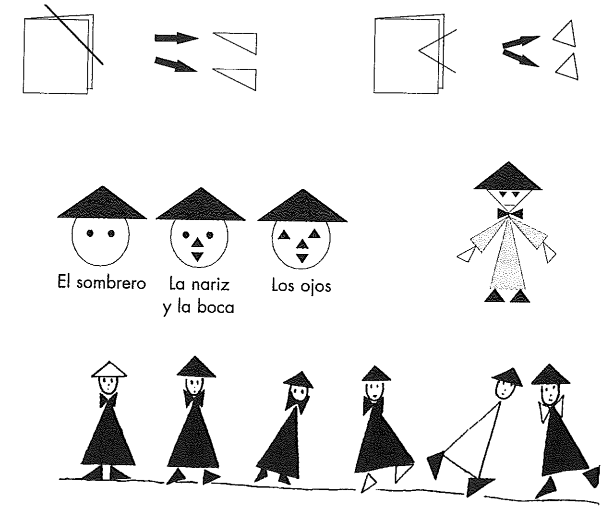


Figura 3

Actividad 3

El corte de triángulos en el doblado del libro, permite, no sólo obtener triángulos iguales sino además obtener derivados del triángulo, lo que permite componer figuras con triángulos y cuadriláteros (basta con saber contar hasta cuatro). Los cuadriláteros que se obtienen pueden adoptar distintas formas según la orientación de los cortes (figura 4).

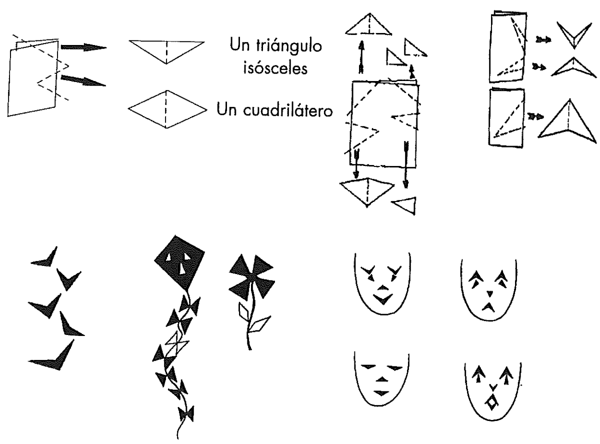


Figura 4

Actividad 4

Para obtener más de dos formas iguales, podemos recurrir al recortado de triángulos en el doblado del pañuelo. Algunas sugerencias de cortes se muestran en la figura 5.

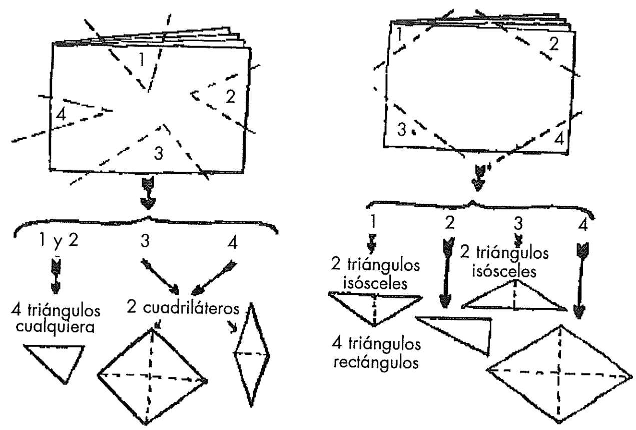


Figura 5

Actividad 5

A partir del recortado de triángulos en el doblado de la pañoleta, podemos obtener diferentes tapetes, flores, estrellas, etc. (figura 6).

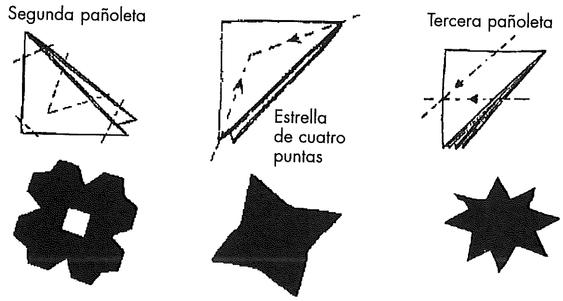


Figura 6

...el triángulo, recortado de un papel doblado, origina nuevas formas...

Actividad 6

Por otra parte, el corte sobre triángulos, permite obtener nuevos cuadriláteros (figura 7). De esta manera, se descubre que el triángulo, recortado de un papel doblado, origina nuevas formas: otros triángulos y cuadriláteros, y el recortado del triángulo, proporciona nuevos polígonos.

Siguiendo la misma técnica, podemos trabajar con el resto de las formas geométricas de manera que podemos dis-

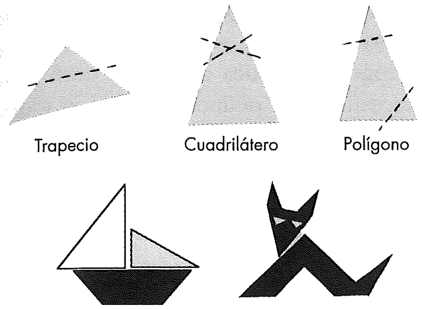


Figura 7

poner de múltiples polígonos con los que construir todo tipo de figuras a las que se les puede inferir movimientos, desplazando las distintas partes de las mismas, y poder, de esta manera, llegar al cuento en imágenes.

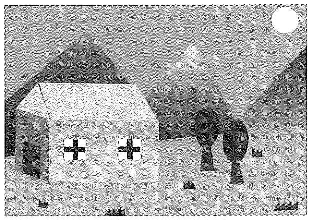
Cuentos elaborados por los estudiantes

En este apartado expondremos algunos cuentos realizados por nuestros estudiantes. La elección no nos ha resultado fácil. Todos los cuentos realizados tienen su importancia, han sido realizados con mucho cuidado y esmero, y el argumento expresa los valores que tienen nuestro jóvenes. El interés con que el alumnado se ha tomado esta actividad, nos ha llenado de gran satisfacción y nos confirma el hecho de que la mayoría de los estudiantes, en un ambiente de clase adecuado, se implican y se comprometen en su aprendizaje.

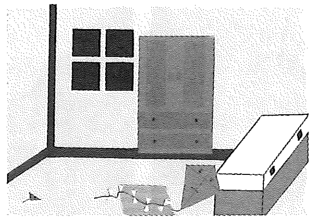
Optamos, debido a problemas de espacio, por incluir las ilustraciones de dos cuentos realizados con argumento libre (*La cometa que no sabía volar* –cuento 1– y *Sueños* –cuento 2), y el argumento (sin ilustraciones) de dos cuentos que reflejan algunas ideas matemáticas (*El pollito* –cuento 3– y *El número nueve y sus familiares* –cuento 4–).

Los cuentos 3 y 4 reflejan en sus textos ciertas ideas matemáticas. El primero de ellos, titulado *El pollito* fue elaborado por una alumna de la especialidad de

Título: *La cometa que no sabía volar*
Autores: David Zamora García, J. Jesús García González, Antonio Gómez Rijo, Gustavo Trujillo Quijada y Ernst Sascha Peiler
Curso: Tercero de la especialidad de Educación Física

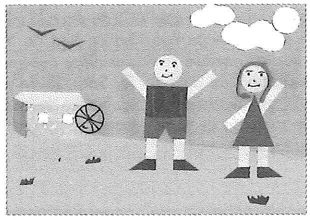


Hace mucho tiempo, en un lugar llamado «Pitagorín», había una casa muy, muy antigua a las afueras del pueblo.

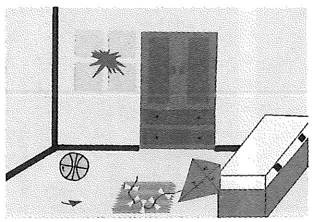


Allí, en un cuarto oscuro, se encontraba una pequeña y triste cometa, sucia y abandonada.

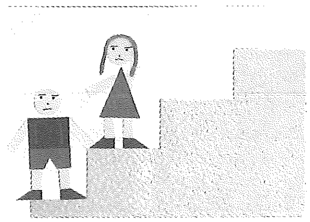
No muy lejos, de esa vieja casa, en un bosque frondoso y húmedo, jugaban Priscila y Quique a la pelota.



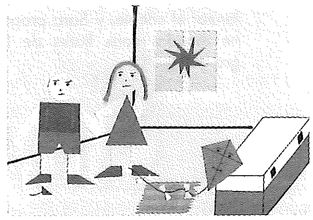
De repente, una ráfaga de viento alzó la pelota contra la ventana y rompiendo el cristal cayó dentro de la casa.



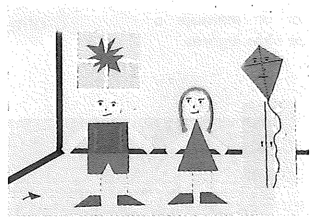
La cometa, al ver la forma y colores de la pelota exclamó: «¡Qué cosa más extraña!».



Quique y Priscila, muertos de miedo, se adentraron en la casa buscando la pelota.



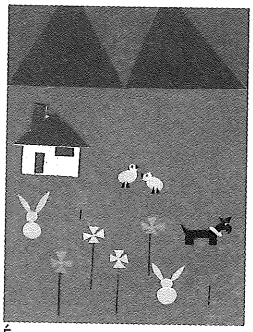
Al entrar al cuarto donde estaba la pelota, una voz cálida les dijo «¡Hola! ¿Quiénes sois?» Ellos respondieron «somos dos amigos. ¿Tú quién eres?» La cometa respondió «soy la cometa Datsima y no sé lo que es la amistad. Tal vez sea por eso por lo que no puedo volar». Quique le responde «la amistad no se aprende, se siente. Si quieres aprender a volar, siente».



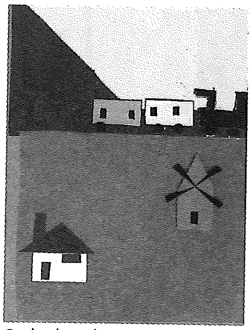
Salieron los tres juntos al jardín y Datsima pudo volar y desde entonces no se llama Datsima sino AMISTAD, que es Datsima al revés.

Cuento 1

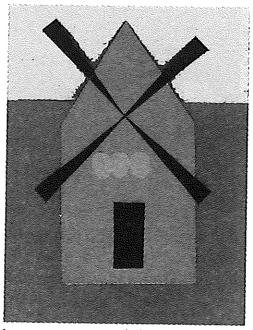
Título: Sueños
Autores: Aixa Noda Ramos, Rocío Serrano Bernal, Pedro Castro Rodríguez, María Navarro Segura y Verónica Rodríguez Rodríguez
Curso: Tercero de la especialidad de Educación Física



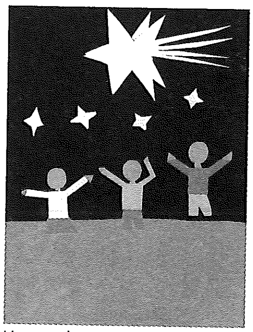
Érase una vez una granja muy especial, en un pueblecito que no recordamos su nombre. En ella había todo tipo de animales: conejos, perros, pollitos, etc., y estaba rodeada de flores de muchos colores y tamaños.



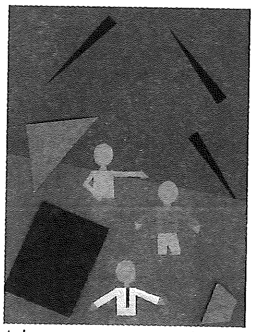
Cada día a la misma hora pasaba un tren de mercancías. Los tres niños que vivían en la granja, Sara, Jaime y David, subían al molino cercano a la granja para ver pasar el tren.



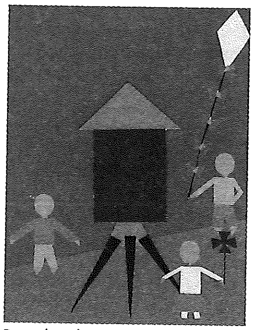
Los tres se quedaban fijamente mirando hasta que desaparecía. Un día, Sara se preguntó en voz alta: ¿Dónde irá el tren? ¿A quién visitará?



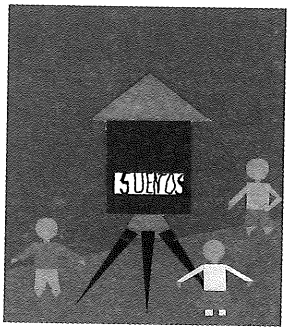
Una noche con muchas estrellas en el cielo, los niños vieron como una de ellas se movía muy rápido. A Jaime se le ocurrió la idea de construir un cohete, para mandar un mensaje a otros niños de otros lugares.



A la mañana siguiente, los tres hermanos se levantaron emocionados y decididos a construir el cohete. Después de desayunar se pusieron manos a la obra.



Pasadas dos semanas de mucho trabajo, el cohete estaba listo. David decide mandar un mensaje en una cometa para que todo el mundo sepa que van a lanzar el cohete, y Sara propone mandar unas flores de la granja.



Cuando el cohete estuvo terminado, lo bautizaron con el mismo nombre que le habían puesto al tren... SUEÑOS

Cuento 2

Educación Infantil y está dirigido a niños de tres a seis años. El cuento recoge, como idea central, la profunda necesidad del pollito de tener en todo momento la seguridad de encontrar a su mamá y la importancia de obedecer los consejos para evitar angustias innecesarias, pero además aparecen las siguientes ideas matemáticas: por una parte, se refleja la noción de clasificación, de construir conjuntos posibles, de evitar que un elemento de un conjunto (el pollito) se encuentre con elementos de otros conjuntos (zorro, rata de campo, cuervo de alas negras...) que no le dan tranquilidad; por otra, aparece en el cuento los números, uno, dos y tres, en un estribillo sencillo de aprender y que facilita la participación del niño en el cuento.

El segundo cuento presentado, de titulo *El número 9 y sus familiares* fue elaborado por dos alumnas y dos alumnos de la especialidad de Educación Primaria y está dirigido a niños y niñas mayores. En el aparecen algunas ideas de la construcción de los números; introducen los números enteros y racionales en una forma amena y asequible para los niños.

Valoración final

Como hemos comentado en alguna parte de este trabajo, uno de los objetivos que nos planteamos al proponer esta actividad en la asignatura ya reseñada, a la que asiste alumnado de titulaciones y especialidades tan diversas, era motivar al estudiante en un campo que les resulta tan árido como la Matemática, permitiéndole fomentar y estimular la creación de textos en los que expresen libremente los propios sentimientos y vivencias, los propios sueños y mundos fantásticos, ya que explorando, la expresión se convierte en una fuente de placer, en una experiencia lúdica y creativa.

En la medida en que se brinde la oportunidad de explorar todas las posibilidades en la creación de los propios textos, y en la medida también en que se asegure que éstos van a ser escuchados por otros (compañeros de clase), los alumnos podrán sentir la expresión como una experiencia gozosa, libre y creativa.

Los cuentos ayudan a desarrollar estos aspectos, ya que alimentan la imaginación. La creatividad aflora en los niños pequeños cuando tienen tiempo y estímulo no solamente para oír cuentos, sino también para inventarlos, contarlos y representarlos, e improvisar los suyos propios.

También han trabajado conceptos geométricos y de proporción al ilustrar el cuento. Han surgido algunos conceptos numéricos ya especificados en los argumentos y en párrafos anteriores.

De esta manera, con esta actividad se trabajaron los siguientes aspectos relacionados con las Matemáticas de Educación Infantil y Educación Primaria:

- *Educación Infantil. Área de comunicación y representación*
  - — Objetivo 1: Expresar sentimientos, deseos e ideas mediante el lenguaje oral, ajustándose progresivamente a los diferentes contextos y situaciones de comunicación habituales y cotidianos y a los diferentes interlocutores.
  - — Objetivo 5: Leer, interpretar y producir imágenes como una forma de comunicación y disfrute, descubriendo e identificando los elementos básicos del lenguaje.
  - — Objetivo 10: Utilizar a un nivel apropiado las posibilidades de la forma de representación matemática, para describir algunos objetos y situaciones del entorno, sus características y propiedades, y algunas acciones que puedan realizarse sobre ellos, prestando atención al proceso y a los resultados obtenidos.
- *Educación Primaria. Área de Matemáticas:*
  - — Objetivo 9: Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de los elementos, propiedades y relaciones entre las mismas para incrementar su comprensión de dicho entorno y desarrollar nuevas posibilidades de acción en el mismo.
  - — Procedimiento 2: Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos previamente establecidos.
  - — Procedimiento 5: Formación de figuras planas a partir de otras por composición y descomposición.

Título: *El Pollito*
Autora: Lola Bustos Montoya
Curso: Tercero de la especialidad de Educación Infantil

Érase una vez un pollito chiquito y muy bonito que todos las tardes salía de paseo al campo con su mamá gallina.

Ella, cariñosa, siempre preguntaba «¿Quién es el pollito de plumas amarillas más bonito de Tenerife?», y él, sonriente, siempre contestaba «¡Soy yo, soy yo!».

Mamá gallina siempre le advertía que debía tener cuidado porque si pasaba los 2 árboles que se encontraban junto al estanque de agua, podía encontrarse con animales muy peligrosos, que podrían hacerle mucho daño.

Un día, mamá gallina no pudo salir a pasear y el pollito, solito, comenzó a andar y a andar hasta que llegó junto el estanque. Allí, recordó todo lo que su mamá le decía «No debes ir más allá de los 2 árboles que hay junto al estanque, porque es muy peligroso».

Sin embargo, el pollito se adentró en el bosque y no hizo caso a su mamá. En el bosque, descubrió árboles de distintos tamaños: altos, medianos y bajos que movían sus hojas con el viento. De repente, se oyó un ruido de pisadas y apareció un zorro con la cara hambrienta que le dijo: «Cerraré los ojos, contaré hasta 3 y si sigues ahí cuando los abra, te comeré. 1-2-3».

El pollito asustado echó a correr antes de que terminara de contar. Siguió caminando y de pronto, apareció olfateando una rata de campo con la cara enfadada que le dijo: «Cerraré los ojos, contaré hasta 3 y si sigues ahí cuando los abra, te comeré. 1-2-3».

El pollito asustado echó a correr antes de que terminara de contar. Ya cansado, el pollito siguió caminando y buscando los 2 árboles que había junto al estanque para volver a casa. Pero desde lo alto de unas ramas, apareció un cuervo de alas negras moviendo el pico que le dijo: «Cerraré los ojos, contaré hasta 3 y si sigues ahí cuando los abra, te comeré. 1-2-3».

El pollito asustado echó a correr antes de que terminara de contar. Después de caminar durante un rato vio los 2 árboles del estanque y fue corriendo hacia ellos para salir de allí. Junto al estanque estaba mamá gallina que lo esperaba muy preocupada, pero cuando lo vio llegar, lo abrazó con mucho cariño y también algo de enfado porque no le había obedecido; sin embargo, estaba tan contenta que sólo le dijo: «Ya no eres un pollito chiquito, pero todavía necesitas estar al lado de mamá». Y a partir de este momento, el pollito se despide de este cuento.

Cuento 3

Muchos han sido los comentarios favorables del alumnado con relación a esta actividad, a pesar del esfuerzo y el tiempo que se ha invertido. Con una de las reflexiones de los alumnos, queremos terminar este artículo con el deseo

Título: El número nueve y sus familiares
Autores: Adriana Dorta Rosano, María José Díaz Barbusano, F. Miguel Estévez García y Eusebio Suárez Padrón
Curso: Tercero de la especialidad de Educación Primaria.

En el país de los Números Naturales, había muchos ciudadanos, pero todos tenían algo en común: sólo podían relacionarse sumándose y multiplicándose entre ellos para que su país siguiera prosperando. No podían relacionarse de otra forma, restándose o dividiéndose, porque si no, serían ciudadanos de otros países.

Todos ellos eran muy positivos y siempre estaban alegres, a excepción de uno de ellos que era el 9. El 9 estaba preocupado ya que decía que todos los niños (todos los números naturales de una cifra) le podían quitar a él algo, pero que él no podía quitarle nada a los demás. Si el 1 le quitaba al 9, le daba el ciudadano 8. Sin embargo si el 9 le robaba al 1 le daba un ciudadano de otro país.

Un día se levantó y su tristeza era tan grande que su madre, la señora 45, le dijo que existían otros países donde él si podía quitarle algo a otros niños. Entonces el 9 se decidió a hacer un viaje para visitar y conocer esos otros lugares.

Tras caminar y caminar atravesando bosques de grandes figuras geométricas, donde se encontraban flores muy bonitas como triángulos, cuadrados, círculos..., llegó al país de los Números Enteros.

En este país los ciudadanos se dividían en dos grupos: los que eran positivos, muy parecidos a los del país del número 9, que eran los gobernantes y por eso no trabajaban mucho, y los que eran negativos, que constituían la clase obrera y siempre llevaban la caja de herramientas.

Los ciudadanos de este país se relacionaban sumándose, restándose y multiplicándose, pero no se podían dividir, ya que si lo hacían tendrían que irse a otro país porque no estaba permitido (los racionales eran los únicos que podían dividirse).

El número 9 en este país se puso muy contento porque podía quitarle a otros niños. De esta forma conoció a sus tíos lejanos, que eran la pareja formada por el 20 y el 11. Ellos tenían otro hijo que era también el número 9.

Sus tíos le dijeron que si aquí estaba sorprendido, caminando por unas laderas donde había unos seres muy raros, los llamados decimales (que se caracterizaban porque siempre llevaban a sus hijos con ellos, y algunos de éstos llevaban gorros), en otro país, el de los racionales, sus ciudadanos se relacionaban de muchas más formas.

Así el 9 se echó a andar por esas laderas y llegó al país racional. Al llegar allí se sorprendió, porque esos ciudadanos se caracterizaban porque eran ecológicos y para no gastar mucho combustible transportaban a sus compañeros encima de ellos en una especie de tabla. En este país sus habitantes se relacionaban sumándose, restándose, multiplicándose y dividiéndose.

En este país encontró a unos familiares suyos, que eran la pareja del 90 y el 10. Con ellos estuvo hablando y les dijo que su familia estaba muy bien.

Después de aquí el 9 volvió a atravesar las laderas de los decimales y el bosque de las figuras geométricas y llegó a su país. Aquí su madre lo recibió con los brazos abiertos y el empezó a contarle lo que había visto y que se encontró con algunos familiares suyos, pero si quieres saber más de él y de sus mundos, espérate a los cursos siguientes. FIN

Cuento 4

de que los lectores disfruten y se emocionen tanto como lo hemos hecho las profesoras.

Elaborar un cuento literario para niños puede ser una de las cosas más fáciles que un profesor puede hacer, no obstante cuando el cuento pasa a ser matemático, no cabe duda que nos proporciona ante todo una gran extrañeza.

¿Un cuento de Matemáticas? Esa misma pregunta me la hice yo, cuando la profesora nos dijo que teníamos que hacer uno. La verdad es que no le encontraba mucho sentido, ya que sólo había oído hablar de cuentos literarios, populares, etc., que son con los que la gran mayoría de nosotros nos hemos ilusionado, llorado, reído y sobre todo hemos crecido con ellos y aspiramos a contárselos a nuestros hijos. ¿Quién no recuerda cuentos como *Caperucita*, *Los Tres Cerditos*, *Pulgarcito*, etc., en definitiva, nuestros cuentos de siempre salpicados por las nuevas generaciones de cuentos escritos para niños? Esto es lo que yo entendía como cuentos, cualquier cosa fuera de ahí me parecía imposible el encajarlo dentro de mis esquemas primitivos. Por eso no tuve más remedio que poner cara de extrañeza al tener que elaborar un cuento matemático.

