SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 37

JUNIO
2001

SUMA 37
junio 2001

Índice

Directores
Emilio Palacián Gil
Julio Sancho Rocher

Administrador
José Javier Pola Gracia

Consejo de redacción
Jesús Antolín Sancho
Eva Cid Castro
Bienvenido Cuartero Ruiz
Faustino Navarro Cirugeda
Rosa Pérez García
Daniel Sierra Ruiz

Consejo Editorial
José Luis Aguiar Benítez
Javier Brihuega Nieto
M.ª Dolores Eraso Erro
Ricardo Luengo González
Luis Puig Espinosa

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
E. Palacián, J. Sancho, D. Sierra

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.500 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

3 **EDITORIAL**

SEMINARIO FESPM

5 Seminario de reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas.
Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas

INFORME 2000

27 El Año Mundial de las Matemáticas: una valoración.
José L. Fernández, Manuel de León, M.ª Jesús Luelmo y *Juan Luis Vásquez*

33 Actividades en el 2000: algunas nubes en un día radiante.
Xavier Vilella Miró

39 El Año Mundial de las Matemáticas en Andalucía.
Antonio Pérez Jiménez

43 El Año 2000 en La Rioja.
Javier Galarreta Espinosa

47 2000, Año Mundial de las Matemáticas: una experiencia práctica.
Rosario Baños, Antonia Garre, Juan Carlos Marco, Fco. Javier Tomás, Antonia Conesa y *Salvador Escudero*

ARTÍCULOS

55 La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación.
M. O. Lago, P. Rodríguez, C. Dopico y M. J. Lozano

63 Una propiedad del triángulo isósceles.
Juan-Bosco Romero Márquez

67 Sobre la utilidad de la Geometría en la enseñanza de la Probabilidad.
Gabriel Ruiz Garzón

75 Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul.
Miguel Ángel Moreno Redondo

83 Algunas dificultades en los problemas aditivos.
Alicia Bruno, Antonio Martinón y Fidela Velázquez

95 Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento.
Marcelino J. Ibañes Jalón

MISCELÁNEA

99 La Creación de los Números.
Luis Balbuena Castellano

RINCONES

105 Taller de problemas: Isoperimetros: Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades.
Grupo Construir las Matemáticas

111 Mates y medios: Las gráficas de la prensa.
Fernando Corbalán

113 Juegos: Cubo de Muñoz.
Grupo Alquerque

113 Recursos en Internet: matemáticas interactivas en Internet.
Falvio Piñeiro Sarille

125 Desde la Historia: Por una lectura detenida de la Historia.
Carlos Usón Villalba y *Ángel Ramírez Martínez*

129 **RECENSIONES**

Historia de la Matemática (J. Rey Pastor y J. Babini). Lectura matemática de un periódico (A. Fernández-Aliseda, D. Aceituno, J. Muñoz, A. Jiménez y M. del Pozo). Una recreación matemática: historias, juegos y problemas (J. Deulofeu). Fotografía matemática «Andalán» (P. Alonso, J. Antolín, V. Bernardo, R. Esteban, J. García y Mª Concepción Pastor –coords.–). Estimar les matemàtiques (C. Alsina). Laberintos, nº 2 (IES Elaios).

137 **CRÓNICAS**

María Pilar Plaza Queralt: II Premio Gonzalo Sánchez Vázquez. Concurso de problemas de ingenio de la SAEM Thales de Almería. XXXVII Olimpiada Matemática Española.

141 **CONVOCATORIAS**

X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (X JAEM). XII Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM

Asesores

Pilar Acosta Sosa
Claudi Aguadé Bruix
Alberto Aizpún López
José Luis Álvarez García
Carmen Azcárate Giménez
Manuel Luis de Armas Cruz
Antonio Bermejo Fuentes
Javier Bergasa Liberal
María Pilar Cancio León
Mercedes Casals Colldecarrera
Abilio Corchete González
Juan Carlos Cortés López
Carlos Duque Gómez
Francisco L. Esteban Arias
Francisco Javier Fernández
José María Gairín Sallán
Juan Gallardo Calderón
José Vicente García Sestafe
Horacio Gutiérrez Fernández
Fernando Hernández Guarch
Eduardo Lacasta Zabalza
Andrés Marcos García
Ángel Marín Martínez
Félix Matute Cañas
Onofre Monzo del Olmo
José A. Mora Sánchez
María José Oliveira González
Tomás Ortega del Rincón
Pascual Pérez Cuenca
Rafael Pérez Gómez
Antonio Pérez Sanz
Ana Pola Gracia
Ismael Roldán Castro
Modesto Sierra Vázquez
Vicent Teruel Marti
Carlos Usón Villalba

SUMA
no se identifica necesariamente
con las opiniones vertidas
en las colaboraciones firmadas

SUMA 37
junio 2001

Informe 2000

EDITORIAL

EN EL EDITORIAL del último número de SUMA la Presidenta de la Federación hacía un breve balance de lo que había supuesto el Año 2000 en la sociedad española en general y en nuestra organización más concretamente.