¿Cómo es posible hacerlos?, me pregunté esperando que la profesora respondiera a mi duda lo antes posible. Por suerte lo hizo. Nos enseñó a hacer figuras y paisajes con la ayuda de una simple hoja de papel doblada y unas tijeras, es la llamada papiroflexia. Lo de hacer figuras de papel no me era extraño, sabía confeccionar pajaritas de papel, barcos, molinillos de viento e incluso, para gastar bromas, los famosos muñequitos de papel con los que más de un familiar pilló algunas broncas conmigo, afortunadamente sin pasar a mayores.

Por lo tanto me sorprendió que de aquellos juegos a los que no les veía ninguna utilidad más que la de «pasar el rato», pudieran convertirse de pronto en seres con vida propia en un relato fantástico del cual yo podía ser autor, y lo más importante, que otras personas, en este caso niños, pudieran disfrutar de estas historias.

La idea empezaba a gustarme, y en mi cabeza empezaron a surgir ideas sobre cómo elaborar un cuento con estos personajes. La verdad es que algunas de ellas las deseché rápidamente, pero me quedé con otras que me parecían bastante buenas, o al menos las veía de esa forma.

Pronto decidimos formar un grupo para elaborar nuestra futura obra. La historia estaba a punto de nacer. Así, tras varias reuniones, decidimos hacer un cuento puramente matemático. Nuestro protagonista era el número nueve, que decide hacer un pequeño viaje para conocer otras familias de números, así conoce a los racionales, los enteros, etc., y al volver a su país cuenta las experiencias vividas. Ya teníamos historia, ahora venía la parte más laboriosa y una de las más entretenidas y bonitas de todo el cuento, la confección con nuestras propias manos de los personajes y paisajes.

Fueron varios días de trabajo, pero lo cierto es que es uno de los momentos más bonitos de todos, ver como de un simple papel toman forma personajes, objetos, paisajes, y como nace algo más importante que todo lo anterior, la ilusión y la risa vistos a través de los ojos de un niño, lo máximo a lo que puede aspirar un profesor aparte de inculcar a sus alumnos el ánimo por aprender.

Con este tipo de cuentos se logra que el niño disfrute aprendiendo, que no sea un camino tortuoso el aprender una determinada asignatura, que la viva como algo suyo, que la sienta, que la disfrute, y sobre todo que la valore en su justa medida. Quedará claro que las Matemáticas son algo más que aprenderse las tablas de multiplicar, las áreas y volúmenes de determinadas figuras o tantos y tantos problemas que «torturan» a los niños. ¿Por qué les ocurre esto? Seguramente porque nadie les ha enseñado a amar las Matemáticas, a vivirlas de un modo diferente, a enseñarles que son necesarias para poder vivir diariamente, no sólo con cuestiones monetarias, sino hacerles ver que todo lo que les rodea es Matemáticas, el coche, la casa, el ordenador, la tele, todo..., cualquier cosa que nos rodee está basado en esta ciencia. A lo mejor no todos somos capaces de lograr esto, pero vale la pena intentarlo. Vale la pena decir: mi profesión sirvió para que varios niños que odiaban las Matemáticas aprendieran a quererlas y respetarlas incluso mucho más que lo que lo hice yo. Si somos capaces de conseguir eso, habremos llegado al verdadero significado de la palabra Magisterio, una palabra que no sólo significa enseñar, sino también preparar o guiar para llegar a un logro, a una meta, a ese final que todos deseamos y que no es otro que inculcar amor hacia las Matemáticas y demás ciencias. Esto no es sólo aplicable a los niños, sino a cualquier persona que se sienta con las fuerzas suficientes para embarcarse en esta aventura, y yo, estoy preparado para esperar a los primeros viajeros. Ahora es sólo cuestión de tiempo, y... ¡que cosas!, el tiempo también se basa en las Matemáticas.

Eusebio Suárez Padrón
Tercero de la especialidad de Educación Primaria

María Aurelia Noda
Inés del Carmen Plasencia
Departamento de Análisis Matemático
Área de Didáctica de las Matemáticas.
Universidad de La Laguna.
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Bibliografía

LUGO CANALETA A. (1989): *Primeros recortados*, Hogar del libro, Barcelona.

MARÍN RODRÍGUEZ, M. (1999): «El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos», *Números*, n.° 39, 27-38.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Infantil*, Madrid.

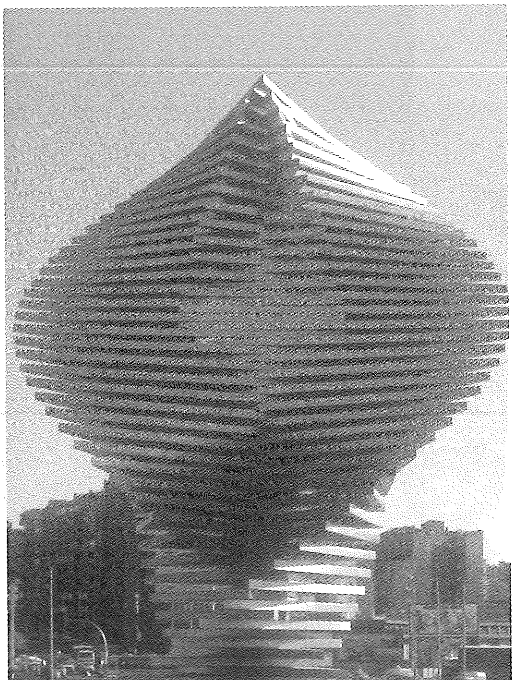
MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Primaria*, Madrid.

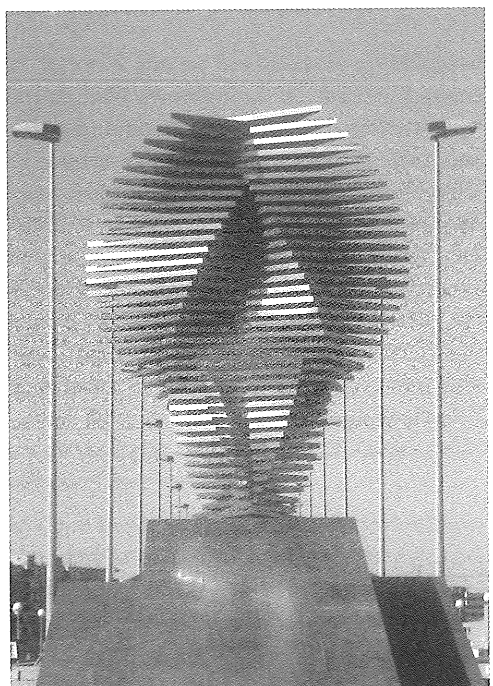
PLASENCIA CRUZ, I., y E. RODRÍGUEZ ABAD (1999): «En el país de la Reina Equilátera: Una experiencia interdisciplinar en la Escuela de Magisterio», *Números*, n.° 37, 29-36.

RODARI, G. (1985): «Gramática de la fantasía. Introducción al arte de inventar historias», *Hogar del libro*, Barcelona.

ROLDÁN CASTRO, I. (1999): «Teatro y Matemáticas», *Números*, n.° 39, 21-26.

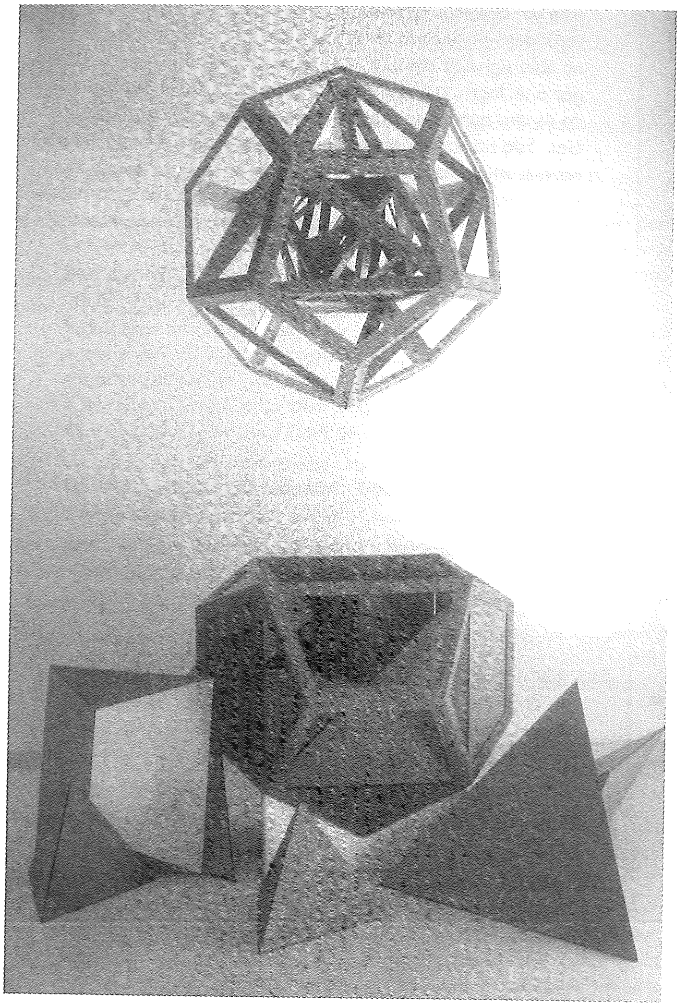
VAN-HIELE, P. M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Academic Press. Londres.

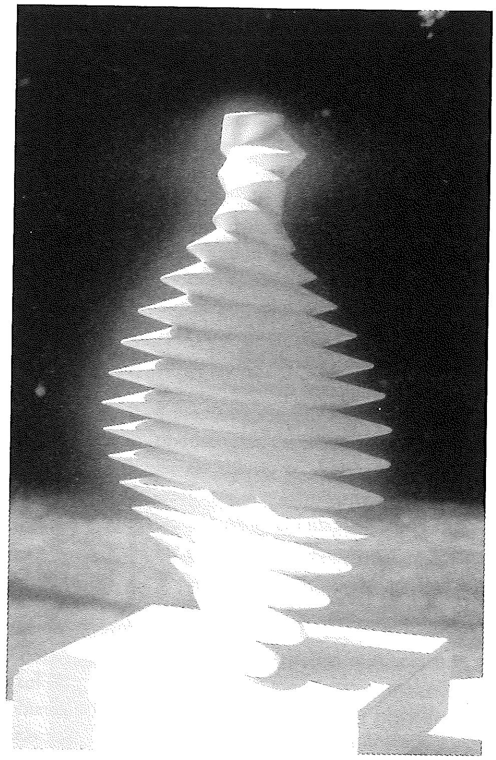


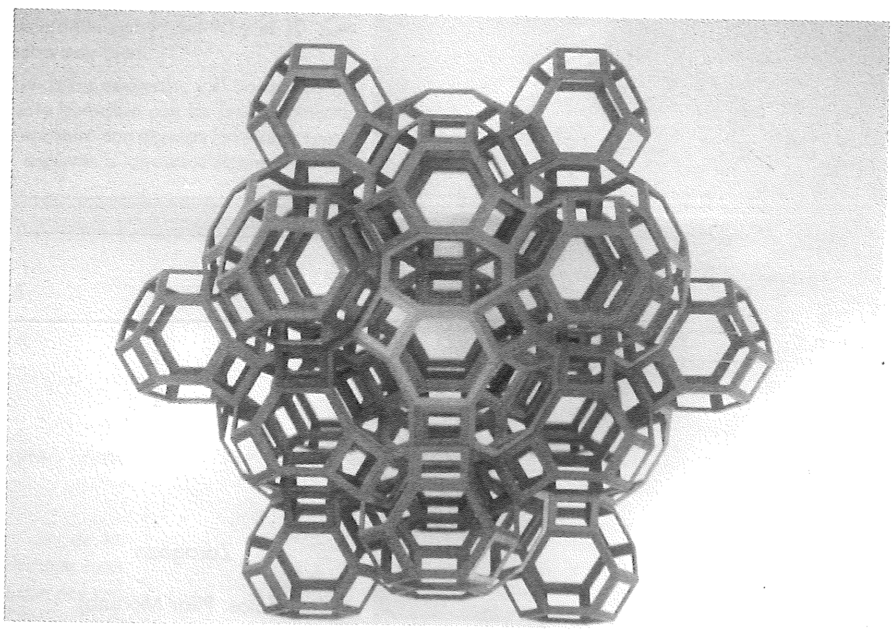


Zaragoza

(Fotos: Pilar Moreno)







Javier Carvajal

(Fotos: Pilar Moreno)

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 103-112

Una visita a Planilandia

Juan Núñez Valdés
Manuel Ponce Escudero

La configuración hace al hombre

(Pantociclo, Círculo jefe de Planilandia, que sofocó la sedición cromática)

«¿Era simétrica la realidad o la simetría era un ideal provocado por la inteligencia del hombre? ¿Acaso todo lo que se podía dividir por la mitad daba lugar a dos partes armónicas y similares? ¿Dónde está la mitad de mi vida?», se dijo observando a su hija que atendía a los familiares y amigos con una cortesía dolorosa. «¿Deja mi madre un espacio simétrico al que ahora ocupa? ¿Dejan los muertos un reflejo de sí en este mundo de dolor? ¿Qué sensación es simétrica al dolor?»

(Juan José Millás: *La soledad era esto*)

MISCELÁNEA

Los autores muestran en este artículo sus impresiones y reflexiones personales sobre Planilandia, el mundo de dos dimensiones que refleja E. A. Abbott en su novela del mismo título.
Tras comentar cómo es la vida en ese mundo y cómo vería un habitante del mismo la vida en otros de menos y de más dimensiones, respectivamente, que el suyo, aportan sus propias opiniones sobre la naturaleza del mundo en que vivimos y establecen puntos de comparación entre el argumento de esta novela y el de otras también encuadradas en esta temática.

Introducción histórica y objetivos

Querido amigo lector: si aún no has tenido la oportunidad de leer el libro titulado *Planilandia*, de Abbott, y como consecuencia de este artículo te decides a hacerlo, te aseguramos que nuestra satisfacción será doble: por una parte, habremos conseguido, modestamente, que te sumes al (¿pequeño aún?) círculo de lectores interesados en este tipo de lectura. Por otra, nos sentiremos también muy contentos al pensar que seguramente, tú mismo te plantearás cuestiones similares a las que nosotros nos hacemos en este artículo, que contribuirán a un mejor conocimiento (y por qué no decir mejor «reconocimiento», en el sentido de constatar, no en el de volver a conocer) de la Geometría como Ciencia y de sus aplicaciones al mundo (¿seguro que tridimensional?) en el que vivimos.

Es ya conocido que desde el principio de los tiempos la humanidad consideraba que el mundo era bidimensional y que estaba formado por las dos dimensiones en que podía caminarse. La dirección arriba-abajo parecía ser totalmente distinta. Newton, en la segunda mitad del siglo XVII, fue el primero en descubrir que esta última dirección era también simétrica a las dos primeras, dotando a la

Naturaleza de simetría tridimensional. Einstein, a principios del siglo pasado, dio un paso más allá con su *teoría de la relatividad especial* abriendo la puerta de la cuarta dimensión a la humanidad. Introdujo el tiempo como cuarta dimensión, mostrando que éste muestra muchas simetrías con las otras tres dimensiones espaciales, aunque no llegue a la semejanza.

Pero la cosa no ha quedado aquí. Los físicos, en su afán por unificar las cuatro fuerzas fundamentales que rigen la Naturaleza (fuerzas gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte e interacción débil), han desarrollado la teoría de supercuerdas diezdimensional que da una explicación del origen del Big Bang: en un principio el Universo era perfectamente diezdimensional con nada en él, pero no era estable y se partió en dos; seis de sus dimensiones se enrollaron en una bola infinitesimal mientras que las otras cuatro se expandían a niveles inmensos.

Cuando la novela que nos ocupa fue escrita en 1884, sólo eran conocidas las teorías de Newton. El autor de la misma, un inglés llamado Edwin Abbott Abbott, nació en Londres el 20 de diciembre de 1838 y murió en 1926. De niño acudió a la «City of London School» y más tarde prosiguió sus estudios en Cambridge. Fue ordenado sacerdote, se casó y a la edad de 27 años volvió como presidente a la escuela londinense donde había estudiado. Esta etapa de su vida transcurrió en el momento de mayor esplendor de toda la historia de Gran Bretaña, el periodo que transcurre entre 1850 y la Gran Depresión de 1873. La supremacía inglesa tanto a escala económica como militar era manifiesta. En 1866, el economista Jevons escribía (Cortés, 1994: 28):

> Actualmente las cinco partes del mundo son nuestras tributarias [...] Las llanuras de América del Norte y de Rusia, he aquí nuestros campos de trigo; Chicago y Odessa son nuestros graneros; Canadá y los Países Bálticos nuestros bosques. Nuestras ovejas están en Australia, nuestras vacas, en América del Sur. Perú nos envía su plata; California y Australia su oro. Los chinos cultivan té para nosotros y, de las Indias Orientales y Occidentales, nos llega nuestro café, nuestro azúcar, nuestras especias. Nuestro algodón, que antes traíamos de Estados Unidos, nos llega ahora de todas las regiones cálidas del mundo.

En el ámbito social, este periodo se caracteriza por el espectacular crecimiento de la clase media. Se hicieron también una serie de reformas políticas ampliando el censo electoral a la clase media y a la clase superior obrera. La moral victoriana surge de la religión metodista, el sentimiento obsesivo del pecado, de la lucha por la salvación y de la presencia de la tentación llevan la mentalidad social al puritanismo más estrecho. No obstante, no todos los ingleses pensaron de este modo. Muchos, como Oscar Wilde, Bernard Shaw y otros, fueron grandes críticos de la mediocridad y estrechez de la sociedad en que vivieron. Dentro de este grupo también puede incluirse al propio Abbott, pues como veremos más adelante su novela es una dura crítica a la sociedad del momento, revelándose sobre todo como una extraordinaria sátira del conformismo y de la intolerancia cultural.

Abbott, un simple aficionado a la Matemática, recurrió a la analogía con la tercera dimensión para que el lector meditase sobre la cuarta dimensión.

Edwin A. Abbott dedicó toda su vida a la enseñanza, forjándose una buena reputación como maestro de escuela y como estudioso de Shakespeare. A lo largo de su vida escribió varios libros de filosofía, literatura y teología; pero una de sus obras destacó entre todas las demás pues no guardaba relación ninguna con el resto de su producción literaria. Esta novela fue *Planilandia.* Fue tan distinta que ni siquiera el propio autor se atrevió a firmarla con su nombre (quizás por miedo a arruinar la reputación del resto de sus obras) haciéndolo bajo el seudónimo de A. Square. En realidad no tenía nada de qué avergonzarse, pues fue un pionero en la literatura de ciencia-ficción, siendo uno de los primeros que especuló con la cuarta dimensión mucho antes de que se pusiese de moda. En esa época, los mundos de más de tres dimensiones eran coto reservado para los matemáticos y algunos físicos. Abbott, un simple aficionado a la Matemática, recurrió a la analogía con la tercera dimensión para que el lector meditase sobre la cuarta dimensión. Aunque desde que escribió la novela ha pasado más de un siglo cargado de avances científicos relacionados con las dimensiones del mundo, ésta mantiene al lector actual tan fascinado como al lector contemporáneo de Abbott. Esto precisamente es lo que hace que *Planilandia* sea un verdadero clásico de la ciencia-ficción (como así ha sido considerada, aunque ¿se puede encuadrar en ese tema con rotundidad?).

Para articular nuestro trabajo hemos creído oportuno estructurarlo en cinco secciones. En la primera de ellas hacemos un muy breve resumen de la primera parte de la novela, en la que se narra cómo transcurre la vida en Planilandia, cómo son sus habitantes, cómo se relacionan entre sí, y en definitiva, cómo viven.

En la segunda sección también resumimos cómo el protagonista de la novela,

A. Square realiza diferentes viajes a mundos de menos y de más dimensiones, respectivamente, que las dos en las que él normalmente se desenvuelve. Cómo reacciona, frente a algunas situaciones que ve, tan distintas a las que está habituado, admirándose en algunos casos y mostrándose despreciativo, en otros.

En la tercera sección, hacemos nuestras propias reflexiones y aportaciones al tema de la *dimensionalidad* del mundo en el que nos movemos, quedando implícita en la misma nuestro principal *objetivo* de este artículo (aunque mejor sería llamarlo *deseo*), que no es más que dar a conocer al lector el contenido de la novela de Abbott, facilitándole así, de esta forma, la posibilidad de poder pensar y reflexionar personalmente sobre el tema y de extraer sus propias deducciones obre el papel de la Geometría en nuestro mundo habitual.

Dedicamos la cuarta sección a hacer unos breves comentarios sobre otros libros de similar temática y contenidos que el que nos ocupa, finalizando este artículo con una quinta sección, en la que se indican algunas curiosidades y anécdotas relativas a este tema, que surgen al relacionarlo con algunos otros, que en principio nada tienen que ver, como puede ser, por ejemplo, el fenómeno OVNI.

La vida en Planilandia

La novela está escrita en primera persona, siendo su narrador y protagonista un cuadrado, afamado matemático de Planilandia, llamado A. Square (juego de palabras en inglés con las iniciales). Su autor la escribió, como bien dice, para «contribuir al ensanche de la imaginación y al posible desarrollo del rarísimo y excelente don de la modestia entre las razas superiores de la humanidad sólida» (Abbott, 1999: 17). Para ello estructura la trama en dos partes bien diferenciadas:

a) En la primera el autor nos introduce poco a poco en el fascinante mundo de Planilandia, contándonos cómo son su clima, sus habitantes, parte de su historia...

b) En la segunda cuenta una serie de experiencias que le ocurren al protagonista y gracias a las cuales visita extraños mundos de distintas dimensiones.

La novela está escrita en primera persona, siendo su narrador y protagonista un cuadrado, afamado matemático de Planilandia, llamado A. Square.

«Sé paciente, pues el mundo es ancho y extenso» (Abbott, 1999: 19). Con esta frase comienza esta primera parte de la novela el autor, y lo hace con un doble motivo: primero, porque así resalta la idea de que estamos en un mundo con sólo dos dimensiones, ancho y extenso. Segundo, porque no escatima detalles a la hora de describirnos el fascinante mundo en que habita el protagonista de la novela, empleando en ello algo más de la mitad del libro.

El mundo de Planilandia es descrito como

> ...una vasta hoja de papel en la que las líneas rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y otras figuras, en vez de permanecer fijas en sus lugares, se moviesen libremente, en o sobre la superficie. (Abbott, 1999: 21).

Nos habla el protagonista de la existencia de cuatro puntos cardinales determinados por una extraña «atracción constante hacia el sur» (Abbott, 1999: 23); de la lluvia, que consecuentemente cae siempre hacia el sur y de una luz cuyo origen es desconocido y que ilumina por igual todos los puntos de ese mundo, tanto de día como de noche. También explica que las casas son pentagonales para que los ángulos de las esquinas no hieran a peatones incautos. Sin embargo, no explica cómo se propulsan los habitantes, cómo construyen sus casas, cómo son los árboles, minas y colinas de Planilandia, y un sinfín de cosas más.

A pesar de toda la riqueza visual que nos sugiere esta descripción de su mundo, para un habitante de Planilandia su visión se reduce a un simple conjunto de segmentos de mayor o menor intensidad luminosa. Para comprender por qué, basta hacer la prueba de colocar un objeto plano sobre una mesa y descender hasta situar nuestros ojos al nivel de la mesa, entonces el objeto no será más que una línea recta. Además, a esto hay que sumarle que no existe el color, todo en este mundo bidimensional ha sido siempre gris. ¿Cómo es posible entonces que los propios habitantes se reconozcan entre sí? La respuesta la veremos más adelante, antes veamos cómo es la sociedad del mundo del protagonista.

Aunque como confiesa su narrador, el fin principal de este relato es hablar sobre su «iniciación a los misterios del espacio» (Abbott, 1999: 62), Abbott no desaprovecha la oportunidad de idear una estructura social para el mundo del protagonista. Es una sociedad piramidal donde la clase social a la que pertenece un habitante está determinada por el número de lados que éste posee. Así, mientras mayor es el número de lados que tiene, más elevada es su posición social. Las distintas clases en que se distribuyen son:

1. *Mujeres*: Las mujeres son líneas rectas. «La mujer siempre será mujer» (Abbott, 1999: 35) es lo que dice un decreto de la Naturaleza en Planilandia. La sociedad alcanza unas cotas machistas tan altas que incluso en su tiempo fueron motivo de crítica para el autor. Las mujeres son consideradas en el libro como los seres más inferiores de la creación, pues existe la creencia generalizada de que el área de una figura es directamente proporcional a su cerebro, por tanto la inteligencia de las mujeres, al igual que su área, es nula. Además, debido a su peligrosa morfología («¿Qué puede significar tropezar con una mujer, salvo destrucción absoluta e inmediata?» (Abbott, 1999: 30)) son sometidas a unas leyes especiales y muy estrictas siendo algunas confinadas en sus hogares de por vida.

   A pesar de todo este trato hacia las mujeres, A. Square deja entrever en algunas partes del relato que las mujeres son quizás las únicas en el mundo que tengan la fuerza suficiente como para cambiar un orden social que continúa imperturbable desde los lejanos tiempos de la sedición cromática, más de dos milenios.
2. *Isósceles*: Son la clase más numerosa con mucha diferencia y forman los estratos sociales más bajos. Suelen trabajar como soldados (pues los agudos ángulos son unas armas letales) o como obreros.
3. *Equiláteros*: Trabajan como comerciantes y se corresponden con la clase media
4. *Cuadrados* y *pentágonos*: Forman la clase media/alta. Son los profesionales especializados (médicos, abogados, estadistas...) y los «gentlemen».
5. *Polígonos*: Los polígonos constituyen la nobleza planilandesa, por lo que no tienen ninguna ocupación conocida.
6. *Círculos*: Son la llamada casta sacerdotal, la clase más alta de todas. Gobiernan por completo Planilandia, siendo a la vez tanto guías políticos como espirituales. En realidad no son verdaderos círculos, pues «ningún círculo es en realidad un círculo, sino sólo un polígono con un número muy grande de lados muy pequeños» (Abbott, 1999: 63). Uno de ellos, el denominado círculo jefe, es el elegido para gobernar Planilandia.

La religión que predican los círculos se basa en la perfecta regularidad de la configuración geométrica y puede resumirse en una sola frase: «Atiende a tu configuración» (Abbott, 1999: 65). Pantociclo, que fue un antiguo círculo jefe, fue el primero en convencer a la humanidad de que la naturaleza de cada individuo viene determinada por su configuración, es decir, si un habitante nace con una pequeña irregularidad en sus lados le irá mal en la vida con toda seguridad. Atribuyó todos los delitos cometidos a irregularidades en la estructura del delincuente. A causa de esto en cuanto una mujer alumbra a un hijo irregular éste es llevado al hospital para irregulares, donde intentan corregir su desviación. Si esto no es posible, o bien el infeliz es emparedado de por vida en una oficina como funcionario de séptima clase y con un salario mínimo, o bien acaba pasando por el ángulo del verdugo oficial (es difícil saber cuál de las dos penas es peor). Toda esta «filosofía de la configuración» está aceptada por la amplia mayoría de los habitantes de Planilandia. Ello queda claro cuando el protagonista confiesa que

> «Irregularidad de figura» viene a significar, más o menos, entre nosotros lo que una combinación entre perversidad moral y delincuencia entre vosotros y recibe un tratamiento correspondiente. (Abbott, 1999: 48).

La religión que predican los círculos se basa en la perfecta regularidad de la configuración geométrica y puede resumirse en una sola frase: «Atiende a tu configuración».

Cada sujeto se encarga de representar el rol social que le corresponde de nacimiento y se preocupa de que su descendencia suba un paso más en la escala social. Esto lo consiguen gracias a que por una ley de la Naturaleza, la descendencia masculina siempre tiene un lado más que el progenitor, aunque hay dos excepciones a esta regla. La primera son los isósceles, sus hijos no tienen un lado más, sino que es el ángulo agudo el que aumenta medio grado cada generación hasta convertirse en un equilátero. La segunda es que el aumento de lados (o de ángulo) de la descendencia no es siempre de uno. Entre las clases superiores cada generación tiene varios lados más que la anterior, mientras que entre los isósceles es muy difícil que la prole experimente un aumento de ángulo. Esto sólo se consigue tras una serie de uniones preparadas por los sacerdotes entre los «miembros más intelectuales de las clases más bajas» (Abbott, 1999: 27).

Aunque parezca mentira son las Matemáticas las que mantienen esta organización social. En un mundo tan «geométrico» es necesario estar constantemente resolviendo problemas matemáticos, tanto como para distinguir si el individuo que se acerca a ti es un isósceles o un pentágono, como para acudir a una fiesta de polígonos y poder danzar en medio de la multitud sin tropezar con nadie. No resulta difícil imaginar lo turbadora que sería la experiencia de sumergirnos en medio de una multitud caótica de polígonos, de los cuales sólo podemos distinguir líneas más o menos sombreadas. Sin embargo, no todos los planilandeses están preparados para esto. Las clases inferiores, para reconocerse, usan el tacto para identificar a los demás habitantes, mientras que las clases superiores lo hacen por medio de la vista. Para ello han de pasar muchos años de su vida dedicados al estudio de la geometría en las universidades. Éste es el verdadero poder de las clases superiores, pues los trabajadores no pueden permitirse este tipo de estudios para sus hijos, por lo que los aristócratas siempre estarán un paso por delante de ellos, puesto que los que han recibido una sólida formación matemática «saben todo lo que hay que saber de tus movimientos, mientras que tu sabes muy poco o nada de los suyos « (Abbott, 1999: 44).

Sólo hubo un momento en la historia en que casi se alcanzó la igualdad entre las distintas castas geométricas: fue el tiempo de la sedición cromática. Todo empezó cuando un día un ciudadano descubrió el color y decidió colorearse a sí mismo. El resultado fue tan espectacular en un mundo en el que la vida «estética y artísticamente, es muy aburrida, la verdad» (Abbott, 1999: 50) que la moda se extendió rápidamente a lo ancho y largo del mundo. Gracias al color, todos los habitantes pudieron resolver los numerosos problemas que se les presentaban, por muy difíciles que fuesen. Se abandonaron pues los estudios de reconocimiento visual, y pronto empezaron a pedir que se igualasen todos los grupos sociales ante la ley. Sólo los círculos permanecieron ajenos al color, negándose en rotundo a pintar su perímetro. Fueron ellos los únicos que plantaron cara a la revolución debido a las grandes desventajas que tendrían si ésta triunfaba totalmente.

Cuando apareció el proyecto de la Ley Cromática Universal, que obligaba a todos los habitantes sin excepción a colorear sus lados, se desencadenaron multitud de batallas entre las clases bajas y la nobleza. Por razones de configuración geométrica evidentes, las tropas de los isósceles no tuvieron muchos problemas en deshacerse de ejércitos enteros de polígonos. Inesperadamente, el entonces círculo jefe de Planilandia, Pantociclo, convocó a todos los habitantes a una reunión sin precedentes. Allí, por medio de la palabra engañó y traicionó a un ejército de 140.000 isósceles que fueron masacrados. Desde entonces no existe el color y ni siquiera está permitido pronunciar palabra alguna que denote color. Desde entonces, la vida en Planilandia vuelve a ser gris, y el orden social ha permanecido inmutable.

En la segunda parte de la novela, A. Square realiza diferentes viajes a mundos de más y de menos dimensiones que el suyo.

Una visita a otros mundos

En la segunda parte de la novela, A. Square realiza diferentes viajes a mundos de más y de menos dimensiones que el suyo. Pasamos a describir, también brevemente, sus impresiones al respecto.

Viaje a Linealandia

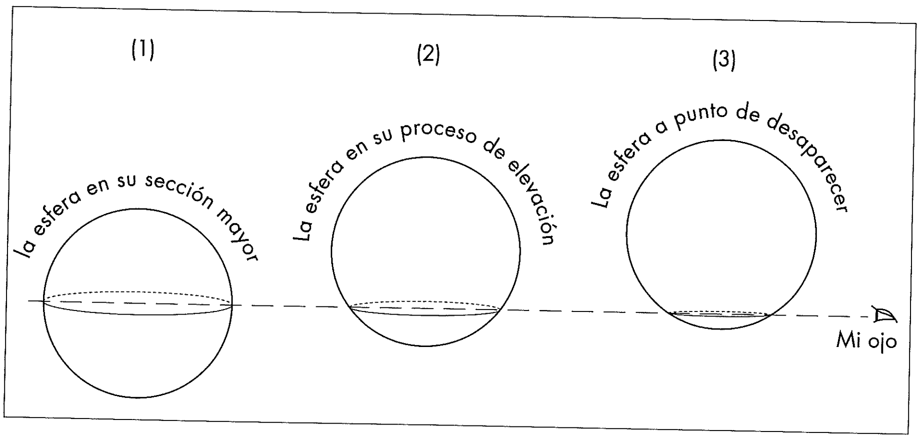
En el ocaso del segundo milenio de su era, dos días antes de que acabase el año, el protagonista de la historia tiene un extraño sueño. En este sueño el cuadrado se ve transportado a un mundo distante que posee sólo una dimensión poblado por líneas, que son los hombres, y por puntos, las mujeres. El cuadrado decide introducir su ojo-boca en este mundo y hablar con la primera «persona» que ve. Esta persona resulta ser el rey, quien le cuenta cómo es la vida en Linealandia, cómo se reproducen sin necesidad de contacto y cómo se comunican entre ellos por medio de la voz (gracias a la cual pueden saber el sexo, tamaño y edad del individuo).

Después de escuchar las enseñanzas del rey, el cuadrado comenta al monarca que la vida en Linealandia debe ser muy aburrida, pues su visión se limita a un punto. Entonces, le explica que él viene de Planilandia, que es el «mundo verdadero» e intenta enseñarle cómo salir de la linea recta en que está confinado moviéndose de izquierda a derecha para entrar en el plano. Pronto encuentra lo difícil que es explicarle cómo moverse hacia el lado a alguien que no tiene consciencia alguna de que exista esa dirección. Tras pasar un largo rato intentando explicar al rey cómo salir de la línea (es evidente que el rey no lo comprende porque va totalmente en contra de su intuición) el cuadrado decide pasar a los hechos y sale poco a poco de Linealandia. Lo que consigue es asustar todavía más al rey, quien en un principio cree que el cuadrado ha muerto y luego, cuando vuelve a aparecer de la nada lo toma por un espíritu. Esto sienta muy mal al cuadrado que empieza a insultar al rey, éste llama al ataque a todos sus súbditos y en ese momento el cuadrado despierta de su sueño.

Viaje a Espaciolandia

La noche siguiente, cuando sólo quedan unos segundos para que acabe el año 1999 y comience el nuevo milenio, aparece misteriosamente en casa del protagonista un círculo perfecto. Pero incomprensiblemente éste niega ser un círculo, dice ser un ser venido del verdadero espacio, de las tres dimensiones, y se llama a sí mismo esfera. La esfera dice al cuadrado que por su condición de matemático ha sido elegido para predicar en Planilandia el evangelio de las tres dimensiones, y rápidamente pasa a la acción. Empieza así una larga conversación muy similar a la que tuvo en sueños A. Square con el rey de Linealandia, pero como no podía ser de otra manera, los papeles están cambiados. Es ahora el cuadrado el que es reacio a abandonar sus ideas de que el mundo es bidimensional, mientras que la esfera roza la desesperación en el intento de explicar que el verdadero mundo es tridimensional a través de distintos métodos. Primero le explica que existe una tercera dimensión, que no está hacia el norte, sino hacia arriba, hacia fuera de Planilandia. Recurre a la analogía con dimensiones inferiores para intentar explicar la naturaleza de un cubo. Pasa a la acción y sale de Planilandia para convencer al cuadrado. Como sigue sin convencerlo, decide pasar a la acción y empuja al cuadrado hacia fuera de su mundo.

Ahora es la esfera la que se niega en redondo a aceptar la existencia de dimensiones superiores mientras que el cuadrado insiste, razonando por medio de la analogía, en la existencia de dimensiones superiores.



Así ilustra el cuadrado cómo la esfera salió de Planilandia. Lo que él vio en realidad fue cómo el círculo se contraía cada vez más hasta que se redujo a un punto y desapareció

El cuadrado queda maravillado con el espectáculo que contempla. Es capaz de ver «desde afuera» el mundo entero, y su visión no se limita a una línea recta, puede ver el plano. Por primera vez «ve» los ángulos en lugar de deducirlos, «¡Y qué pobre y sombría era la conjetura deducida en comparación con la realidad que estaba contemplando!» (Abbott, 1999: 102). Una vez que ha entrado en el mundo tridimensional, al cuadrado no le queda más remedio que aceptar la evidencia, y pasa a considerar a la esfera como un dios. La esfera empieza a adiestrar al cuadrado en la diferenciación entre figuras sólidas y planas, entre círculos y esferas. Este es el punto álgido de las aventuras del cuadrado, pues en el preciso instante en que el cuadrado es capaz de distinguir completamente las figuras sólidas se produce en él una transformación, ya no es el ser arrogante que consideraba inferior al rey de Linealandia e intentaba explicarle que el mundo real tenía dos dimensiones, ahora es un ser con la mente completamente desinhibida de prejuicios. Su avidez de conocimientos le hace pedir a la esfera que le lleve a la cuarta dimensión, con la idea de que allí podrá contemplar el interior de la esfera (al igual que en el espacio tridimensional, el interior del cuadrado queda al descubierto).

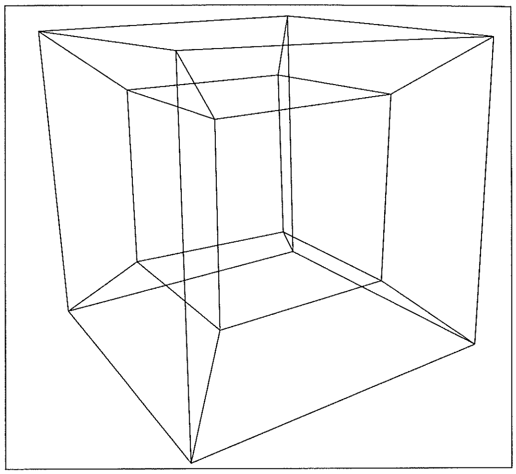
Como no podía ser de otra manera, los papeles se vuelven a intercambiar. Ahora es la esfera la que se niega en redondo a aceptar la existencia de dimensiones superiores mientras que el cuadrado insiste, razonando por medio de la analogía, en la existencia de dimensiones superiores. Cuando la esfera le confiesa que en Espaciolandia algunos habitantes han recibido la visita de seres que decían venir de una cuarta dimensión, aunque la esfera cree que fue producto de la imaginación, el cuadrado ve confirmadas sus teorías y pide con más fuerza a la esfera que lo lleve a dimensiones superiores. En cambio, ésta lo que hace es enfadarse cada vez más, negándose en rotundo a aceptar la veracidad de las palabras del cuadrado, y en un ataque de furia golpea al cuadrado y lo sumerge de nuevo en Planilandia, en «aquel páramo plano e insulso que iba ya a convertirse otra vez en mi universo» (Abbott, 1999: 112).

Viaje a Puntilandia

Tras caer a su mundo, el cuadrado se siente mal y se retira a su aposento a descansar. Allí el sueño le vence y disfruta de otra visión durante el mismo en la cual la esfera se le aparece de nuevo. Junto con ella el cuadrado se dirige hacia un diminuto punto que se divisa en la lejanía, es Puntilandia, el abismo donde no hay dimensiones. La esfera explica magistralmente cómo es este reino:

> Contemplad esa mísera criatura. Ese punto es un ser como nosotros, pero encerrado en el abismo no dimensional. Él mismo es su propio mundo, su propio universo; no puede formarse ninguna concepción de nadie más que de él mismo; no conoce ni la longitud, ni la altura, ni la anchura porque no ha tenido ninguna experiencia de ellas; no tiene conocimiento alguno ni siquiera del número dos; ninguna idea de pluralidad; pues él mismo es su uno y su todo, siendo en realidad su nada. Pero apreciad su absoluta autocomplacencia, y aprended de ello esta lección, que estar satisfecho de sí mismo es ser ruin e ignorante, y que aspirar es mejor que ser ciega e impotentemente feliz (Abbott, 1999: 114).

Cuando se acercan, lo encuentran hablando consigo mismo colmándose de todo tipo de alabanzas. Entonces el cuadrado intenta convencerle de que él es un ser totalmente insignificante, pues en realidad no es nada comparado con una línea recta o con un plano. Pero el punto, incapaz de imaginarse la existencia de otro ser aparte de él mismo, continúa sin inmutarse con su discurso plagado de elogios pensando que la voz ha surgido de su interior. Decepcionado, el cuadrado se aleja con la esfera. Regresan a Planilandia, pero aún le queda tiempo a la esfera para adoctrinar más al cuadrado. Le estimula a «aspirar a más y a enseñar a otros a aspirar a más» (Abbott, 1999: 116) y ambos recorren mentalmente los extrasólidos tetradimesionales y dobles extrasólidos pentadimensionales, todo ello «estrictamente de acuerdo con la analogía» (Abbott, 1999: 116). Cuando despierta de su sueño, el cuadrado se siente con fuerzas renovadas para propagar por toda Planilandia el evangelio de la tercera dimensión.



En un espacio cuatridimensional, moviendo un cubo tridimensional a lo largo de una dirección perpendicular a estas tres dimensiones se obtiene un hipercubo. Éste tiene 16 vértices, 32 lados, 24 caras y está delimitado por 8 cubos.

El desenlace

Y aquí tenemos a nuestro sin par personaje, dispuesto a convencer al resto de planilandeses que el mundo no tiene sólo dos dimensiones, sino que podemos ascender de dimensión en dimensión a nuestro placer, siempre que nuestra mente esté lo suficientemente abierta. ¿Será capaz él sólo, usando como única arma la analogía, de vencer a la estructura social que ha perdurado en Planilandia por más de dos milenios? ¿Acabará de golpe y porrazo con toda la moralidad circular e instaurará el culto a las dimensiones superiores? ¿Verá su nombre coreado por las masas alzándose en el héroe multidimensional que todo matemático ha querido ser, o por el contrario, verá cómo su evangelio es ridiculizado ante la filosofía sacerdotal y acabará sus días frustrado ahogando sus penas en una tasca de Planilandia?

Y aquí tenemos a nuestro sin par personaje, dispuesto a convencer al resto de planilandeses que el mundo no tiene sólo dos dimensiones, sino que podemos ascender de dimensión en dimensión a nuestro placer, siempre que nuestra mente esté lo suficientemente abierta.

Por razones obvias, que esperamos que el lector comprenda, no vamos a desvelar aquí el desenlace de la novela. Reservamos la sorpresa del final para aquél que se acerque a la librería más próxima y una vez adquirido el ejemplar, devore ávidamente todas sus páginas, deleitándose de esta forma con la extravagante narración de la estrella de la novela: A. Square. De seguro que nos lo agradecerá.

Nuestras propias reflexiones

Sin embargo no vamos a resistir la tentación de comentar la agudeza de este relato. La principal razón para la que fue escrito es la de iniciar a los lectores en los misterios de la cuarta dimensión, objetivo que cumple claramente. Gracias a las conversaciones del cuadrado con la esfera, el lector se plantea cómo sería la visita a nuestro mundo de un ser de la cuarta dimensión. Al igual que el cuadrado, veríamos cómo de la nada surge un punto que va aumentando su tamaño cada vez más y que se expandiría y se contraería de forma extraña (pues en realidad veríamos las secciones tridimensionales de este ser). Sería una especie de semi-dios, pues tendría el poder de la omnividencia y sería capaz de entrar sin dificultad en el lugar más profundo y oculto de nuestro mundo (lo cual podría interpretarse como una variante de la omnipresencia). Es por ello que cuando el cuadrado llega a comprender la naturaleza de la esfera lo toma por una divinidad, incluso él mismo llega a decir (Abbott, 1999: 102):

> —Me he hecho como Dios. Pues los sabios de mi país dicen que ver todas las cosas [...] es un atributo exclusivo de Dios.

Dejando a un lado esta parte matemática, que además queda muy clara en el libro, pensamos que éste tiene otras dos características algo más ocultas. La primera es la fabulosa crítica a la sociedad victoriana que subyace en la primera parte de la novela. La segunda es, como ya mencionamos en la introducción, el sarcasmo con el que trata en la segunda parte el conformismo intelectual y la intolerancia entre las distintas culturas.

Para crear toda esta estructura social, Abbott se encargó de exagerar hasta el extremo la sociedad de su momento, añadió algunos ingredientes de su imaginación y obtuvo como resultado final la asombrosa sociedad de Planilandia. Parece incluso que tomó como base para escribir esta primera parte del libro unas palabras con las que Palmerston, primer ministro inglés entre 1855 y 1858, definió la sociedad inglesa (Cortés, 1994: 39):

> Hemos dado el ejemplo de una nación en la cual cada clase de la sociedad acepta gustosamente la suerte que la providencia le ha asignado, mientras que, al mismo tiempo, cada uno en su clase no deja de esforzarse por elevarse en la escala social, no a golpe de injusticias ni de daños, ni por la violencia o la ilegalidad, sino por la buena conducta, sacando provecho con perseverancia y la energía de las facultades morales e intelectuales de la que ha sido dotado por el Creador.

Esa obsesión por la simetría y la regularidad que existe en Planilandia, no es más que el reflejo de la moral victoriana, que parte de la religión metodista, donde el hombre no sólo debe poseer una impecable fe íntima, sino que debe dar constantemente signos externos de la pureza de su fe. Esa necesidad de no sólo ser sino de parecer está presente en la filosofía moral de Planilandia, donde la cuestión se extrema aún más pues aquí parecer equivale a ser; si uno tiene una configuración totalmente simétrica será una buena persona, y si alguien se comporta bien es debido a la perfecta simetría de sus ángulos.

Finalmente, una vez que la esfera y el cuadrado se han librado de sus ataduras dimensionales físicas (sus prejuicios) son capaces de ir a cualquier dimensión sin ningún problema.

La parte más negativa de la sociedad se ve reflejada en el trato que hay hacia los isósceles y hacia las mujeres. Los primeros carecen de derechos civiles si su ángulo es menor de diez grados, al igual que las clases más inferiores estaban totalmente marginadas en Inglaterra, no teniendo ni siquiera derecho al voto. Las mujeres de Planilandia, auténticas esclavas de sus maridos guardan mucha analogía con las de la realidad inglesa donde «la mujer es el «ángel de la casa, toda espiritualidad y obediencia» (Cortés, 1994: 38).