Ya mediado el dos mil más uno hemos querido presentar en la revista un informe que recogiese cinco aspectos diversos de las realizaciones del Año Mundial de las Matemáticas.

En el primer artículo se recabó la colaboración de quienes podían tener una mejor visión de conjunto, como es la Comisión Permanente del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000 (CEAMM2000), para que desde su atalaya hiciesen una valoración global.

La Federación, a través de la Secretaría de Actividades, está recopilando todas las actividades que han llevado a cabo las sociedades federadas en los famosos 365 días. Desde allí se ha hecho una síntesis de los dos millares de jornadas, conferencias, cursos, exposiciones, concursos, salidas a los medios de comunicación, y un larguísimo etcétera en los que han intervenido de forma activa nuestras sociedades.

El tercer punto de vista lo proporcionan las propias sociedades federadas, con dos ejemplos extremos, el de una sociedad con un gran número de socios totalmente consolidada y el de una pequeña que se incorporó a la Federación, precisamente al comenzar el año mítico. «Thales» y «A prima» describen cómo se vivió el 2000 en sus respectivas comunidades, Andalucía y La Rioja.

En cientos de colegios e institutos se han realizado múltiples actividades matemáticas con el pretexto del Año mundial. El quinto y último artículo del informe recoge las que se han hecho en un instituto, el IES n.° 3 de San Javier (Murcia).

El 2000 ya ha pasado, estamos en el 2001 y hay que mirar al presente y al futuro. La Federación sigue con sus actividades habituales; cuando este número salga de la imprenta coincidirá con la fase nacional de la Olimpiada en Cantabria, con los preparativos finales de las JAEM en Aragón, con el diseño de un seminario en Canarias, con la preparación de un nuevo título del Servicio de Publicaciones, con la preparación de la celebración del día escolar de las matemáticas, con el inicio de la confección del número 38 de SUMA, con…

En la última Junta de Gobierno se admitió la incorporación a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas a dos nuevas sociedades: la Sociedad Melillense de Educación Matemática y la Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA). A ambas, nuestra más cordial bienvenida y los mejores deseos para que cumplan sus objetivos, que en definitiva no son otros que la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Con estas dos nuevas incorporaciones ya son diecinueve las sociedades federadas, lo que hace de nuestra Federación una de las organizaciones más importantes en el campo educativo en España.

SUMA 37
junio 2001, pp. 5-25

Seminario de reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas*

La Gomera, 12, 13 y 14 de octubre de 2000

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas

SEMINARIO FESPM

A Ricardo Lorenzo in memoriam

EL SEMINARIO DE REFLEXIÓN sobre la Enseñanza de las Matemáticas fue planificado por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas como una contribución a los actos del año 2000, aprovechando, además, que podía ser el complemento deseable al encuentro celebrado por la Sociedad Emma Castelnuovo en El Escorial en el mes de noviembre del año 1998. Aquel encuentro significó una valoración de los nuevos currículos aplicados en la Educación Secundaria Obligatoria y de la situación en que se encontraba su puesta en práctica; de él dimanaron una serie de recomendaciones a las Administraciones Públicas sobre aspectos inicialmente previstos por la Ley e incumplidos o insuficientemente desarrollados hasta ese momento en su realización. Independientemente del grado de respuesta obtenido (insuficiente a todas luces) de los organismos a los que, en razón de sus competencias, se les hizo llegar las conclusiones, parecía llegada la ocasión de comenzar una reflexión de los docentes y para los docentes sobre la enseñanza de las Matemáticas en la etapa obligatoria, que complementara el carácter general del documento de El Escorial. En efecto, aquel era un documento de referencia imprescindible para entender los problemas globales del área en la etapa Secundaria, pero no existía un documento similar referido a la Educación Primaria ni tampoco uno en forma de prontuario didáctico que facilitara al profesorado pautas para su ejercicio profesional. Así, y dentro de las actividades de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, y respaldada por la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias y el Cabildo de la Isla, se celebró en La Gomera, en octubre de 2000, el Seminario de Reflexión sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la etapa obligatoria, cuyos objetivos y metodología se describen a continuación. Se formaron tres comisiones de trabajo: una de Educación Primaria y dos

* Documento elaborado en el Seminario convocado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizado por la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Fue coordinado por Manolo Fernández Reyes y se celebró en La Gomera los días 12, 13 y 14 de octubre de 2001.