En los diálogos de la segunda parte se puede ver esa crítica al conformismo de la que hablamos. En todas las conversaciones que hay entre seres de dimensiones distintas, uno de los dos se negaba en redondo a renunciar a sus creencias. Les pasa a todos los personajes que aparecen en el libro, desde el punto a la esfera. Con ello Abbott critica la resistencia a aceptar nuevas cosas debido a los prejuicios y nos indica que no debemos tener miedo a abandonar nuestras creencias, que debemos estar siempre abiertos a nuevas ideas. Así, podríamos interpretar que la dimensión de cada ser es proporcional a su tendencia a cambiar sus ideas. El punto, de dimensión nula, es el fiel reflejo del narcisismo pues no puede pensar en nada más que él y no se preocupa de la realidad. El rey de Linealandia escucha momentáneamente las enseñanzas del cuadrado, pero las rechaza inmediatamente e incluso finalmente, le ataca. En cambio, es el cuadrado el primero que acepta la evidencia de que hay dimensiones superiores, pero sólo cuando la esfera lo saca de su mundo. La esfera, aunque al principio niega al cuadrado que existan más de tres dimensiones, tras pensarlo un poco se le aparece en sueños al cuadrado asumiendo su error. Finalmente, una vez que la esfera y el cuadrado se han librado de sus ataduras dimensionales físicas (sus prejuicios) son capaces de ir a cualquier dimensión sin ningún problema. Pero aún y así, el ser de dimensión superior siempre trata al de dimensión inferior despectivamente y con un aire de superioridad como el de quien posee la verdad absoluta. Aquí es donde se ve esa intolerancia cultural de que hablamos y que también estuvo patente en la sociedad inglesa de Abbott.

Otras novelas de parecida temática

Como ya hemos dicho, esta novela es considerada todo un clásico de la ciencia ficción (al menos en el mundo anglosajón, donde incluso fue usada para enseñar geometría en los colegios). Por ello es inevitable que tras Planilandia hayan aparecido muchos libros en los que la trama se desarrolla en un mundo completamente plano.

Uno de los primeros libros de este tipo fue *An episode of Flatland* escrito en 1907 por Charles H. Hinton (Hinton, 1907). El autor introduce un pequeño cambio, en su mundo plano existen planetas (que son discos) y la historia se centra en uno de estos planetas, Astria, donde dos civilizaciones distintas de triángulos luchan entre sí para dominarlo.

Otra novela destacable es *Sphereland: A fantasy about curved spaces and an expanding universe* (Burger, 1968), publicada 80 años después que la novela de Abbott.

En ella se describe una nueva visita al mundo de Planilandia, pero ahora para explicar las modernas teorías de Einstein sobre espacio y tiempo. El autor de la introducción de una de las ediciones de esta novela, Thomas Banchoff, es un matemático que ha estudiado con profundidad la vida de Abbott y planea hacer una biografía de éste llamada «The man who wrote Flatland". Se puede encontrar más información sobre este proyecto en

http://www.stg.brown.edu/projects/projects.old/abbott/proposal.html.

El mismo Banchoff ha dispuesto en internet una versión digital de la novela, disponible en la dirección

http://www.geom.umn.edu/~banchoff/Flatland.

...esta novela es considerada todo un clásico de la ciencia ficción (al menos en el mundo anglosajón, donde incluso fue usada para enseñar geometría en los colegios). Por ello es inevitable que tras Planilandia hayan aparecido muchos libros en los que la trama se desarrolla en un mundo completamente plano.

Esta versión está escrita en inglés y posee las ilustraciones originales que Abbott incluyó en su novela. Otra versión, también en inglés, pero con las ilustraciones en ASCII, se puede encontrar en http://www.cervantesvirtual.com.

Más actual es el libro *The shape of Space* (Weeks, 1985), donde el autor nos regala una breve historia que también transcurre en Planilandia. En ella A. Square decide junto con unos amigos intentar encontrar la forma de su mundo. Tras varias expediciones descubren que tiene la forma de un toro (Do Carmo, 1976: 73), pero todavía les queda una parte por explorar, es la temida *reversing region* que torna del revés al incauto habitante que se adentre demasiado en ella. Este libro trata, entre otras cosas, de enseñarnos cómo ver objetos cuatridimensionales, aunque a medida que se avanza en su lectura se observa que, al igual que le sucede a A. Square, los humanos también tenemos dificultades para ver objetos en dimensiones superiores a la nuestra.

Curiosidades y anécdotas

Como anécdota final, señalar que en una de las conferencias del II ENAM (Encuentro Nacional de Alumnos de Matemáticas) celebrado en la Facultad de Matemáticas de Sevilla, los días 18 al 21 de abril de 2001, el prestigioso meteorólogo D. Julio Marvizón Preney, hombre del tiempo de Canal Sur TV durante una larga época, sugirió que una de las posibles (y plausibles) explicaciones que pueden darse para justificar la existencia de OVNIS es la de su origen ultraterrestre.

Julio, al que desde aquí agradecemos su «indirecta» colaboración en este artículo y al que pedimos disculpas por reseñar en él parte de su conferencia sin habérselo solicitado previamente (aunque estamos seguros, conociéndole, de que no va a tener el menor inconveniente), lleva más de treinta años investigando no sólo los fenómenos OVNI, sino también todo lo relacionado con el fenómeno paranormal. Ha publicado numerosos libros sobre estos temas, estando dedicado el último de ellos, de reciente aparición, a la explicación de su teoría sobre la «Sábana Santa» de Turín.

Para él, la explicación de la aparición de OVNIS puede ser debida a tres tipos de causas:

a) *De origen terrestre*: Estos «artefactos» estarían creados y tripulados por habitantes de nuestro mundo, pertenecientes a superpotencias que hubiesen desarrollado una elevadísima tecnología, desconocida por el resto de países, y que estuviesen probando con fines no necesariamente bélicos, aunque también pudiera darse este caso.

b) *De origen extraterrestre*: Estarían creados y tripulados por seres de otras galaxias (la probabilidad de existencia de «vida» en algunas de ellas prácticamente es de una certeza absoluta, según probó matemática y físicamente Julio en su charla) de diferente «inteligencia» y con una tecnología y medios infinitamente superiores a los nuestros, que estarían simplemente observándonos para conocer nuestras costumbres pero sin entrar en una posible comunicación con nosotros (seguramente por imposibilidad material por nuestra parte para entenderlos), tal como lo hacemos nosotros por ejemplo con los gorilas o los delfines.

c) *De origen ultraterrestre* (aunque al propio Julio no le gustaba esta palabra): Según esta teoría, los OVNIS podrían ser seres que habitaran en espacios de más de tres dimensiones y que al «visitar» nuestro mundo serían vistos aparecer y desaparecer por nosotros de forma análoga a como los habitantes de un mundo de dos dimensiones nos verían a nosotros cuando intersectásemos con su mundo (recuérdese la experiencia de A. Square en Linealandia).

Finalizamos este artículo exponiendo este resumen personal de esta pequeña parte de la conferencia de Julio porque consideramos que aunque él no citó en ningún momento la novela de Abbott a la que nos referimos (ni ninguna de las otras anteriormente señaladas), casi nos atreveríamos a asegurar, con toda certeza, que no sólo la ha leído, sino que le ha servido para no despreciar esta posible explicación del origen de éstos, como él los llamó en alguna ocasión, «aparatos».

Juan Núñez
Fcaultad de Matemáticas.
Universidad de Sevilla.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»
Manuel Ponce

Bibliografía

ABBOTT, E.A. (1999): *Planilandia: Una novela de muchas dimensiones*, José J. de Olañeta, Palma de Mallorca. (Ediciones previas: *Flatland: A romance in many dimensions*, 1884, Harper Collins, 1983).

BURGER, D. (1965): *Sphereland: A fantasy about curved spaces and an expanding universe*, Crowell, New York.

CORTÉS SALINAS, C. (1994): *La Inglaterra victoriana*, Akal, Torrejón de Ardoz, (Serie Akal Historia del mundo contemporáneo).

DO CARMO, M. (1976): *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Alianza Universal Textos, Prentice-Hall Inc.

HINTON, C.H. (1907): *An episode of Flatland*, Swan Sonnenschein.

Nueva edición (1980): *Speculations on the Fourth Dimension: Selected Writings of Charles H. Hinton*, Dover Publications, England

WEEKS, J. R. (1985): *The shape of space: How to visualizate surfaces and threedimensional manifolds*, Marcel Dekker, New York.

Martín Chirino

(Fotos: Pilar Moreno)

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 113-115

Isoperímetros: El problema de la existencia de solución en el problema isoperimétrico

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

A LO LARGO DE LA HISTORIA han existido una serie de problemas que han intrigado, seducido y, a la vez, frustrado a los matemáticos de todos los tiempos. Algunos de ellos siguen sin resolverse y otros como el *problema isoperimétrico* del que venimos ocupándonos desde el número 33 de SUMA –tan sencillo de enunciar y, sin embargo tan difícil de demostrar– se resolvieron tras siglos de esfuerzo. Cuando decimos lo anterior, lo hacemos teniendo muy en cuenta lo que tal afirmación significa. Es decir, resolver un problema no consiste sólo en dar una solución sino en demostrar que tal solución existe. De esta cuestión nos ocupamos ahora.

Con las contribuciones de Zenoro, Pappus, al-Khazin, Ibn al-Haytham, de los hermanos Bernoulli... y las abejas, ha conseguido ciertamente ocupar un puesto privilegiado entre los problemas clásicos de las Matemáticas. Sin embargo, como vamos a ver en esta entrega, los fascinantes resultados que hemos venido comentando en los números anteriores, no resuelven totalmente el problema isoperimétrico más general que enunciamos en la primera entrega:

> De todas las curvas cerradas y simples en el plano con longitud dada *l*, ¿cuál es la que encierra un área máxima?

Bajo esta forma el problema era conocido desde hace siglos, y también su solución, a saber, la circunferencia de longitud *l* es la curva que encierra área mayor.

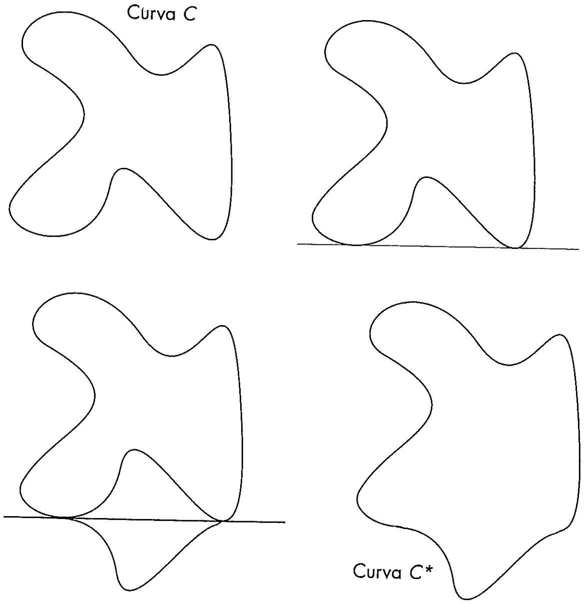
La «demostración» de Steiner del problema isoperimétrico

Una de las contribuciones más esenciales hacia la resolución rigurosa del problema anterior la dio Jacob Steiner (1796-1863) en 1838, momento en el que se vivía una gran controversia entre los partidarios de los métodos analíticos (es decir usando Cálculo) y los métodos sintéticos (pura

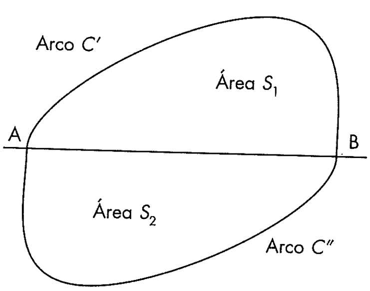
* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

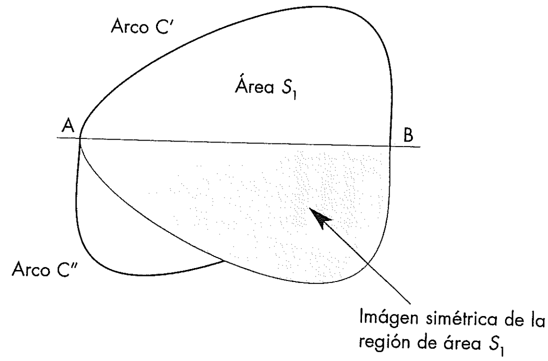
Geometría). En su demostración, Steiner empleó un argumento geométrico muy simple al que vamos echar un vistazo: supongamos que existe al menos una solución del problema isoperimétrico. Tendremos entonces una curva *C*, que entre todas las curvas cerradas de longitud dada *l*, encierra la máxima área. Pretendemos demostrar que tal curva es una circunferencia.

- El primer paso de su demostración consiste en probar que la solución del problema isoperimétrico *C* debe ser una curva convexa. De no ser así, podremos construir una nueva curva *C**, como podemos observar en las figuras siguientes, que tiene la misma longitud que la primera pero que acota mayor área.

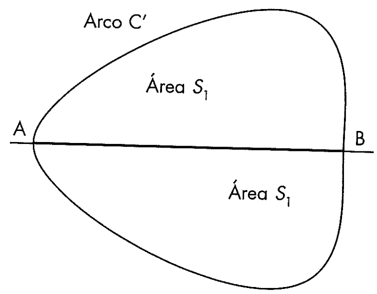


- Una vez justificada la convexidad de la solución, elijamos sobre la curva convexa *C* dos puntos, *A* y *B* de modo que dividan a *C* en dos arcos *C'* y *C"* de igual longitud. La recta que pasa por *A* y *B* divide al dominio acotado por C en dos trozos de áreas S_1 y S_2 respectivamente. La propiedad de optimización de la curva *C* implica que S_1 y S_2 sean iguales. Si no fuera así, por ejemplo si S_1 fuese mayor que S_2, entonces podríamos reflejar la región de área S_1 respecto de la recta que une *A* con *B*, y obtendríamos una nueva región como muestra la siguiente figura.



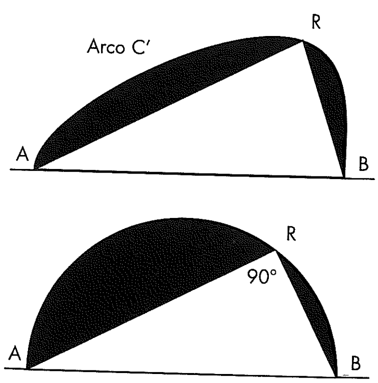


La unión de esta región con su imagen reflejada formaría una figura plana de mayor área que la abarcada por la curva C, de manera que la longitud de su perímetro seguiría siendo *l*. Obtendríamos así una contradicción con el carácter óptimo de la curva *C*. En consecuencia las áreas S_1 y S_2 deben ser iguales.



Simetrización de una curva convexa

- Por último, para demostrar que *C* es una circunferencia, será suficiente demostrar que *C'* y *C"* son semicircunferencias. Para ello supongamos que uno de los arcos no fuera una semicircunferencia, por ejemplo el arco *C'*. Ello implicaría la existencia de un punto sobre él, *R*, de manera que el triángulo de vértices *ARB* no fuese rectángulo en *R*. Entonces movemos como si hubiese ua *carrete infinitesimal* instalado en *R* hasta que el ángulo en *R* sea recto y en esta posición reflejamos la figura obtenida en la recta *AB* para obtener una curva cerrada con longitud *l* pero que acota mayor área que *C*, en contra del carácter óptimo de la curva *C*.



Se abre el problema de la existencia y se dan soluciones

Aunque, para Steiner, el problema quedaba completamente resuelto, y su amigo Dirichlet trató, sin conseguirlo, convencerle de ello, el elegante razonamiento que acabamos de reproducir no soluciona el problema isoperimétrico que hemos planteado. ¿Por qué?

Observemos que en cada uno de los tres pasos se supone que la solución existe. Es decir, se supone que existe una curva cerrada y simple de perímetro l que acota más área que las demás y bajo esta hipótesis se demuestra que tal curva es una circunferencia.

Fueron muchas, aparte de la demostración de Steiner, las supuestas demostraciones, (pues todas ellas suponían que la solución del problema existía) de que la circunferencia soluciona el problema isoperimétrico. Sin embargo, una demostración satisfactoria de este hecho no fue obtenida hasta 1870 cuando K. Weierstrass observó que algunos problemas parecidos al isoperimétrico no tenían solución (pensemos, por ejemplo, en el problema de determinar de todas las curvas cerradas y simples en el plano con longitud l, si existe alguna que acote menor área que las demás) y dio una demostración completa de la solución del problema isoperimétrico. La demostración de Weierstrass era un tanto complicada, en el sentido de que era consecuencia de la teoría creada por él mismo que hoy conocemos como Cálculo de Variaciones y de la que hablamos en el número 39 de SUMA.

Con posterioridad a la demostración de Weierstrass, se han encontrado demostraciones más sencillas y directas, en las que muy diferentes ideas y técnicas se utilizan para establecer el mismo resultado. Entre ellas destacamos las demostraciones de Hurwitz y de Schmidt.

El primero de ellos, A. Hurwitz, dio en 1902 una demostración bastante elegante y corta en la que utilizó algunas ideas de la teoría de las series de Fourier y en particular la Desigualdad de Wirtinger. Esta demostración puede consultarse en Chern (1967).

Posteriormente, en 1939, E. Schmidt da, posiblemente, la más sencilla de las demostraciones conocidas, utilizando la fórmula para el área, obtenida directamente de la fórmula de Green y algunas ideas sencillas de Geometría Diferencial. La demostración se recoge en el texto de M. P. Do Carmo, (1992).

No recogemos aquí estas demostraciones, por hallarse más allá del propósito de estas secciones. Sin embargo, sí comentaremos un par de consecuencias que podemos extraer de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia.

Dos consecuencias importantes de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia

Una de las conclusiones más interesantes que podemos extraer de la propiedad isoperimétrica de la circunferencia es la conocida como *desigualdad isoperimétrica*. Consideremos una curva C cerrada, simple, plana de longitud l, y A es el área de la región encerrada por C. Sea r el radio de una circunferencia de longitud l. La propiedad isoperimétrica de la circunferencia nos permite asegurar que el área A no puede ser mayor que πr^2 y que solamente será igual a este valor si C es una circunferencia. Es decir, $A \leq \pi r^2$.

Teniendo en cuenta que:

$$\pi r^2 = \frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2 = \frac{1}{4\pi} l^2$$

tendremos que:

$$A \leq \frac{1}{4\pi} l^2$$

o equivalente que:

$$4\pi A \leq l^2$$

Esta última desigualdad, llamada *desigualdad isoperimétrica,* permite relacionar la longitud de una curva plana cerrada arbitraria y el área que encierra, y en la que la igualdad solamente se da si y sólo si la curva es una circunferencia.

Como consecuencia inmediata de la desigualdad isoperimétrica, podemos resolver la siguiente cuestión:

> De todas las figuras planas de la misma área A, ¿cuál posee menor perímetro?

La respuesta, como puede adivinarse es el círculo de área A. La razón, es sencilla. Si hubiera una figura plana con la misma área A pero con perímetro l menor que el del círculo, puesto que el perímetro del circulo es:

$$2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

tendríamos que:

$$l < 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

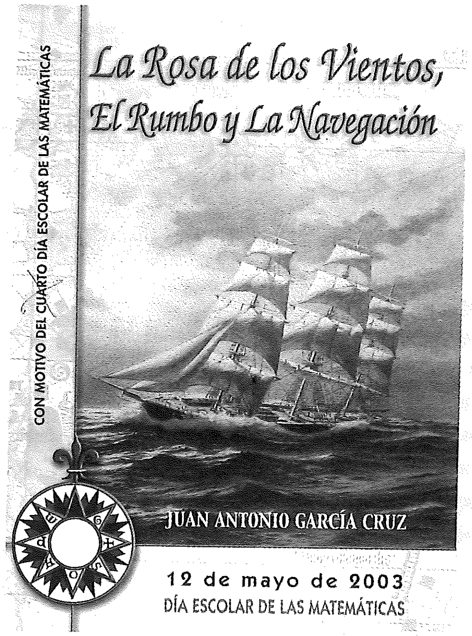
o equivalentemente que, $l^2 < 4\pi A$, en contradicción con la desigualda isoperimétrica.

Bibliografía

DO CARMO, M.P. (1992): *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

CHERN S.S. (1967): «Curves and surfaces in Euclidean space», en *Studies in Global Geometry and Analysis,* Math. Assoc. Amer., distribuido por Prentice-Hall, pp. 16-56.

PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN



LISTA DE PRECIOS

Fondo actual

	Socios	No socios
1. *Los Historiadores de la Matemática Española*, Francisco Vera	4 €	6 €
2. *Instrumentos y Unidades de Medida Tradicionales en Extremadura*, Sociedad Extremeña de Educación Matemática	12 €	14 €
3. *Abraham Zacut*, J.M. Cobos Bueno	9 €	12 €
4. *Utilización de Maple como apoyo a la matemática en el Bachillerato*, José Ángel Méndez Contreras	7,5 €	
5. *Las matemáticas de Alicia y Gulliver*, Jordi Quintana Albalat	1 €	
6. *La rosa de los vientos*, Juan Antonio García Cruz	1 €	

Fondo antiguo

	Socios	No socios
1. *IV OLimpiada Matemática Nacional Española*, FESPM	3 €	6 €
2. *Actas VI JAEM*, Sociedad Extremeña de Educación Matemática	3 €	4 €
3. *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*		
• *Geometría y sentido espacial*	6 €	7 €
• *Geometría en el Ciclo Medio*	7 €	9 €
• *Geometría desde Múltiples Perspectivas*	7 €	9 €

Pedidos: **Servicio de Publicaciones de la FESPM. Apdo. de Correos 590. 06080 BADAJOZ**
e-mail: PublicaFESPM@navegalia.com

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 117-119

Interacciones y utilizaciones

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

Venimos viendo en esta sección las relaciones entre matemáticas y medios de comunicación. Ya nos hemos ocupado en distintas entregas de algunos de los aspectos destacados (publicidad, gráficas, prensa del corazón...). Es el momento, antes de pasar a otras visiones parciales, de abordar dos temas generales. En primer lugar, las interacciones entre los medios y la enseñanza de las matemáticas. Y, como consecuencia de ellas, las posibilidades de utilización de los mismos en las clases de matemáticas, en su enseñanza y aprendizaje, que es el quehacer profesional principal de la mayoría de los destinatarios de esta revista. Y como colofón daremos una batería ampliada de preguntas típicas a las que habría que responder para abordar una noticia, de forma que fuera más creíble y fiable, a la vez que más sencilla de evaluar.

Doble interacción

En la interacción entre matemáticas y medios hay un aspecto que es el que normalmente se tiene en cuenta. Se está en las tareas de enseñanza, y sin entrar en grandes florituras, surge enseguida la pregunta: ¿qué instrumentos proporcionan los medios que sean utilizables en la enseñanza de los distintos tópicos matemáticos? Se trata, por tanto, de utilizar los variados y cambiantes recursos que cada día proporcionan los medios para hacer una enseñanza de las matemáticas más pegada a la realidad, enraizada en el entorno diario.

Es la primera e importante interacción entre los medios y la enseñanza, que permite usar casi todos los días esos temas que aparecen en los medios y en particular en su parte más utilizable en clase, la prensa: pasatiempos de contenido matemático, porcentajes, representaciones gráficas variadas, tablas numéricas y relaciones entre variables, velocidades de variación, grandes números y grandes cantidades, estimaciones, resultados de juegos de azar, matemática financiera y, sobre todo, encuestas y estadísticas diversas. Con todo ello hay una batería amplia y variada de ejemplos para muchos de los tópicos matemáticos habituales (y con niveles de profundidad diferentes), con la ventaja de que están ligados a temas de actualidad, y de los que, por tanto, se habla también fuera de la clase de matemáticas e incluso fuera del centro. Y donde, como resumen, hay que señalar que los medios sirven para enseñar mejor y para aprender mejor las matemáticas. Y también para realzar y valorar el papel social de las mismas.

Con esta primera interacción ya sería suficiente para, como profesores, seguirle la pista a los medios. Pero hay otra que tiene todavía mayor interés, y de la que pasamos a ocuparnos. La constatación de que hay unos temas que aparecen mucho en los medios, otros son poco frecuentes y otros que están casi ausentes, ¿tiene que influir en los programas de la enseñanza obligatoria y en la importancia relativa que se conceda en clase a alguna de las partes de las matemáticas? Porque los medios tienen que servir como guía de las grandes líneas de la enseñanza, ya que nos muestran las partes de las matemáticas que son más importantes socialmente (más la estadística que el cálculo infinitesimal, por ejemplo), nos señalan la importancia relativa de cada una (tiene mayor importancia la representación decimal o con porcentajes que con fracciones, al contrario de lo que pasa en la escuela) y nos hacen introducir aspectos que hoy casi están ausentes o no muy valorados en la educación matemática, tales como (sin pretender hacer una lista exhaustiva): manejo de grandes números y grandes cantidades, cantidades aproximadas, situaciones en las que no se conocen todos los datos, modelos como forma de aproximación a la realidad o clasificaciones.

Esta segunda interacción, que aparecía recogida en la normativa primera de la ESO (uno de cuyos Objetivos generales, el número 8, era: «Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de las noticias») ha desaparecido en los nuevos y vigentes currículos de la Secundaria, en este retorno al pasado que nos quieren hacer recorrer en la enseñanza. Pero que si queremos hacer una enseñanza de calidad y abierta al futuro no podemos obviar.

Formas de utilización en clase

Nos ocupamos ahora de las formas de utilización de los medios en clase de matemáticas, refiriéndonos en especial al caso concreto de la prensa, por ser el más sencillo y rentable. Señalemos en primer lugar que pueden suponer un instrumento para comunicar la escuela con la realidad circundante, las ventanas de papel que permitan la entrada de aire fresco en las aulas. Y además que como ventajas añadidas de la prensa está el hecho de que todas las actividades que se realicen con ella son interdisciplinares, así como que su presencia en clase hace imprevisible, al menos en parte, el desarrollo de la misma, con lo que de reto supone (aunque, en contrapartida, es visto por algunos enseñantes como un peligro porque no se controla lo que va a suceder y la clase puede evolucionar por caminos inesperados y no deseados). Y plantea una clase más abierta y en general más rica que el desarrollo habitual de un tópico matemático.

Señalaremos cuatro métodos generales de introducción de la prensa:

Búsqueda en un periódico cualquiera de elementos matemáticos

Son actividades genéricas que se pueden realizar un día cualquiera con el periódico que se tenga más a mano (aunque hay que apuntar que son más apreciados los más próximos al lugar y de fecha del día o lo más cercana posible). Con ellas se pone de manifiesto la gran presencia de elementos matemáticos en la prensa todos los días, lo que sirve para valorar la importancia de las matemáticas en la sociedad. En particular se pueden rastrear la gran cantidad y variedad de números; diferentes y diversos elementos geométricos; la presencia constante de aspectos estadísticos; fotos, gráficos, figuras y dibujos de tamaños y formas distintos; y una gran superficie, que varía con las fechas y los periódicos, dedicada a la publicidad, que también contiene matemáticas y que supone el soporte económico de los periódicos (algo que es interesante computar). En la bibliografía existente sobre prensa y matemáticas se pueden encontrar actividades de este tipo preparadas para utilizar en clase sin más que fotocopiarlas.

Realización de dossiers sobre temas matemáticos con material recopilado de periódicos diferentes

Cuando se quiere hacer un estudio un poco detallado de algún tema en particular (como por ejemplo las gráficas), lo más probable es que en un ejemplar de un periódico escogido al azar no haya suficiente cantidad y/o variedad. Por eso es conveniente adjuntar a los ejemplos que aparezcan en la prensa actual otros significativos que se vayan recopilando a lo largo del tiempo. Es una labor personal de acopio de material educativo de largo alcance en la cual puede ayudar también la bibliografía. En cuanto a temas interesantes para la realización de dossiers están las gráficas, la publicidad, la gran variedad de temas estadísticos, los frecuentes errores (no las famosas erratas o 'duendes' de la prensa) matemáticos o la utilización social de las matemáticas, reflejada en diversos aspectos de la prensa.

Estudio de temas interesantes que aparecen con regularidad en los periódicos

También aquí hay una gran variedad y el interés puede variar con el tiempo y la edad del alumnado. Pero se pueden citar algunos de interés permanente, como la información de deportes, de importancia creciente en la prensa y de gran interés para el alumnado de ambos sexos; el seguimiento de los aspectos matemáticos de las frecuentes campañas electorales; los juegos de azar, en que nuestro país, por variedad y extensión, es una primera potencia mundial; los pasatiempos, la información meteorológica o la de la bolsa. Y a ellos hay que añadir un aspecto marginal en cuanto a los medios, pero interesante en cuanto a las matemáticas: el papel de periódico es un material abundante y barato que permite hacer mucha geometría.

Utilización de artículos concretos por su interés específico

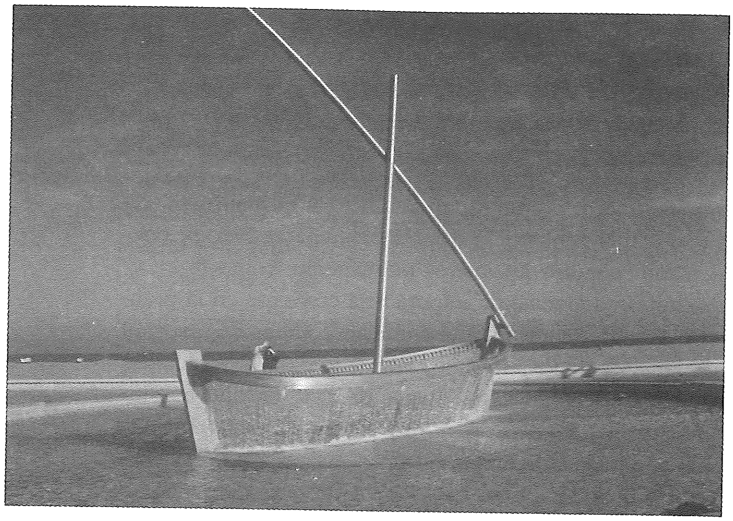
Además de los tres tipos anteriores, que miran a la prensa en su conjunto, hay un aspecto que mira a la especificidad de algunos artículos, que con cierta frecuencia aparecen en los periódicos, que por su interés merecen una atención especial, y que es conveniente guardar y proporcionar a los alumnos en el momento oportuno, con o sin actividades específicas para realizar a partir de los mismos. Aquí se incluyen entrevistas o informaciones sobre matemáticos actuales (que permiten mostrar con hechos que las matemáticas, como el resto de los saberes humanos, están desarrolladas por personas concretas, que no caen del cielo) o informaciones sobre avances matemáticos (que hacen ver que las matemáticas no son una actividad ni arqueológica ni pasada de moda). Artículos de este tipo son cada vez más frecuentes en suplementos científicos o culturales, pero también aparecen de vez en cuando en las páginas normales.

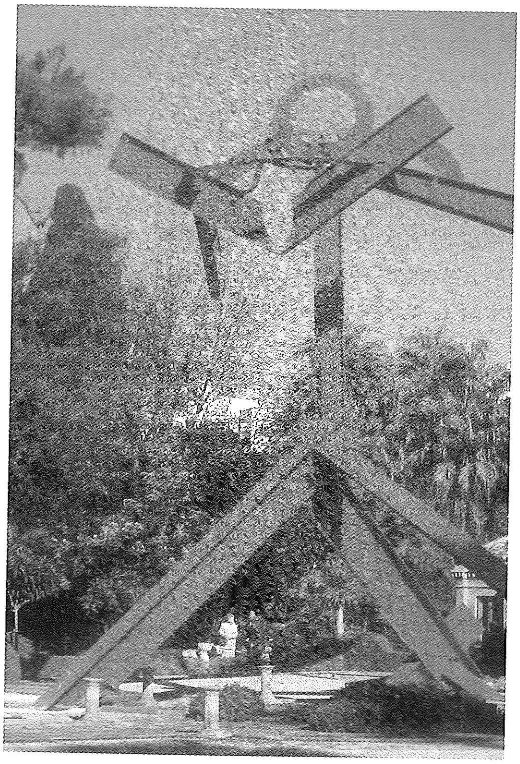
Como vemos hay formas diferentes de introducción de la prensa en clase, lo que da lugar a la realización de actividades variadas, adaptadas a los diferentes niveles y edades del alumnado y referidas tanto a tópicos concretos como a una visión interdisciplinar del conocimiento. Y en su conjunto suponen la aplicación de las matemáticas a la lectura crítica de los medios de comunicación, tarea de particular importancia presente y futura. Y todo ello sin mengua ninguna de las matemáticas involucradas en el aprendizaje.

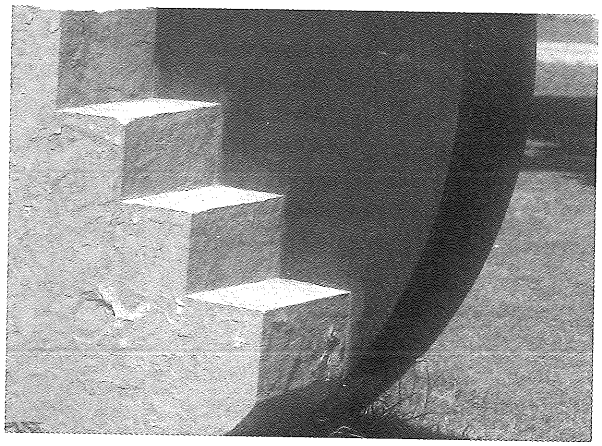
Preguntas

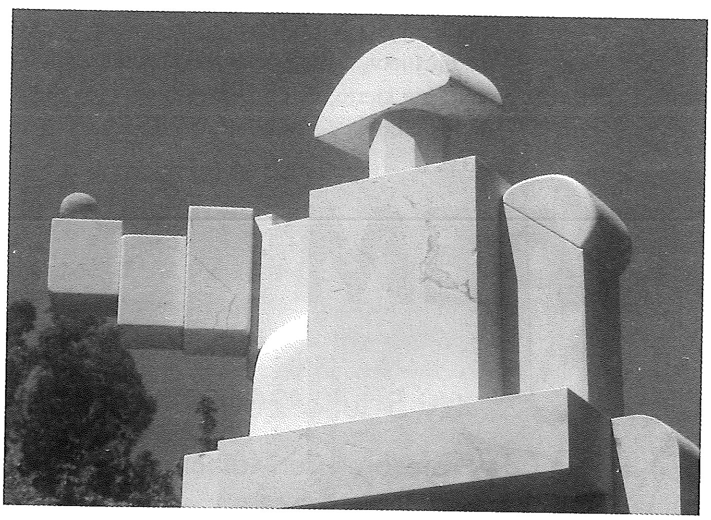
Vamos a dar un salto y nos vamos a colocar ahora desde el punto de vista de los periodistas, de los creadores de la información. Es sabido que los tratados clásicos de periodismo recogen que al redactar una información hay que contestar a las preguntas *¿quién?, ¿qué?, ¿cuándo?, ¿por qué?* y *¿cómo?* Que pueden servir no sólo en periodismo sino para proporcionar información de cualquier hecho por cualquier medio. Pero sería conveniente añadir algunas otras que introduzcan la cuantificación, los métodos de obtención de datos y la posibilidad de comparación, y que darían una mayor precisión, tales como: *¿cuántas?, ¿con qué probabilidad?, ¿qué fracción o porcentaje?, ¿cómo comparar esas cantidades con otras?, ¿cómo se han obtenido los datos?* y *¿cuál es el índice de crecimiento y cómo se comprueba?*

Que los medios tuvieran en cuenta todas esas preguntas sería un avance hacia una información más adecuada y se posibilitaría una lectura crítica de los medios, como paso previo a una postura crítica ante la realidad. Mientras esa situación no llega es algo que tenemos que hacer desde la escuela, desde la clase de matemáticas, procurando que en el análisis que se haga de los artículos se contesten también a esas nuevas preguntas, cuando sea posible, o se constate la imposibilidad de hacerlo. Y hay que ser conscientes de que no es un objetivo que se consiga con actividades esporádicas, sino que requiere un planteamiento perseverante y sostenido en el tiempo. Pero con ello contribuiremos a la prevención de uno de los grandes males matemáticos de la sociedad: el anumerismo latente (del cual, por cierto, es un buen síntoma los repetidos errores de los medios de comunicación).









Valencia

(Fotos: Pilar Moreno)

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 121-123

El puzzle de los cubos de colores

Grupo Alquerque*

ENTRE LOS MATERIALES que pueden usarse en clase de matemáticas existe una gran variedad de puzzles. Por un lado están los rompecabezas planos entre los que podemos citar el *Tangram Chino* y los *Pentominós* como los más conocidos. Entre los tridimensionales se encuentra el que hoy queremos presentar.

Los puzzles basados en apilamientos de cubos coloreados se remontan a 1921 cuando el matemático Alexander MacMahon especialista en Combinatoria publicó su libro *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Básicamente consisten en una serie de cubos (normalmente cuatro) con sus caras coloreadas con distintos colores (generalmente cuatro también) que se unen procurando conseguir unas distribuciones concretas de esos colores.

Existen varios rompecabezas comercializados y se pueden encontrar otras distribuciones de color distintas en los libros citados en la bibliografía. Los nombres que suelen dársele a estos juegos (*Logicubos, Locura instantánea, Cubos diabólicos, Cuatro locos*, etc.) dan una idea de que no son un rompecabezas fácil de resolver, generalmente por tener sólo una posible solución. Lo usual en estos puzzles es colocar los cubos formando una fila de forma que en cada uno de los cuatro lados de esa fila aparezcan los cuatro colores.

Buscando una distribución de colores que permitiera disposiciones más variadas, creamos el siguiente puzzle.

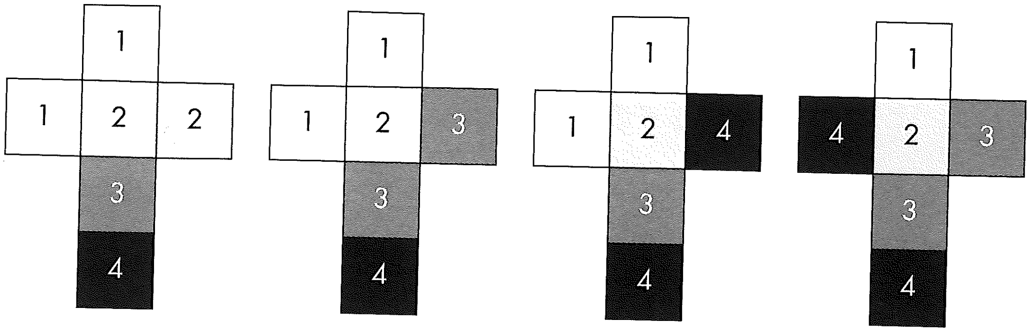
Juego

Tenemos cuatro cubos, pintados con cuatro colores distintos y de forma que en cada uno de ellos no aparezca un color más de dos veces. La distribución de los colores viene indicada en los siguientes desarrollos:

---

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portacelli–).

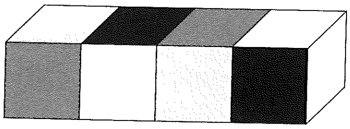
JUEGOS



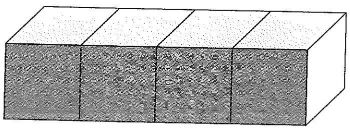
Desafíos

Esta combinación de los cuatro cubos de colores permite las siguientes colocaciones:

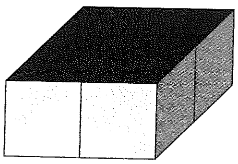
1. Colocar los cuatro cubos en fila de modo que en los cuatro lados de la fila estén los cuatro colores.



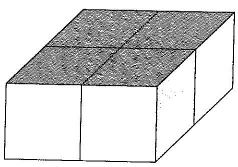
2. Colocar los cuatro cubos en fila de modo que en cada lado de la fila esté uno de los cuatro colores.



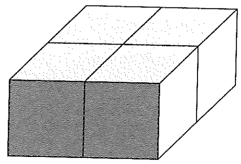
3. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2×2×1 de manera que:
   - Las caras 2×2 tengan cada una un color.
   - Y las cuatro caras 2×1 sean, cada una, de un color distinto, sin que se repitan.



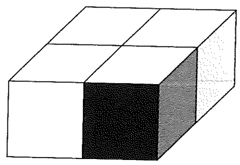
4. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2×2×1 de manera que:
   - Las caras 2×2 tengan cada una un color.
   - Y de las cuatro caras 2×1 haya dos caras con uno de los otros dos colores.



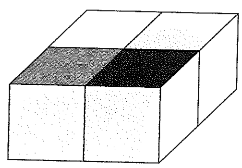
5. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2×2×1 de manera que:
   - Las caras 2×2 tengan cada una un color.
   - Y de las cuatro caras 2×1 haya tres caras con uno de los otros dos colores y la cuarta cara 2×1 con el cuarto color.



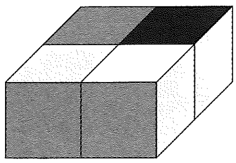
6. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2×2×1 de manera que:
   - Las caras 2×2 tengan cada una un color.
   - Las caras 2×1 tengan dos colores distintos y entre las cuatro caras 2×1 haya dos veces cada color.



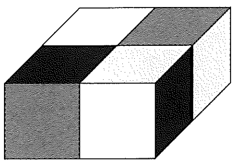
7. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2×2×1 de manera que:
   - Las caras 2×2 tengan los cuatro colores.
   - Y las cuatro caras 2×1 cada una sea de un color distinto, sin que se repitan.



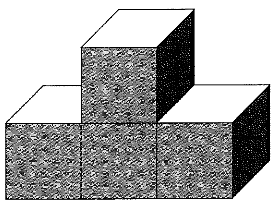
8. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2×2×1 de manera que:
   - Las caras 2×2 tengan los cuatro colores.
   - Y de las cuatro caras 2×1 dos sean de un color y las otras dos de otro.



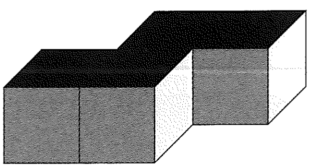
9. Colocar los cuatro cubos formando un ortoedro de 2x2x1 de manera que:
    - Las caras 2x2 tengan los cuatro colores.
    - Las caras 2x1 tengan dos colores distintos y entre las cuatro caras 2x1 haya dos veces cada color.



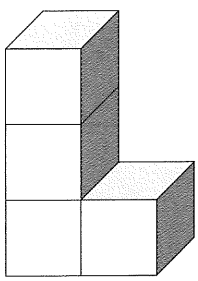
10. Colocar los cuatro cubos formando un podium de manera que los planos de cada dirección del espacio tengan un solo color.



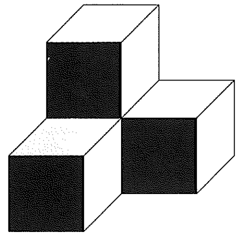
11. Colocar los cuatro cubos formando una «S» de manera que los planos de cada dirección del espacio tengan un solo color.



12. Colocar los cuatro cubos formando una «L» de manera que los planos de cada dirección del espacio tengan un solo color.



13. Colocar los cuatro cubos formando una «doble escalera» de manera que los planos de cada dirección del espacio (en esta figura no se tiene en cuenta el plano oculto por la base) tengan un solo color.



Utilización del juego en el aula

Actividades de aula que se pueden realizar con este juego son las siguientes:

1) Entregar a los alumnos el puzzle construido y pedirles que busquen una forma de escribir la distribución de los colores de cada cubo, buscando el desarrollo necesario y la notación con la cual representar cada pieza.
2) Se les puede entregar el desarrollo y a partir de él proponer la construcción del puzzle, lo que resulta un buen proyecto para Tecnología en ESO. Pueden realizarse en cartulina los desarrollos y después montar los cubos. También se pueden usar cubos de madera y pintar las caras con los colores correspondientes. Otra forma muy fácil de construcción consiste en coger cubos de plástico de los rompecabezas apilables infantiles y pegarles en sus caras pegatinas de colores. Dan muy buen resultado los papeles adhesivos que se utilizan para forrar los estantes de los muebles de cocina, tanto para plástico como para madera.
3) Con el puzzle construido resolver las distribuciones que se han planteado como desafíos.
4) Estudiar la distribución combinatoria de colores que se pueden utilizar para los cubos, investigando cuántos cubos diferentes aparecen, según la cantidad de colores que se han de utilizar.
5) Diseñar puzzles nuevos a partir del estudio que se haya realizado en el apartado anterior y buscar distintos retos que resolver con esos cubos.

Bibliografía

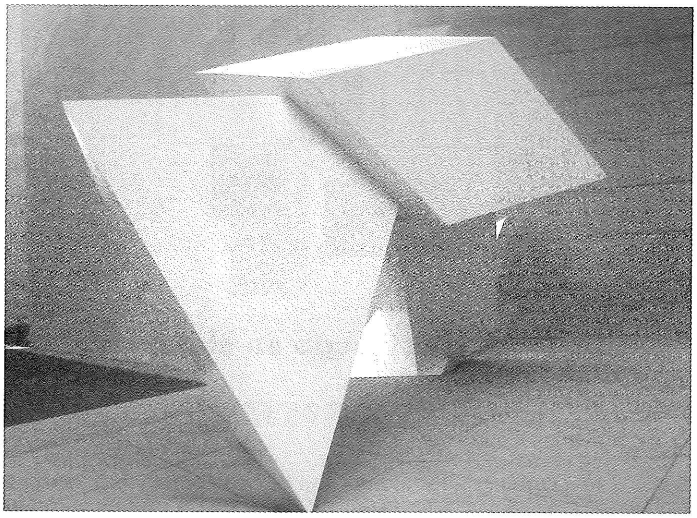
CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Síntesis, Madrid.

GARDNER, M. (1972): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza, Madrid.

HOLT, M. (1988): *Matemáticas recreativas 3*, Martínez Roca, Barcelona.

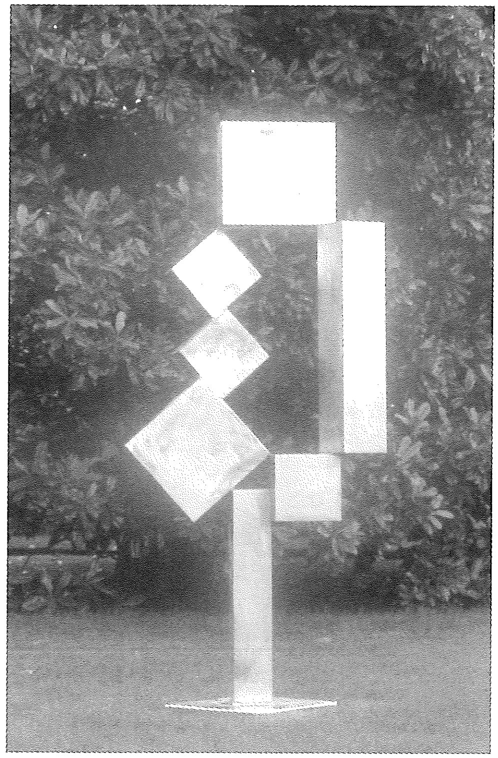
MUÑOZ, J. y J.A. HANS (1999): «Alucinando con cubos de colores», *Actas de las IX J.A.E.M.*, Lugo, 607-610.