El presente informe ha sido redactado por: Pilar Acosta Sosa, Luis Balbuena Castellano, Manuel García Déniz, Dolores Godoy Delgado, Ana Alicia Pérez Hernández, Ana Trujillo La Roche y Fidela Velázquez Manuel. Todos ellos agradecen la meticulosa revisión del original realizada por el Centro de Desarrollo Curricular dependiente de la Consejería de Educación y en especial a José Luis Aguiar Benítez.

de Educación Secundaria Obligatoria (dado el elevado número de participantes de esta etapa). Sus conclusiones se recogen en los capítulos que siguen, uno dedicado a Primaria y otro a la ESO, en el que se han unificado las de sus dos comisiones.

Génesis y organización del Seminario

El Seminario se gesta inicialmente en las XX Jornadas de la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas, en febrero de 2000, cuando, en una reunión celebrada ex profeso entre miembros de la Sociedad, del Comité Canario del año 2000 y de la Consejería de Educación, se plantea la necesidad de realizar una aportación curricular a la celebración del 2000, y una reflexión sobre la problemática de la enseñanza de las Matemáticas en la educación obligatoria. El documento de El Escorial, buen punto de partida para la reflexión, tenía dos aspectos necesitados de ampliación: uno relativo a la cobertura de la reflexión (se veía necesario ampliarla al resto de la enseñanza obligatoria, incorporando la Educación Primaria), y otro referido a la operatividad del documento para el uso inmediato del profesorado en ejercicio en las etapas de la enseñanza obligatoria. Esa formulación de sugerencias en forma de prontuario didáctico no fue uno de los objetivos de aquel Seminario, pero parecía una necesidad creciente entre el profesorado, el cual echaba en falta un documento de esas características en el ámbito del área, y a esa tarea se aplicó la Sociedad. La Federación respaldó la propuesta de la Sociedad Canaria en la siguiente reunión de su Junta de Gobierno y en el breve espacio de tiempo del que se dispuso (con las vacaciones de verano por medio), y venciendo obstáculos ajenos e imprevisibles (cambio obligado de sede de la sociedad), el Seminario tuvo lugar, como estaba previsto, en octubre de 2000.

El Seminario se organizó de acuerdo con la siguiente metodología y secuenciación del trabajo:

- Recepción, por la sociedad organizadora, de las propuestas del resto de sociedades federadas con documentos importantes para su análisis y debate, como punto de partida.
- Remisión a todas las sociedades de un listado definitivo de documentos que se pueden utilizar.
- Recepción, por la Sociedad «Isaac Newton», de las propuestas de epígrafes para la elaboración de un cuestionario, y de los nombres de los participantes de cada una de las sociedades federadas.
- Elaboración del cuestionario de debate, por la Sociedad Canaria, según las aportaciones de las sociedades.
- Remisión del cuestionario de debate.
- Recepción por la organización de las respuestas a los cuestionarios.
- Elaboración, por la Sociedad «Isaac Newton», del documento síntesis de los cuestionarios recibidos, que será el punto de partida del debate en el foro de la Gomera.
- Remisión a las sociedades del documento de síntesis de conclusiones.

Las respuestas a los cuestionarios y las intervenciones durante el Seminario dieron lugar a las ideas que se abordan en este documento y que son comunes a las dos etapas de la educación obligatoria…

Objetivos del seminario

- Analizar la situación actual de la Enseñanza de las Matemáticas en la educación obligatoria a partir de los documentos de evaluación existentes.
- Elaborar unos principios de Educación Matemática para la enseñanza obligatoria enmarcados en una propuesta de educación para el futuro.
- Actualizar el decálogo del profesor de Matemáticas (Puig Adam), como punto de partida de la elaboración de unos futuros estándares curriculares.
- Planificar la revisión periódica de los documentos elaborados, favoreciendo una propuesta dinámica como fruto de una reflexión permanente.