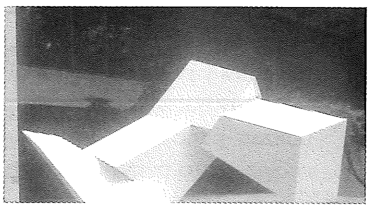
Revista CACUMEN: «Locura instantánea», Artículo sin firma en el número 31, pag. 51.

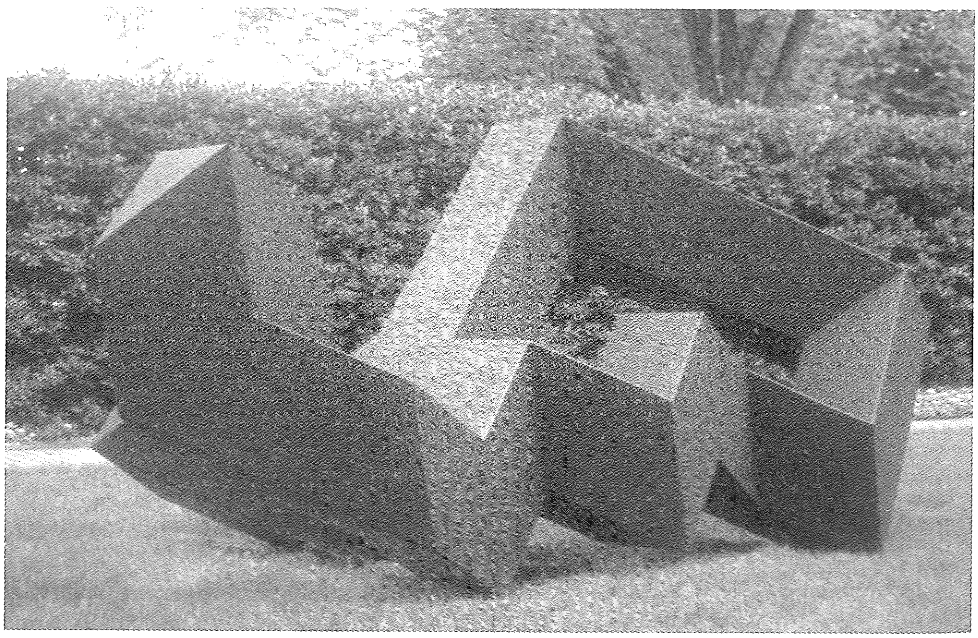


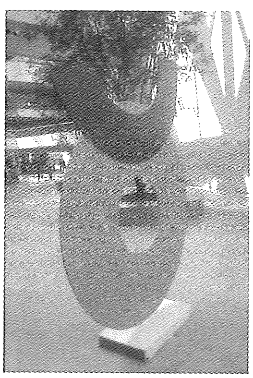
Washington

(Fotos: Pilar Moreno)









SUMA 41
noviembre 2002, pp. 125-128

Geometría visual en Internet

Antonio Pérez Sanz

RECURSOS EN INTERNET

DON PEDRO PUIG ADAM allá por 1955, en su famoso, pero tantas veces ignorado, «Decálogo de la Enseñanza de las Matemáticas», nos brindaba estos consejos a todos los profesores:

1. No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
2. No olvidar el origen de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.
3. Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
4. *Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.*
5. *Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.*
6. *Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.*
7. Promover en todo lo posible la autocorrección.
8. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
10. *Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.*

Dos años más tarde, en la «11.ª Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas», que se celebró en Madrid en 1957, por iniciativa de Puig-Adam con el sugerente título de *El material para la enseñanza de las matemáticas*, que como bien afirma el mismo Puig-Adam es el primer certamen internacional que la historia registra sobre material didáctico matemático, con asistencia de Nicolet, Gattegno, Choquet, Emma Castelnuovo..., aparece un apartado de materiales titulado *Filminas* y otro *Filmes didácticos*, éste ultimo con 5 subgrupos, dos de ellos dedicados a la realización de filmes destinados a alumnos de menos de 14 años.

Entre los guiones elaborados había uno sobre «Ángulos en la circunferencia» y otro sobre «Generación de cónicas». A mediodía y por la tarde se proyectaban películas de contenido matemático, entre ellas las ya famosas de Nicolet y Fletcher que como dice Puig Adam fueron «unánimemente aplaudidas y admiradas».

Decía Nicolet, en esta reunión, algo plenamente vigente en la actualidad:

> ...el film matemático para niños ha de tener por exclusiva misión el alumbramiento del feliz momento en que la intuición descubre una verdad matemática, a lo que contribuye eficazmente la sintaxis expresiva del movimiento y de la secuencia.

Termina Puig Adam su reseña de la Reunión con estas palabras, en 1958 y antes de la invención de la televisión y de los ordenadores:

> La proyección de estos films dejó en el ánimo de todos la impresión de estar en los comienzos de una técnica docente de valor insospechado, llena de problemas y de dificultades, pero cuyos alcances para el bien de la enseñanza estamos aún lejos de prever.

A pesar de lo que pueda parecer, no vamos a tratar hoy de películas o de vídeos matemáticos, o quizás sí. Vamos a hablar de esas mini-películas animadas que podemos encontrar en Internet y que causarían el asombro, la admiración y la envidia de Puig Adam y de Nicolet ya que contribuyen, sin ningún género de dudas, al alumbramiento del feliz momento en el que la intuición descubre una verdad matemática, a lo que contribuye eficazmente la sintaxis expresiva del movimiento y de la secuencia.

Visitaremos dos páginas plagadas de contundentes resultados visuales de conceptos geométricos utilizando animaciones de applets de java basados en Cabri, y Descartes, donde las propiedades geométricas se desarrollan vistosas y evidentes ante nuestros ojos.

Geometría con Cabri II. Página de José Manuel Arranz

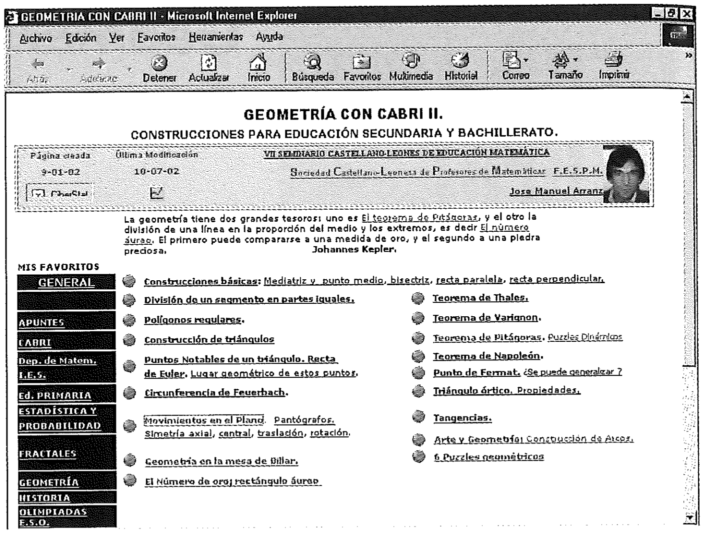
http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/

Introduce su página José Manuel Arranz con esta cita de Kepler:

> La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es *El teorema de Pitágoras*, y el otro la división de una línea en la proporción del medio y los extremos, es decir *El número áureo*. El primero puede compararse a una medida de oro, y el segundo a una piedra preciosa. Johannes Kepler.

Y de los dos temas, y de muchos más, se ocupa en su interior.

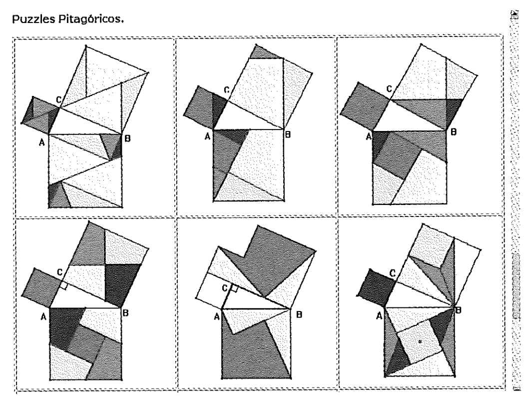
En ella encontraremos una más que surtida colección de animaciones en Cabrijava para estudiar un buen número de contenidos de geometría plana de la ESO y de bachillerato.



Merecen especial atención los applets relacionados con el Teorema de Pitágoras donde encontraremos una buena colección de puzzles dinámicos para ilustrar el teorema. Un recreo para los ojos y para la mente. Y un vivero de sugerencias para utilizar en el aula.

Pero además de Pitágoras podemos encontrar aplicaciones dinámicas sobre los lugares geométricos más habituales, sobre polígonos regulares, elementos y propiedades de los triángulos, movimientos en el plano, teorema de Thales.

Para los amantes de resultados más complicados también hay un espacio. En él se pueden estudiar temas no curriculares como el teorema de Varignon, el de Napoleón, el punto de Fermat y las propiedades del triángulo órtico.

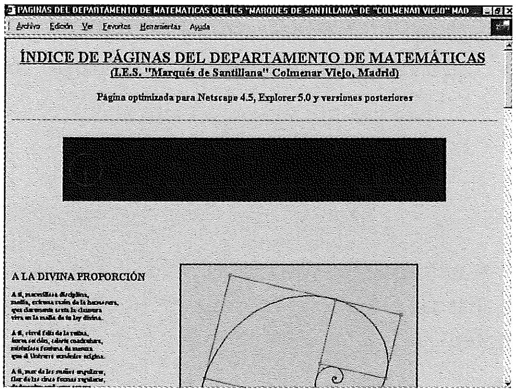


Y para los que miran el Arte con ojos matemáticos también hay una sección. No dejéis de visitar la excelente sección de Arte y Geometría, donde podemos descubrir toda la matemática encerrada en los arcos de las construcciones de nuestros pueblos y ciudades. Un buen paseo matemático por los arcos de la historia.

IES marqués de Santillana. Colmenar Viejo (Madrid)

http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm

Carlos Fleitas, desde la página del departamento de Matemáticas del serrano IES Marqués de Santillana de Colmenar Viejo, en Madrid, nos introduce en un auténtico paraíso de geometría visual con animaciones realizadas en los dos soportes estrella del momento en nuestro país, Descartes y Cabrijava.



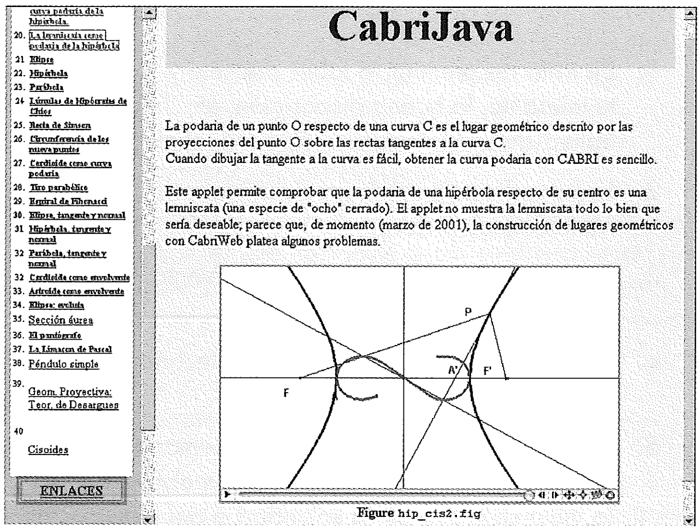
Con la herramienta Descartes de José Luis Abreu, nos brinda una colección de 17 animaciones de temas geométricos y como dice él mismo, no tan geométricos:

1. Circunferencia de los nueve puntos.
2. Punto de Fermat.
3. Triángulo órtico.
4. Triángulo de Morley.
5. Teorema de Ceva.
6. Recta de Simson.
7. Recta de Euler.
8. Triángulos de Napoleón.
9. Teorema de las bisectrices.
10. Circunferencia de Apolonio.

11-12. Hipocicloides y epicicloides.

13. Cuadratura del rectángulo.
14. Triángulo de Pascal y triángulo de Sierpinski.
15. Teorema de Bolzano.
16. Espiral de Teodoro de Cirene.
17. Elipse e hipérbola con applet's.

En la sección de CABRIWEB, aparte de un tutorial de Cabri y CabriWEb por si alguien se anima a seguir sus pasos, encontramos hasta 40 aplicaciones dinámicas de los temas geométricos y analíticos más variados, destacando la colección de curvas históricas en movimiento: además de las cónicas, cardiodes, cicloides, astroides, lemniscatas, espiral de Fibonacci... Una auténtica colección de joyas geométricas.



En la sección de Programas Informáticos nos ofrece una buena colección comentada de software para las clases de matemáticas y las direcciones donde obtenerlo.

Una página imprescindible para los que nos gusta «ver» y disfrutar las Matemáticas.

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Convocatoria III Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez»

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el III Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez», en homenaje de quien fue su Presidente de Honor. Se regirá por las siguientes:

BASES

1. Se trata de premiar la labor docente y los «valores humanos»: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consistirá en el nombramiento de «Socio de Honor» de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada y se dirigirán al Presidente de la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de enero de 2003.
7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:
   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc., referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.
9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las IX JAEM que se celebrarán en Santa Cruz de Tenerife en julio de 2003.

SUMA 41
noviembre 2002, pp. 129-132

La más grande aventura del pensamiento

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EL ARTÍCULO ANTERIOR lo dedicamos a la figura de al-Kashi, director –allá por los primeros años del s. XV– del observatorio astronómico de Samarcanda, ciudad que «bajo el despotismo ilustrado de Ulugh Beg se había convertido en un centro intelectual». Dejamos pasar entonces, por falta de espacio, algunas sugerencias que esta frase tomada a G. Gheverghese Joseph (1996) nos había motivado.

La expresión «despotismo ilustrado» es con toda probabilidad un eufemismo, pero la Historia –la que finalmente queda escrita– no suele ocuparse de estas minucias: prefiere detenerse en los logros de las Artes y de la Cultura (otra vez con mayúscula). ¿Se sentiría a gusto al-Kashi «bajo ese despotismo ilustrado»? Ciertamente tenemos consciencia de haber formulado una pregunta mal sincronizada. No es nuestra intención hacer demagogia: no podemos juzgar a al-Kashi con nuestros criterios, ni pasar por alto la azarosa vida de los científicos islámicos medievales del Asia Central, permanentemente sometidos a los vaivenes de brutales cambios políticos y necesitados por tanto de protección para poder desarrollar sus investigaciones. Al-Biruni y Omar Jayyan ya dejaron testimonios, cuatrocientos años antes, de las dificultades que atravesaban los sabios de su época. El propio al-Biruni vivió parte de su vida vinculado a la corte del sultán Mahmud de Gazna, del que previamente había sido prisionero y al que acompañó «en la devastadora campaña que éste impulsó contra la India»[1].

Así pues, no pretendemos censurar nada a al-Kashi, sino reflexionar brevemente sobre el viejo tema de las relaciones entre la Ciencia y el Poder, discusión que retomamos al hilo de Ulugh Beg y de varias anécdotas y datos acumulados en un pequeño espacio de tiempo en el que la ausencia de espíritu crítico o su manipulada ocultación han sido particularmente dolorosas.

Cuatro datos para el debate

80 bombas termobáricas

Hasta el 5 de marzo, esa era la cantidad lanzada por las tropas de EEUU sobre Afganistán. La prensa de ese día recogía cuatro fotografías tomadas por la Federación de Científicos Americanos[2] que mostraban la secuencia de la explosión experimental de una de estas bombas. Se puede observar en ellas «la caída de la bomba, guiada por láser; el primer estallido, que libera aerosoles inflamables; el impacto en el suelo, que libera calor; y la ignición, que absorbe el oxígeno por diferencia de presión al aumentar bruscamente la temperatura, y causa la muerte»[3]. Es decir: la secuencia de cómo un paraguas de fuego engulle la casa de dos pisos contra la que ha sido lanzado.

Opinión de una alumna y un alumno de 2.° de bachillerato

De «Ciencias Sociales» ella y del «Científico» él[4]. Afirman, después de pensarlo, que los matemáticos que han colaborado en la construcción de la bomba termobárica no son responsables moralmente, porque ellos «sólo trabajaban con ecuaciones». La conversación tuvo lugar en la calle, durante el transcurso de una manifestación de apoyo al pueblo palestino en la que también ellos participaban.

El entusiasmo de Richard Feynman[5]

(El resaltado en cursiva en el texto es nuestro).

> Tras el primer ensayo, la excitación de todo el mundo en Los Alamos fue tremenda. Todo el mundo celebraba fiestas, y todos corríamos de acá para allá. Yo me senté en la trasera de un jeep y allí estuve haciendo redobles de tambor y armando jaleo. Me acuerdo, sin embargo, de que una persona, Bob Wilson, estaba allí sentado, taciturno y deprimido.
>
> Yo le dije: «¿A qué estas penas?»
>
> «Hemos hecho una cosa terrible», me respondió.
>
> «Pero si fuiste tú quien la empezó. Tú nos metiste en esto».
>
> Ya ven ustedes, lo que me ocurrió –lo que ocurrió con todos nosotros–, es que tuvimos una buena razón para empezar. Después *uno se pone a trabajar muy intensamente para lograr algo, y es un placer; es apasionante. Y ya se sabe, se deja de pensar; sencillamente, uno no piensa.*

Edison y Leonardo da Vinci

¿Por qué camino puede llegarse a sostener la separación entre el quehacer de los científicos y matemáticos respecto de las consecuencias sociales que se deriven de él? ¿Cómo pudo permanecer Feynman ajeno o insensible al ambiente y a la problemática descrita en *Creadores de sombras*[6]? ¿Cómo interpretar la ausencia de una explicación convincente del reciente asesinato en Siberia de un científico ruso a manos de «desconocidos»? Pero todo se supone y se presenta oficialmente como incontaminado, incluso negando la evidencia: Leonardo da Vinci pudo haber puesto su polivalente inventiva al servicio de la ingeniería militar..., con la benémerita finalidad de «aliviar los sufrimientos de ambos bandos»[7]. La Historia de la Ciencia juega con descaro su papel, y sólo por casualidad nos enteraremos de que Edison inventó la bombilla pero diseñó también la silla eléctrica.

La incontaminación de las ecuaciones y el entusiasmo de los científicos

Los jóvenes son lo que son, y pueden decidir inconscientemente tocar las narices al adulto de marras por los caminos más insospechados y en el momento más contradictorio. Pero a pesar de este atenuante, la respuesta de los dos estudiantes nos parece muy significativa: recurrieron al viejo mito de la asepsia del trabajo matemático, todavía vigente, como tantos otros, para justificar lo injustificable.

La vieja corriente de pensamiento que considera las matemáticas desligadas de la experiencia es sin duda un fuerte apoyo para este punto de vista, pero no tiene por qué eliminar las dudas éticas de quien hace matemáticas. Y no sirve, además, para explicar la actitud de un físico como Feynman. La frialdad de su comentario sólo es comprensible desde una fuerte vivencia personal de un reduccionismo que contempla el mundo exclusivamente como algo abarcable por la razón: los afectos y la ética quedan fuera de esta perspectiva. Muchas de las anécdotas recogidas en el citado libro de Feynman son deliciosas como muestra de su audaz ingenio y del absurdo comportamiento individual y colectivo de los humanos, pero no parecen ir más allá de una fría reivindicación de la racionalidad. Cuando deliberadamente experimenta para resaltar el absurdo social es ingenioso pero también un tanto despiadado[8].

La misma frialdad creemos percibir en otro divertido autor, esta vez matemático: J. A. Paulos. En el primer capítulo de *Más allá de los números*[9], narra sus pensamientos mientras soporta los atascos obligados para entrar a Nueva York: reflexiona sobre una mejor organización de los peajes, la densidad de las placas de médico que va observando, se dedica a juegos mentales de combinatoria con los símbolos de las señales que encuentra. Ocurre que, como en el caso de Feynman, Paulos es ingenioso, irónico y creativo, pero también parece contemplar el mundo desde una altura situada más allá del bien y del mal. Los dos transmiten una actitud que avala la respuesta de nuestros dos estudiantes. Se ocupan de temas racionalmente coherentes y atractivos, cuya incomprensión o mal uso popular o social produce situaciones lógica y prácticamente ineficaces, pero que en sí mismas no afectan al ser humano en su problemática más existencial e íntima.

> Las matemáticas tratan de números y de figuras geométricas y generalizaciones que surgen de estos conceptos básicos. Pero los números y las figuras geométricas son propiedades insignificantes de los objetos reales. Un rectángulo puede ser la forma de un trozo de tierra o el marco de un cuadro, pero la forma es algo incidental respecto al valor real de la tierra o de la pintura.[10]

Es este reduccionismo, y en particular el apartamiento de la realidad de la vida menos explicable por la razón, lo que dota de asepsia al trabajo científico y matemático, convence a algunas personas que se dedican a él de la conveniencia de permanecer ajenas a las consecuencias de su actividad, y permite al Poder justificar la continuación de innobles investigaciones. Carente de otras perspectivas, el científico tópico resulta un individuo casi infantil: juega sin preocuparse de las consecuencias de su actividad; el placer que obtiene es tan apasionante que «deja de pensar». Como los niños o un gatito, necesita protectores que le permitan continuar su juego.

El mito de la ciencia crítica

Por los mismos días en los que recopilamos los cuatro datos anteriores, un debate en la radio entre un biólogo y un cura sobre la conveniencia de llevar a cabo o no determinadas investigaciones sobre ingeniería genética, nos permite caer en la cuenta de la manida utilización de algunos méritos del pasado por parte de los científicos. Galileo parece haberles dado patente de corso: como entonces la Ciencia fue el progreso, lo sigue siendo ahora.

En realidad, ¿cuántos casos como el de Galileo recoge la Historia? Si los hay no forman parte del bestiario popular. Los conocidos se pueden contar con cuentagotas: Galois, los matemáticos y científicos al servicio de la Revolución Francesa, Einstein, Sajarov, (después de haber apoyado los dos la bomba atómica)... A lo largo de la Historia, los científicos aparecen más ligados al Poder que oponiéndose a él.

Se nos escapan a menudo las diferencias entre Bruno y Galileo. La Iglesia decidió quemar al primero y encerrar al segundo, no sólo por la renuncia pública de éste sino porque sin duda era menos peligroso. Bruno era más filósofo que científico, y lo que difundía era una cosmovisión ideológicamente más peligrosa. La propuesta de Galileo, como él mismo suponía, podía terminar integrándose en el dogma de la Iglesia y sólo ha hecho falta tiempo para ello; la de Bruno iba directamente contra los principios.

Pero alejémonos de las particularidades de los personajes. La diferencia fundamental es que Bruno realiza un pensamiento crítico, mientras que el de Galileo es un pensamiento instrumental. El primero se plantea el porqué; el segundo el cómo. Ciertamente, para avanzar en el desarrollo de un pensamiento instrumental hay que actuar de forma crítica, pero la finalidad de esa crítica es el porqué del cómo, sin posibilidad de trascender los límites impuestos por la pregunta «¿cómo funciona?».

¿No está confesando esto mismo Feynman cuando afirma «uno se pone a trabajar muy intensamente para lograr algo, y es un placer; es apasionante. Y ya se sabe, se deja de pensar; sencillamente, uno no piensa.»? No podemos interpretar que no pensaba mientras investigaba en Los Alamos, así que sólo queda admitir que está diferenciando, sin introducir terminología clarificadora, *pensar* y *Pensar*: pensar con fines instrumentales y pensar críticamente. Y parece ser consciente de que su labor científica consiste en pensar.

Hacer matemáticas Pensando

El primer apartado del capítulo I del citado libro de Feynman lleva por título *¡Arregla las radios pensando!* «¡Resuelve las ecuaciones pensando!», se lamentan algunos de nuestros alumnos y alumnas y sus profesores particulares... Ciertamente, la Resolución de Problemas es un atractivo juego que da sentido a nuestra labor profesional, pero a veces queda la sensación de estar sumidos en un torbellino en el que pensamos sin Pensar.

En el Congreso que en diciembre del año 2000 dio por finalizado el Año Mundial de las Matemáticas en el País Vasco, pudimos escuchar en varias ocasiones la opinión de J. Mosterín de que «La matemática es la más grande aventura del pensamiento». ¿Cómo puede ser sentida esta frase por parte de las profesoras y profesores de matemáticas? Como tarea, no vemos inferior a los mil folios de Wiles para demostrar la conjetura de Fermat los quinientos de Ana Karenina, ni nos parece tampoco inferior la aventura, igualmente secular, de la filosofía. Y no creemos menor la sutileza de los poemas de J. A. Valente o Claudio Rodríguez que la que pudo desplegar Wiles en su demostración.

¿Por qué quien ama nunca
busca verdad, sino que busca dicha?
¿Cómo sin la verdad
puede existir la dicha? He aquí todo.[11]

Preocupados como estamos por sembrar la sana costumbre de pensar (científicamente), ¿insertamos alguna vez nuestro trabajo en un marco general personal, y ocasionalmente colectivo, que no olvide el Pensamiento? ¿Que nos permita ser conscientes y hacer conscientes de las consecuencias éticas del trabajo de quienes hacen ciencia y de quienes educan en materias científicas; de la necesidad pero también las limitaciones del pensamiento científico; de la ineludible formulación de algunas preguntas claves que no tienen respuesta?

Notas

1 Yves Thoraval: *Diccionario de civilización mususlmana*. Larousse. 1995. La Historia –la escrita– propone subliminalmente malas interpretaciones: ha tenido que ser en un diccionario donde hemos encontrado la palabra prisionero asociada con al-Biruni. Mientras tanto nos veíamos forzados a preguntarnos cómo soportaría semejantes campañas militares un espíritu tan refinado y tan universal.

2 Es decir: «norteamericanos». O mejor: «al servicio de los intereses norteamericanos».

3 Pie de foto tomado de *El Periódico de Aragón* de 5-III-02.

4 Evidentemente, pretendemos que se interpreten las comillas como un toque irónico.

5 Richard P. Feynman: *¿Está usted de broma, Sr. Feynman?*. Alianza 1987.

6 Película de Roland Joffé. 1989.

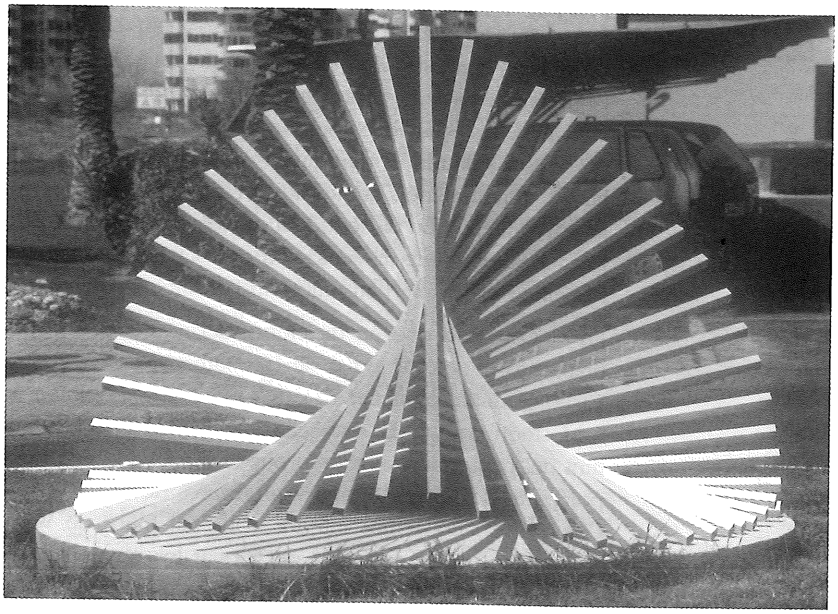
7 Michael White: *Leonardo. El primer científico.* Plaza & Janés. 2001. Reseñado por Francisco Teixidó Gómez en el n.° 51 de la revista *LLULL* (2001).

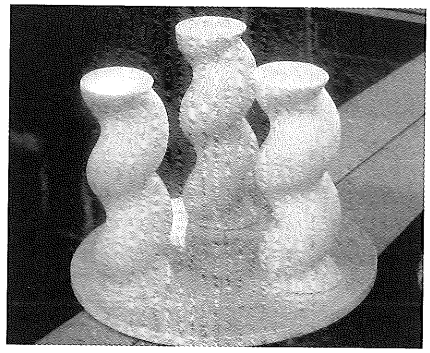
8 «Mi idea funcionó perfectamente: los tipos que quitaron la primera puerta fueron golpeados y torturados por todos, hasta que finalmente, con mucho dolor y no pequeña dificultad, lograron convencer a sus verdugos de que, por increíble que pudiera parecer, solamente se habían llevado una de las puertas. Yo estaba atento a todo esto, y era feliz» (*op. c.*).

9 J. Allen Paulos: *Más allá de los números. Meditaciones de un matemático.* Tustquets. 1993.

10 Morris Kline: *El fracaso de la matemática moderna.* Siglo XXI. 1976.

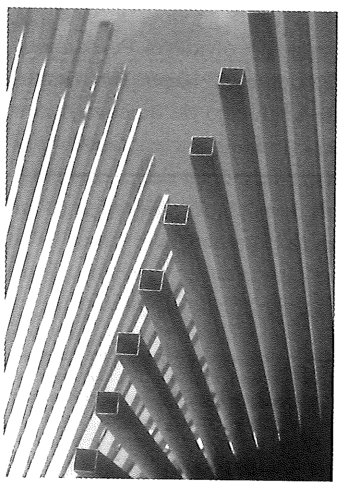
11 Claudio Rodríguez: *Antología poética.* LB Alianza. 1981. (Versos cogidos del *Libro primero de Alianza y condena*).

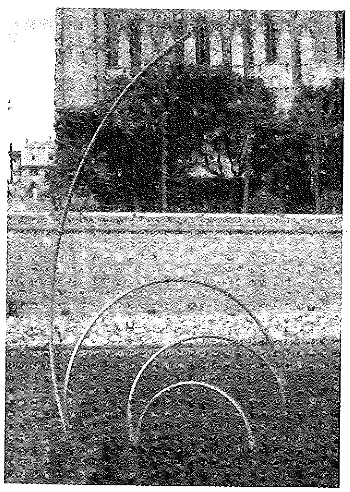


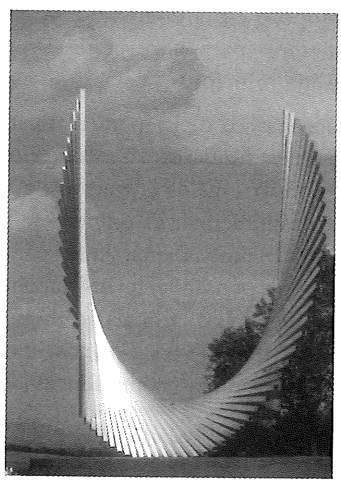


Alfaro

(Fotos: Pilar Moreno)





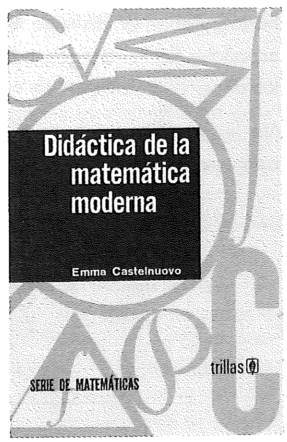


SUMA 41
noviembre 2002

En esta sección faltaba Emma Castelnuovo

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA MODERNA
Emma Castelnuovo
Trillas
México, 1970

Título original:
DIDATTICA DELLA MATEMÁTICA

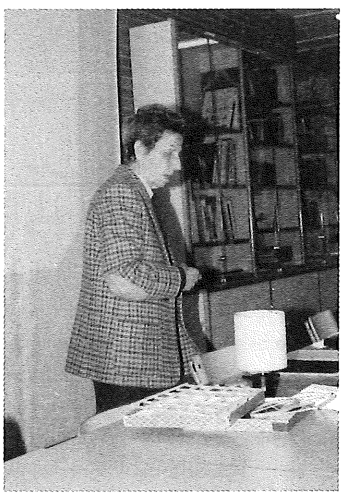


RECENSIONES

Escribir sobre uno de los libros de Emma Castelnuovo es una tarea más difícil de lo que pudiera parecer y esto es así porque la sola mención de su nombre despierta en mí, y tengo la seguridad de que también en muchos de los lectores de esta revista, fuertes sentimientos. Quien ha escuchado la voz de Emma en alguna ocasión, con un correctísimo español cargado de sonoridades italianas, es seguro que no ha podido permanecer indiferente. Y escucharla afortunadamente para todos no ha sido una tarea difícil. Emma viene frecuentemente a nuestro país y ha recorrido casi todos los rincones en los que se ha hablado de enseñanza de las matemáticas y no sólo para hacerse escuchar, pronunciando conferencias en ese tono tan personal que la caracteriza, sino también confundiéndose entre la gente, preguntando humildemente desde el público cuando intervenía cualquier profesor que se alzaba, desde la tiza, a contar su experiencia, polemizando cuando no estaba de acuerdo con las afirmaciones de más de un supuesto pope de la profesión que, iluminado, abandonaba el suelo de la realidad para esconderse en las nubes. Permítaseme por tanto hacer una pequeña digresión que inevitablemente me obligará a recoger alguna vivencia personal, pero al hablar de Emma y de sus trabajos de toda una vida sobre la enseñanza de las matemáticas, las fronteras entre los ámbitos profesional y personal quedan siempre inevitablemente difuminadas.

Conocí a Emma Castelnuovo hace 19 años en Lisboa. Se celebraba allí el XXXV Encuentro de la Comisión Internacional para el estudio y la mejora de la enseñanza de las matemáticas (CIEAEM). El movimiento que conduciría a la creación de la Federación Española de Profesores de Matemáticas acababa de empezar y sólo existían tres sociedades: la canaria Isaac Newton, la andaluza Thales y la aragonesa Ciruelo. Viajar era una forma de enterarnos de lo que fuera se cocía, de conocer a personas como Hans Freudenthal o Guy Brousseau, Paolo Boero, o la misma Emma. Recuerdo perfectamente la viva impresión que me causó una fortísima discusión pública entre Brousseau y ella, que mostraban dos posturas, dos concepciones de la educación matemática, no diré que contrapuestas, pero al menos dibujadas en distinta clase de pizarra y con distinta tiza. Una era una concepción teorizante y, digamos, estructural; la otra, y claramente se verá que no soy neutral, viva, pragmática, cercana. Ambos derrochaban dosis de entusiasmo, de vitalidad, de convicción. Se veía que cada uno creía vehementemente en lo que decía y lo demostraban sus gestos, sus voces que se alzaban y a veces hasta gritaban sin disimulo. Esa discusión, de la que un grupo de españoles fuimos testigos, influyó largamente en mí a lo largo de los años.

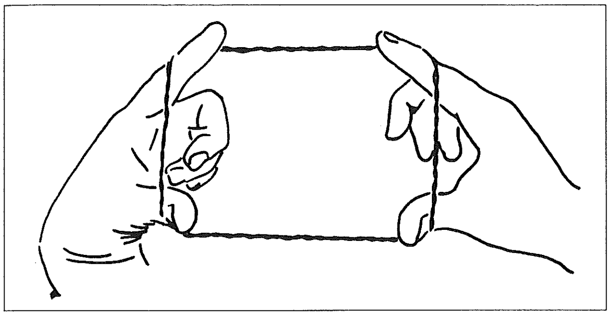
Me fijo al releer lo escrito hasta aquí en que la palabra *tiza* ha aparecido dos veces, es natural. Emma ha sido siempre una profesora de tiza, en el sentido más real del término, impartiendo clases en la llamada *Scuola Media Italina*, que corresponde con las edades de 11 a 13 años y en ese sentido siempre ha estado ligada a la clase directa, al trabajo con sus alumnos, entre sus alumnos.



...su labor se ha extendido mucho más allá del aula, con un compromiso permanente con los alumnos en primer lugar, con la enseñanza de las matemáticas en segundo y con los docentes de matemáticas, trasmitiendo sus ideas en multitud de foros, recorriendo medio mundo para defenderlas...

Pero Emma es mucho más que una profesora de tiza y esto por dos motivos. Primero, porque su labor se ha extendido mucho más allá del aula, con un compromiso permanente con los alumnos en primer lugar, con la enseñanza de las matemáticas en segundo y con los docentes de matemáticas, trasmitiendo sus ideas en multitud de foros, recorriendo medio mundo para defenderlas, desde Latinoamérica hasta Niger, convenciéndonos a los que la hemos escuchado de que sólo con experiencias basadas en la realidad concreta y literalmente tangible se construyen ideas matemáticas útiles y duraderas y que, además, esta afirmación es cierta a cualquier edad y a cualquier nivel de enseñanza. Emma Castelnuovo es más que una profesora de tiza también porque Emma es la profesora de lo tangible, de la visualización, de la geometría intuitiva, de las cazuelas y de las sombras, de las hormigas, del hilo atado entre los dedos con el que poder pensar sobre el área de rectángulos isoperimétricos. Cuántas miradas de superioridad, de los que piensan que tocar las matemáticas no sirve para nada, habrá tenido que soportar en su ya larga vida, de aquellos que piensan que enseñar matemáticas es enseñar a simplificar castillos de naipes de expresiones algebraicas. A muchos de ellos, sin embargo, tras escucharla, se les empezaron a romper muchos de sus esquemas. Y es que Emma convence y escucharla es siempre un placer. Leer sus libros también.

Comentaremos hoy un libro histórico *Didattica della Matemática*, aparecido en La Nuova Italia Editrice en diciembre de 1963, hace casi 40 años. En español fue publicado en 1970 bajo el título de *Didáctica de la Matemática Moderna*, añadiendo el adjetivo moderna quizás por estar de moda la expresión de Matemática Moderna en esos momentos, en los que en España la Ley General de Educación acababa de ser aprobada. La edición corrió a cargo de la editorial Trillas, en México, que lo sigue



reimprimiendo con cierta asiduidad: en 1997, un cuarto de siglo después de su aparición, el libro iba por la tercera reimpresión de la segunda edición en español. Es por tanto un libro muy difundido y muy leído y, sin duda, sería recomendable que los que nunca se han acercado a él aprovecharan la ocasión para leerlo, en estos momentos de cambio en los que aún se puede encontrar con relativa facilidad. Qué mejor en momentos de crisis que acudir al consejo de los clásicos y este libro de Emma Castelnuovo es sin duda un clásico de la didáctica de la matemática.

La intención del libro viene recogida en la introducción que la autora titula «Por qué un libro de didáctica de la matemática». Sus planteamientos parten de dos hechos:

> a) La clase de matemáticas resulta en general aburrida, pesada y a menudo difícil. Ciertos conceptos no son adquiridos, aun cuando el profesor se afane en repetirlos y busque aclararlos con explicaciones abundantes. El sentido de algunas propiedades no se entiende de inmediato. Es notable «la incomprensión por la matemática» lo que ha llevado, incluso a grandes matemáticos, a escribir al respecto artículos y libros. También es peculiar el miedo a la matemática, que los psicoanalistas continúan buscando en el ser humano.
>
> b) Los jóvenes que actualmente salen de nuestras escuelas secundarias tienen la idea de que las matemáticas consisten, por una parte, en un puro mecanismo, y por otra, que se trata de una construcción perfecta y completamente terminada, ignorando si se puede o no hacer algún descubrimiento nuevo en esta disciplina.

Luego más adelante añade:

> Si reflexionamos sobre la importancia que tiene hoy una cultura matemática, entendiéndola como el hábito mental matemático más que como una suma de conocimientos, nos daremos cuenta de la responsabilidad que tienen los redactores de programas, los profesores de matemáticas, la escuela toda. (...)
>
> En estas páginas de didáctica no nos proponemos dictar reglas para mejor enseñar ni queremos proporcionar al profesor una fórmula mágica para facilitar la comprensión de las matemáticas por parte del alumno, sino examinar las dificultades en la transmisión de conceptos matemáticos por parte del profesor y las que surgen en la mente del alumno en el momento de aprender.

Qué mejor en momentos de crisis que acudir al consejo de los clásicos y este libro de Emma Castelnuovo es sin duda un clásico de la didáctica de la matemática.

El libro se desarrolla en cuatro capítulos, además de la ya citada Introducción. En el primero de ellos titulado «De la didáctica general a la didáctica particular» recorre un itinerario que partiendo de Jan Amos Komenski, Comenius, (1592-1670) en el siglo XVII, pasa por Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827), a los que sitúa en las bases de la escuela activa, El recorrido llega después a Ovide Decroly (1871-1932) y Maria Montessori (1870-1952), que ponen las bases de la *didáctica como ciencia*, para terminar en Jean Piaget (1896-1980) como padre de la *psicología del aprendizaje*. Sienta en este capítulo, por tanto, los fundamentos de la didáctica de la matemática y de su propia, digamos, ideología como didacta de las matemáticas, la base de sus ideas, en un paseo claro por la historia de la didáctica general, para acercarse poco a poco a la didáctica de la matemática misma.

El capítulo 2 se titula «Qué matemáticas debemos enseñar». Casi todo lo que en él se puede leer es de rabiosa actualidad, pero como decir esto puede sonar a tópico, permítaseme citar sólo unos párrafos relevantes en estos momentos de cambio de currículos, téngase además en cuenta que fue escrito en 1963:

> Nos preguntamos: ¿Tiene importancia hoy día, dada la enorme difusión de las máquinas calculadoras, ejercitar a los niños que apenas cursan la escuela elemental, haciéndolos ejecutar largas operaciones con números enteros y decimales cuando estas operaciones pueden efectuarse en pocos segundos con una máquina que está al servicio del más pequeño negocio o de la más modesta oficina?
>
> Y, ¿no sería mejor dedicar un poco de tiempo al cálculo mental y habituar a los muchachos a juzgar «a ojo» el valor del resultado, lo cual es importantísimo aun con el uso de calculadoras? ¿Es justo dar tanto relieve a la solución de complicadas expresiones numéricas, en particular fraccionarias, cuando tales soluciones se reducen a un tecnicismo mecánico, a un juego de ajedrez, que priva al número de su significado?
>
> ¿Qué valor formativo puede tener saber aplicar la regla de extracción de raíces cuadradas o la que sirve para encontrar la fracción generatriz de un número periódico, cuando no es posible justificar ante los alumnos el porqué de esta regla, que aparece entonces como «caída del cielo»? ¿Y cuando, en la técnica o en la ciencia aparece la necesidad de pasar de un número verídico a una fracción generatriz? (...) ¡Como se puede mientras esconder a los ojos del alumno, el desorden vivo y complejo del concepto de función! (...) ¿Acaso no caemos en la cuenta de que la gran mayoría de nuestros alumnos no continuará con estudios universitarios, pero sí llegará a ser carpintero, sastre o mecánico, y tendrá graves dificultades en el desempeño de su trabajo?

El capítulo 3 se titula «¿De qué manera enseñar matemáticas?». Este título podría parecer a algunos pretencioso. Naturalmente en unas pocas páginas, estén escritas por quién lo estén, es imposible dar la receta mágica que nos permita responder a la pregunta enunciada en el título. Pero a la vez es difícil dar tantas ideas y hacer tantas reflexiones interesantes sobre cómo enseñar matemáticas como las que Emma Castelnuovo presenta en estas pocas páginas. Y es que este capítulo es eso, una mezcla convenientemente aderezada, a veces con unas gotas de ironía y otras de humor, de ideas prácticas y de reflexiones en voz alta de quien no se ha conformado con tratar de enseñar bien las matemáticas y ha empleado también el tiempo en reflexionar sobre su propia experiencia; sobre cómo y cuándo se produce el aprendizaje. Para ello parte como premisa de un planteamiento: ubicar al lector dentro de la clase, escuchar a los alumnos y sus reflexiones, deducir sobre lo que observa y construir así la ciencia, no la matemática sino la ciencia de la didáctica de las matemáticas. De los errores al plantear a los alumnos la definición como forma de llegar al concepto en vez de partir de lo que el alumno ya sabe sobre el concepto que se trata de estudiar, pasando por el tránsito de lo concreto a lo abstracto, el capitulo se dirige hacia la enseñanza de la geometría, el gran tema, la geometría intuitiva, el uso de materiales didácticos, otro de los temas constantes en la obra de Emma Castelnuovo.

En el cuarto capítulo, titulado «La Clase como *laboratorio* de didáctica de las matemáticas», retorna la idea planteada como premisa del capítulo anterior: la clase es el mejor lugar para aprender didáctica de las matemáticas. Pero para ello se debe observar lo que ocurre, interactuar con los alumnos y aprender de lo que allí sucede. Nuevamente las páginas están llenas de ideas; de ideas propias y de ideas de sus alumnos, de ideas que por fundamentadas y meditadas son atemporales:

> Nos encontramos, a veces, en clase con algún alumno un tanto excepcional, de los que suelen definirse como «sobredotados». Estos alumnos sitúan al profesor ante un problema aún más difícil que los niños con una inteligencia inferior a la normal. Es un problema de carácter psicológico: a menudo estos niños no soportan el ritmo lento de la clase diaria y tienen la sensación de estar perdiendo el tiempo. Por otra parte, estamos convencidos de que la vida en común con sus compañeros menos dotados intelectualmente, pero frecuentemente más sociables, contribuye a su madurez desde un punto de vista moral. Sería una idea absolutamente absurda, por tanto, formar con ellos un grupo aparte, alejándolos del resto. Pensamos que pueden ser muy útiles en «la clase de todos» (...)

El capítulo y el libro concluyen con las siguientes palabras:

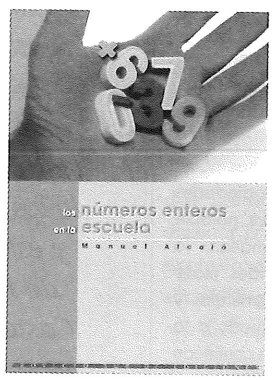
> Si todavía hoy alguien pusiese en duda el valor y el significado de las matemáticas, bastaría responderle con las palabras de Gaetano Scorza: «Las matemáticas son bellas y esto basta». Será mucho –añade– si hacemos sentir a todos esa belleza.

Invito a toda aquella persona que se dedique a la enseñanza de las matemáticas y aún no lo haya hecho, a leer este libro que es fácil encontrar en las librerías especializadas. En cuanto comience la lectura se sentirá ante un clásico. De su lectura sin duda aprenderá muchas cosas, que es la eterna tarea de los que nos dedicamos a la enseñanza.

Para terminar y para resumir las ideas vertidas en este libro, de las que tanto se puede aprender, citaré unas palabras de la propia Emma Castelnuovo en la conferencia que con ocasión del centenario del nacimiento de Pedro Puig Adam pronunció en Madrid en mayo de 2000:

> Tanto la matemática euclídea como la matemática de los conjuntos se presentan como teorías perfectamente estructuradas desde el punto de vista lógico. Pero no es una redacción perfecta lo que contribuye a estimular el interés de los alumnos, que no están en condiciones de apreciar el valor de una sistematización rígidamente lógica. Para despertar su interés, para lograr que los alumnos participen, para que la enseñanza sea viva, no es el estadio final lo que debe ser destacado, sino las vías de la investigación, el camino de las ideas.
>
> [...]
>
> Y finalmente –y este hecho no debe ser olvidado–, una construcción de la matemática que parta de lo concreto y de la realidad, hace destacar claramente las cualidades como la fantasía, la intuición, la voluntad de los chicos inmigrantes que cada día en número mayor, afortunadamente, llegarán a nuestros países.