Las respuestas a los cuestionarios y las intervenciones durante el Seminario dieron lugar a las ideas que se abordan en este documento bajo los epígrafes que siguen, y que son comunes a las dos etapas de la educación obligatoria y que conforman el cuerpo del documento de partida para un debate que se pretende que sea amplio y que tenga continuidad.

Estructura y currículo de las etapas que conforman la educación obligatoria

Durante muchos años, decir matemáticas en la educación obligatoria, sobre todo en la Educación Primaria, quería decir en realidad aritmética y cálculo. En cierta medida, esta concepción se ha prolongado hasta la actualidad, por lo que el resultado en este momento es un currículo real que no favorece la aparición de la intuición y el razonamiento matemático ni la resolución de problemas, y que sólo

estimula las actividades mecánicas. Este modelo de práctica curricular convierte al alumnado, paulatinamente, en receptor pasivo de reglas y procedimientos más que en participante activo de la creación de su propio conocimiento matemático. No obstante, y desde los nuevos currículos oficiales, en los últimos tiempos, se ha solicitado cada vez más del docente que sustituya o equilibre el enfoque centrado en habilidades de cálculo con otros que hacen más hincapié en los conceptos, esto es, en la comprensión y aprehensión conceptual de las matemáticas. Esto ha obligado al profesorado en ejercicio y a los libros de texto a centrar su atención en la forma de enseñar y aprender los conceptos matemáticos fundamentales, a pesar de que aún la mayor parte del tiempo se emplee en resolver cálculos. Para complicar todavía más el panorama, se exige de las matemáticas menos cuestiones de contenido que formas de pensar y de razonar. En esta línea, al profesorado se le ha presentado una materia cambiante en cuanto al enfoque, lo que implica nuevas maneras de enseñar y evaluar. Estas demandas curriculares de cambio en matemáticas han coincidido con una reforma profunda de las etapas que conforman la educación obligatoria (y en Primaria, del profesorado que la imparte, incluida su formación matemática inicial), lo que supone para la comunidad educativa matemática la necesidad de redoblar sus esfuerzos para que esos cambios pretendidos para la educación matemática en la enseñanza obligatoria lleguen en realidad a todo el profesorado, y que el currículo diseñado para las dos etapas pase de ser un «currículo deseado» a ser un «currículo de facto». Este currículo ha de caracterizarse, y así se hace en el conjunto de recomendaciones que se plantean, por una serie de premisas que intentaremos resumir a continuación.

En primer lugar, aprender matemáticas significa aprender su uso, lo que ha supuesto que las comisiones hayan pretendido poner el énfasis en el «hacer» más que en el «conocer».

En segundo lugar, las comisiones han remarcado la necesidad de adecuación y aprovechamiento de las nuevas tecnologías como herramientas que facilitan la tarea, pero considerándolas como medio y no como fin, lo que nos llevaría a *una tercera premisa* básica que fue desarrollada: conviene (pero no en lugar de, sino además de) que los estudiantes tengan cierta maestría en el cálculo de algoritmos de lápiz y papel, cuyo conocimiento ha de surgir de las situaciones problemáticas necesitadas de su uso.

…desde los nuevos currículos oficiales, en los últimos tiempos, se ha solicitado cada vez más del docente que sustituya o equilibre el enfoque centrado en habilidades de cálculo con otros que hacen más hincapié en los conceptos, esto es, en la comprensión y aprehensión conceptual de las matemáticas.

Por último, *la cuarta premisa* que destacaríamos sería que las matemáticas contenidas en el currículo han de ser apropiadas para todos los estudiantes, por lo que el profesor ha de dotarse de herramientas que le permitan a éstos desarrollar personalmente sus propios talentos y capacidades, conseguir sus logros, y satisfacer sus necesidades e intereses.

Metodología

La metodología que se indica parte, en todo caso, de que el aprendizaje de las matemáticas se produce en una situación de interacción con el área, y preferentemente en un entorno de resolución de problemas. Por poner un ejemplo con el aspecto más desarrollado en la enseñanza de las matemáticas, la pretensión última es que la experiencia matemática directa desarrolle la capacidad de hacer cálculos y no al revés. En ambas etapas, las comisiones respectivas ofrecen sugerencias de qué trabajos serían los más adecuados, en qué contextos se plantearían las distintas modalidades de agrupamientos, qué aspectos matemáticos han de reforzarse mediante la verbalización y la discusión, cómo y con qué finalidad se deben realizar prácticas metodológicas alternativas y qué papel ocuparía la explicación del profesor, entre otros aspectos metodológicos relevantes. Las situaciones familiares para la aprehensión de reglas, las situaciones complejas que permitan ser abordadas desde distintos puntos de vista, los agrupamientos y la apertura y flexibilidad de las situaciones entran dentro del abanico de propuestas desarrolladas, centradas todas ellas en la coherencia y el equilibrio entre los distintos aspectos curriculares.

Evaluación

La evaluación se considera como una ayuda para que el profesor conozca lo que los estudiantes saben, y poder tomar las correspondientes decisiones docentes. Para ello, las comisiones sugieren que los cambios que ha de interiorizar el profesor han de afectar también al proceso de evaluación. Al cambiar el concepto de lo que significa saber y enseñar matemáticas, también ha de cambiar coherentemente la evaluación. Las propuestas de las comisiones se centran en un modelo de evaluación que vaya paralelo (o mejor, que se integre) en el desarrollo de la docencia, que tenga en cuenta los diversos procedimientos y todos los aspectos del conocimiento matemático, y que actúe

como retroalimentación en la evaluación y la revisión del currículo y de su metodología. No obstante, la complejidad de esta íntima conexión curricular del proceso de evaluación merece, al entender de las comisiones, un espacio singular del mismo tipo que este Seminario de reflexión.

Materiales y recursos

Las comisiones han dado una gran importancia al uso de los materiales y recursos. Los materiales de los que se habla en el documento como idóneos son los manipulativos, los audiovisuales, los de nuevas tecnologías (calculadora, ordenador) y los materiales impresos, con una especial referencia a los libros de texto. Los materiales manipulativos son destacados como primer estadio de la construcción matemática; los audiovisuales como referente cercano a la realidad del alumno; los de nuevas tecnologías por la facilidad de acceso que proporcionan a determinados contenidos matemáticos, y los impresos por ser de inestimable ayuda para el profesor y para el alumnado. El uso de los materiales, sobre todo aquellos cuyo nivel de manipulación y de interacción sensorio-mental es importante (manipulativos, audiovisuales, de nuevas tecnologías), favorece el desarrollo de la experiencia matemática y de los procesos inductivos, de tanto valor en las edades que nos ocupan. La manipulación y la percepción de distintas situaciones y objetos permiten realizar las operaciones concretas mediante las cuales los individuos de estas edades pueden realizar de manera gradual el tránsito a las operaciones lógicas y a las formalizaciones, al final del período de escolarización obligatoria. Objetos físicos y posteriormente representaciones simbólicas (materiales impresos) permiten, pues, avances sustanciales en el conocimiento matemático, favoreciendo el tránsito de las informaciones concretas sobre la realidad y la experiencia inmediata (pensamiento inductivo) a etapas más complejas propias del pensamiento formal y deductivo, mediante un proceso constructivo del pensamiento matemático que tiene la deducción como meta final de un largo proceso aproximativo a la realidad por medio de su matematización.

El papel del profesorado

Los cambios curriculares han planteado un cambio en el papel del profesor. Mayor profesionalización y más amplia y permanente formación son las grandes exigencias que ese nuevo papel ha supuesto para el profesorado. Al profesor se le asigna un mayor protagonismo en la toma de decisiones curriculares, aumentando su autonomía y pidiéndosele un mayor compromiso de concreción de las decisiones de enseñanza-aprendizaje. Estas tareas, nuevas y distantes de la mera ejecución de decisiones curriculares externas, exigen múltiples reflexiones teóricas, no sólo del ámbito disciplinar, una concepción profesional contextualizada, y un profesorado en continua formación profesional vinculada al propio ejercicio de la docencia, reflexionando sobre su práctica, investigando, innovando… Todo ello exige cambios profundos en la cultura profesional y de formación. Es preciso contar con un profesorado motivado y formado, para lo que es necesario una reflexión profunda desde todos los sectores que atienden a la formación del profesorado, tanto inicial como permanente, y desde los propios centros docentes y las Administraciones Públicas, dotando al mismo de herramientas adecuadas para asumir los nuevos retos y demandas. Asimismo, el profesorado ha de ocupar, por pleno derecho, un terreno que le es propio y donde se espera de él