Francisco Martín Casalderrey



LOS NÚMEROS ENTEROS EN LA ESCUELA
Manuel Alcalá
Proyecto Sur de Ediciones
Granada, 2002
ISBN: 84-8254-133-1
páginas

El autor presenta un libro muy claro y conciso sobre la problemática del trabajo en el aula con los números enteros. Va enumerando en un lenguaje asequible y cómodo de leer lo que el profesorado se plantea dentro del aula y da una serie de pautas y actividades muy bien graduadas para intentar solucionar, de la mejor manera posible, todas las dudas y situaciones que el alumnado va planteando.

Manuel Alcalá presenta un plan para acometer el tema de los números enteros desde sus experiencias en el aula, lo que hace que sea muy útil. Va desgranando, poco a poco, el proceso de aprendizaje de este tema, haciendo hincapié en los puntos del desarrollo donde se encuentran los verdaderos problemas, la resta de números enteros, explicando de forma sencilla por qué ocurre esto e intentando buscar la forma más eficaz de resolverlo.

Dentro del libro se puede encontrar una serie de fichas para el trabajo en clase, cuyo lenguaje está muy adaptado al niño entre 12 y 14 años, de manera que cada alumno las siga, de forma individual, según su ritmo de aprendizaje. El tipo de juegos que nos presenta también se adaptan de forma bastante natural al lenguaje y forma de hacer propia del alumnado, sin buscar formas rebuscadas que más que ayudar podrían entorpecer el aprendizaje.

La secuenciación del tema a lo largo de los dos cursos del primer ciclo de ESO es correcta, según mi punto de vista, pero igualmente sería útil para desarrollarlo entero en un solo curso. Además, se concreta el número de sesiones de clase necesarias para cada apartado, lo que ayuda al profesor considerablemente en la organización del aula.

En suma, este libro puede ser de una gran ayuda para el trabajo cotidiano del profesorado al exponer en sus páginas de manera esclarecedora todo el proceso de aprendizaje de los números enteros.

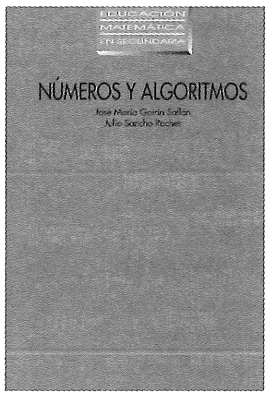
Consuelo Alonso

LEE A JULIO VERNE
El amor en tiempos de criptografía
Susana Mataix
Rubes Editorial
Barcelona, 2002
ISBN: 84-497-0015-9
160 páginas

Sean tres despreocupados personajes actuales A, B y C, embarcados en la aventura de descubrir los secretos de su juventud recién estrenada. Por necesidad, aunque con inicial desgana, intentan descifrar los mensajes codificados que el dominante padre de uno de ellos les envía, porque de los significados depende su subsistencia. Supongamos que esta tarea les induce a redescubrir las olvidadas matemáticas del bachillerato y a releer las obras de Julio Verne y otras creaciones literarias hasta encontrar sus relaciones con la criptografía. Imaginemos que una tarea tan excitante aflora las limitaciones de los protagonistas y crea vínculos y dependencia entre ellos, y una fascinación capaz de desbordarse en forma de pasión amorosa.

Si este planteamiento impusiese un acercamiento paulatino, pero inexorable de nuestros personajes a las matemáticas, a unas matemáticas inauditas y sorprendentes, y el resultado de la ecuación fuese un desenlace imprevisto, dramático e increíble, entonces estaríamos ante la verdadera historia de Cristina, Beatriz y Alejandro, los protagonistas de *Lee a Julio Verne*, una obra inclasificable, llena de amor y criptografía, donde las mujeres aprenden a jugar mientras maduran entre la ignorancia de los hombres y el (re)conocimiento de las matemáticas.

NÚMEROS Y ALGORITMOS
José María Gairín Sallán
Julio Sancho Rocher
Col. Educación Matemática en Secundaria, n.° 27
Síntesis
Madrid, 2002
ISBN: 84-9756-012-4
302 páginas



Los conjuntos numéricos han constituido tradicionalmente uno de los bloques más significativos (por no decir el que más) de los currículos de matemáticas en las enseñanzas primaria y secundaria en todos los países. De alguna forma, en la formación básica de cualquier ciudadano se ha identificado –y se sigue y se continuará haciendo–, la competencia numérica con la competencia matemática general. De ahí la relevancia que adquiere la enseñanza adecuada de estos tópicos.

La editorial Síntesis, una vez finalizada, ya hace unos años, la colección «Matemáticas: cultura y aprendizaje», va publicando nuevos títulos en esta segunda colección –«Educación matemática en secundaria»– dirigida por Miguel de Guzmán y Luis Rico, lo cual ya es una garantía de calidad. El último libro aparecido es *Números y algoritmos* del que son autores José María Gairín y Julio Sancho, y está dedicado a los naturales y a los racionales positivos.

Las razones por las que se han elegido estos dos conjuntos numéricos y los objetivos que tiene este libro constituyen el primer capítulo del mismo.

En los siguientes capítulos se abordan los números naturales. Después de una reflexión inicial sobre el sentido numérico y el papel de los naturales en secundaria, se van desarrollando, sucesivamente, los principios y técnicas de recuento, los sistemas de numeración y dedica un extenso capítulo a los algoritmos de cálculo con números naturales en sus tres formas clásicas: mental, con lápiz y papel y mecánico o con calculadora. Esta parte finaliza con una introducción en la demostración matemática, limitada al campo de la matemática discreta «por entender que es un medio muy adecuado para que los estudiantes conozcan y utilicen herramientas y métodos característicos del quehacer de los matemáticos».

En la segunda parte del libro se tratan los números racionales positivos, «partiendo de la premisa de que la construcción cognitivamente efectiva de las ideas de número racional debe realizarse modificando las ideas previas sobre el número natural». En este sentido se reflexiona sobre los aspectos que se pueden abordar en secundaria y en consonancia con estas reflexiones, en los siguientes capítulos, se hace una descripción de las tareas que comporta la actividad de medir, un examen de los distintos significados de los racionales positivos, se analizan las potencialidades y limitaciones de distintos sistemas simbólicos utilizados para expresar cantidades no enteras y se concluye con un estudio, desde cada uno de dischos significados, de las relaciones y operaciones de estos números.

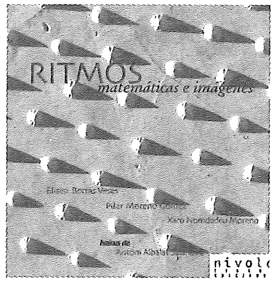
Para terminar se dedica un capítulo al estudio de los números grandes y pequeños, cuyo manejo adecuado supone desarrollar una parcela importante del sentido numérico de los alumnos, para que no les pase como a cierto concejal que dijo que una deuda de su ayuntamiento de setenta mil millones de las viejas pesetas, suponía amortizar dos millones de las mismas, cada segundo, durantes treinta años.

En cada uno de los capítulos se incluye una exposición acerca de los aspectos matemáticos y didácticos del tema analizado. Todos ellos están salpicados de múltiples actividades dirigidas al alumnado de Educación Secundaria.

No quiero hacer ninguna valoración personal sobre la bondad de este libro ya que, por razones obvias, alguien me podría acusar de una cierta falta de objetividad y no le faltaría razón. José María y Julio son unos entrañables amigos, con los que he compartido muchas cosas, y me resultaría difícil criticarles negativamente algo y menos este libro que sé fehacientemente que lo han hecho con una gran dedicación y con todo el cariño del mundo. Pero, además de amigos, Julio Sancho y José María Gairín son unos extraordinarios profesionales de la enseñanza de la matemática en diversos ámbitos y han conseguido con esta obra un gran resultado; efectivamente, *Números y algoritmos* es un excelente libro, que puede resultar extraordinariamente útil al profesorado de secundaria. No quería... pero al final lo he dicho. De todas las formas, ruego al lector que antes de acusarme de «lesa amistad», lea el libro y luego me diga si tengo razón.

Emilio Palacián

RITMOS: MATEMÁTICAS E IMÁGENES
Eliseo Borrás, Pilar Moreno y Xaro Nomdedeu
Haikus de Toni Al-balat
Nivola
Madrid, 2002
ISBN 84-95599-42-2
336 páginas



La estructura del libro es muy sencilla, son 50 capítulos que corresponden a 50 fotografías. «Presentamos una fotografía, la miramos y creamos un haiku. Hemos elegido este tipo de poema por su capacidad de síntesis, fuerza visual y ritmo. A continuación, intentamos descubrir algunos de los elementos repetitivos que la configuran mediante un posible modelo matemático».

El libro está agrupado en cuatro partes, atendiendo a la forma de producir la repetición: simetrías, proyecciones, enrollamientos y fractales. Las fotos van apareciendo por orden de complejidad en las técnicas matemáticas utilizadas.

En muchos casos, los algoritmos que se proponen se han desarrollado como programas de ordenador en lenguaje MSWLOGO 6.3c de Softronics Inc, http://www.softronix.com, que puede bajarse libremente de Internet. Estos programas son fácilmente transcribibles a otros lenguajes de programación. Se proporciona una dirección en la red para ver y bajar, si así se desea, los programas que se han realizado a lo largo del libro.

El libro puede ser leído con diversos grados de complejidad, según los conocimientos matemáticos de quien lo lea. «Esperamos que este trabajo cree vínculos afectivos con la Matemática; muestre que una mirada matemática de las cosas es siempre posible y que, como en una novela o en una canción, pueda aparecer la emoción, el misterio y la belleza».

Agunos títulos de capítulos son tan sugerentes como: Cuatro lunas, Flor de las brujas, Agujero negro, Triple fuga, Calabazas, Estrella roja, Pórtico de la Gloria, Paralelas peligrosas, Rizos naturales, Coreografía de Javier Carvajal, Maroma verde, Botánica fractal...

XI JAEM

XI JORNADAS para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

Las JAEM se han convertido en un lugar para la reflexión, información, debate y búsqueda de soluciones a los retos que plantea el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Son, además, un momento propicio para encontrarse con personas que comparten profesión y deseos de mejorarla, lo que conlleva la creación de contactos y lazos de amistad entre los asistentes.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas invita a participar en estas XI JAEM a todo el profesorado, cualquiera que sea el nivel en el que trabaje porque todos tenemos algo que aportar y algo que aprender.

La Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas en sus Bodas de Plata, organizadora del evento, les espera con los brazos abiertos deseándoles unas provechosas Jornadas y que disfruten de su estancia en las Islas.

Las XI JAEM se desarrollarán en Santa Cruz de Tenerife los días 2, 3 y 4 de julio de 2002 y en Las Palmas de Gran Canaria el día 5.

Programa científico

El Comité de Programas, presidido por Xavier Vilella, está formado por Luis Balbuena, Concepción García, Juan Antonio García, Margarita Marín, Emilio Palacián y Manuel Pazos.

El contenido científico de las XI JAEM se distribuye en Conferencias Plenarias, Núcleos temáticos con Ponencias, Comunicaciones, Talleres, Zoco matemático y Exposiciones. Con ello se ofrecen intervenciones para la reflexión y el debate y se da al profesorado la posibilidad de transmitir sus ideas y experiencias.

CONFERENCIAS PLENARIAS

- CLAUDI ALSINA. El Teorema del amor. Demostración completa.
- CARMEN AZCÁRATE. Profesores de Matemáticas: de matemáticos a profesores.
- MANUEL FERNÁNDEZ REYES. Algunas reflexiones sobre lo que nos queda por hacer.
- MARTÍN KINDT. Una excursión en el paisaje geométrico del pintor Alberto Durero.

NÚCLEOS TEMÁTICOS

1. Modelizar la realidad

- MIQUEL ALBERTÍ. Pa´Tangke Lumu´: realidad lejana, matemática cercana.
- PINO CABALLERO. Matemáticas para la Seguridad Cotidiana.
- JOSEP GASCÓN. El espacio de las Organizaciones Didácticas posibles en las Instituciones docentes.
- CARLOS USÓN. Un universo de certezas a la dulce sombra de la regularidad.

2. A vueltas con los números

- DAVID BARBA. Los números antes y ahora y el tratamiento de la diversidad... de los docentes.
- MARÍA LUZ CALLEJO. Números que dan que pensar.
- MANUEL FERNÁNDEZ CABALLERO. Los otros números.
- ANTONIO R. MARTÍN ADRIÁN. Los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡Han muerto, pero no han sido enterrados!
- JOSÉ A. MORA y SALVADOR CABALLERO. Calculadora para alumnos con dificultades en Matemáticas.
- MARTÍN M. SOCAS. Transición del pensamiento numérico al algebraico. Problemas de aprendizaje.

3. La geometría desde diferentes perspectivas

- MENCHU BAS. Ver, construir y tocar la Geometría. Utilización didáctica de los materiales.
- AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ. Descubrir la Geometría con la ayuda de las nuevas tecnologías.
- NURIA GORGORIÓ. Geometría y visualización a lo largo del currículo.
- JOSÉ MUÑOZ, JUAN A. HANS y ANTONIO FERNÁNDEZ-ALISEDA. Miscelánea geométrica.

4. Estadística y probabilidad: educar para controlar el azar

- JOSÉ COLERA. La azarosa andadura de la enseñanza del azar.
- ANDRÉS NORTES. Tratamiento estadístico en el aula de la realidad diaria.

- ANTONIO PÉREZ JIMÉNEZ. ¡Al fin puede Pepito aprender probabilidad!
- MARISA SORIANO y EMI PARDO. Matemáticas en la Educación infantil. Una manera de organizarse.

5. El cálculo hoy. Perspectivas de futuro

- ANTONIO MARTINÓN. La enseñanza del cálculo en la Educación Secundaria.
- FRANCISCO PUERTA GARCÍA. Calculadoras y currículo: de las cuatro reglas al cálculo simbólico.
- MODESTO SIERRA. De L´Hopital a las nuevas tecnologías: algunos aspectos de la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático.
- PILAR TURÉGANO. La integral definida en la Enseñanza Secundaria.

6. Conexiones

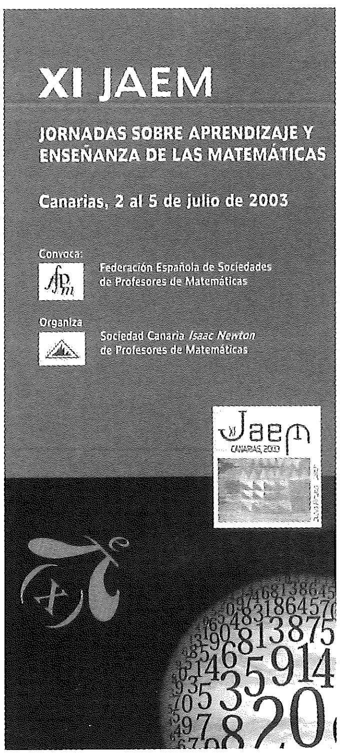
- SILVIA MARGELI y ÁNGEL ALSINA. Manipulación e imagen virtual en la clase de matemáticas.
- JOSÉ L. MONTESINOS. Las Matemáticas y el Absolutismo Político: Hobbes.
- ÁNGELA NÚÑEZ. Aprendizaje de las Matemáticas con «Descartes»: un recurso interactivo en INTERNET.
- NURIA PLANAS. Identidad y conflicto en el aula de Matemáticas multicultural.
- COVADONGA RODRÍGUEZ-MOLDES. Matemáticas más allá del currículo.
- ADELA SALVADOR. ¿Dónde hay fractales?

7. Problemas no matemáticos del profesorado de Matemáticas

- MANUEL ALCALÁ. Aprender a ser a través de la Educación Matemática.
- FERNANDO ALONSO. La innovación de cada uno.
- JAVIER BRIHUEGA. La Programación.
- MANUEL GARCÍA DÉNIZ y JOSÉ A. RUPÉREZ. Esta semana... ¿qué hacemos? Dinamización de las matemáticas en los Centros Educativos.
- SANTIAGO LÓPEZ ARCA. Pasaba por aquí y me vi atrapado en la ESO.
- JOSÉ A. LÓPEZ VARONA. Los estudios de evaluación nacionales e internacionales: información sobre el sistema.

COMUNICACIONES, TALLERES Y ZOCO

Los asistentes pueden presentar Comunicaciones, preferentemente, en torno a los contenidos de los distintos núcleos temáticos, desarrollar Talleres sobre temas que consideren de interés y exponer en el Zoco Matemático todo tipo de materiales didácticos, póster, experiencias, etc. para lo cual dispondrán de un tiempo y un espacio específicos para ello.



La extensión máxima de cada Comunicación será de CINCO páginas DINA4, lo que equivale a unos 11.000 caracteres.

El plazo de presentación de propuestas se cierra el 1 de abril de 2003.

Antes del 15 de mayo de 2003, se comunicará al interesado si su propuesta ha sido aceptada por el Comité de Programas.

Las normas precisas para la presentación de trabajos, así como el modo de envío de originales, están expuestos en la web de las XI JAEM:

www.sinewton.org/xi_jaem

o se puede solicitar a:

Apartado de correos 329,

38280 La Laguna -Tenerife.

xi_jaem@sinewton.org

Otras actividades

- Exposiciones didácticas.
- Actos culturales y sociales.
- Programa de acompañantes.
- Exhibición y venta de materiales de casas comerciales, Sociedades Federadas y de la propia Federación.

Alojamiento y desplazamiento

Para todas las cuestiones relacionadas con alojamientos y viajes, dirigirse a la Secretaría Técnica de las XI JAEM.

En la WEB de las XI JAEM se encontrará Información actualizada sobre esos temas.

Cómo formalizar la inscripción

- Rellenar el boletín de inscripción y enviarlo junto con la copia del justificante de pago de la cuota o el talón nominativo a la Secretaría Técnica. También se puede enviar al fax: 922 33 68 16 (a la att. de Fabiola Rodríguez Martín).
- Abonar la cuota de inscripción mediante:

  - Transferencia a la cuenta de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas en Cajacanarias: 2065 0001 54 3000042488

    (Indicar con claridad el nombre y los apellidos)

  - Talón nominativo a favor de SCPM Isaac Newton.
- A través de Internet. Cumplimentar el formulario que figura en la web de las XI JAEM:

  www.sinewton.org/xi_jaem

Cuota de inscripción

	Hasta el 15 de Mayo	Después del 15 de Mayo
Socios de la FESPM	84 Euros	118 Euros
No socios	143 Euros	186 Euros

Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de la cuota de inscripción que se realicen antes del 15 de mayo de 2003.

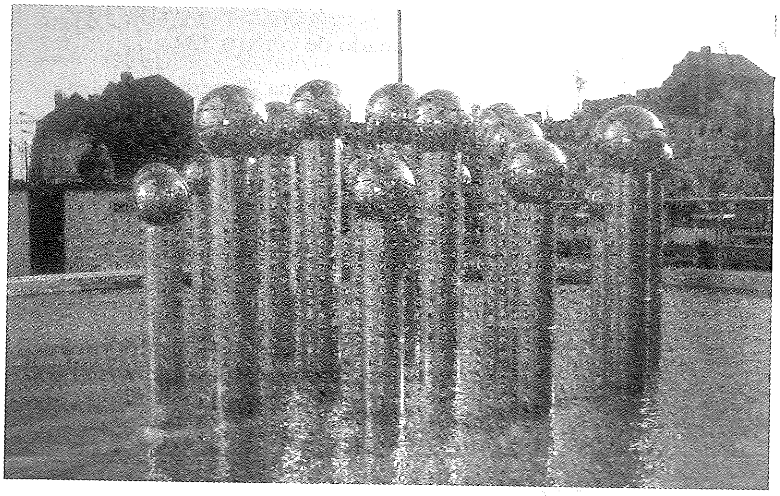
Más información

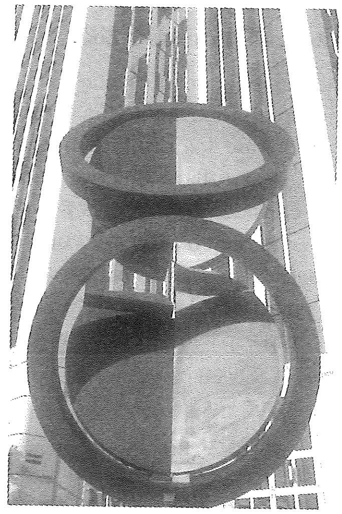
Comité Organizador

Apartado de correos 329,
38280 La Laguna (Tenerife)
Teléfono 922641061 / Fax 922640037
e-mail: xi_jaem@sinewton.org

Secretaría Técnica

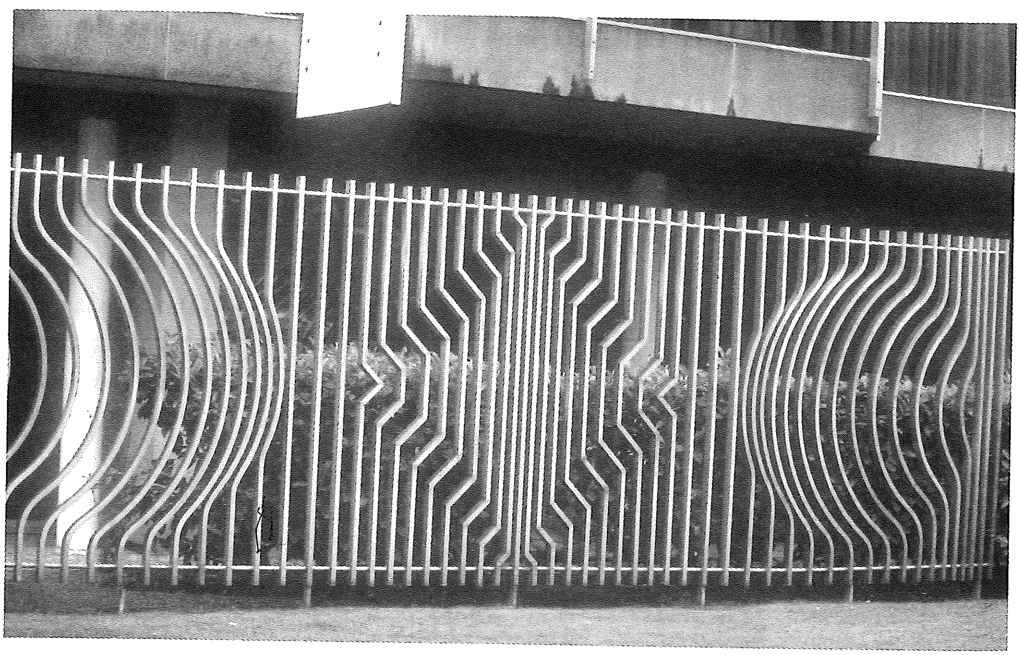
I.J&Asociados
Cl. Tomás Zerolo, 17
38300 La Orotava (Tenerife)
Tfn.: 922 33 68 15 / 922 32 39 80
Fax 922 33 68 16
e-mail: info@ij-asociados.com





Bruxelas

(Fotos: Pilar Moreno)



NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	21 €	10 €
Centros	30 €	10 €
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección: . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.°______ (3 números)

☐ N.ºs sueltos:______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente

Entidad ☐☐☐☐ Oficina ☐☐☐☐ DC ☐☐ Cuenta ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM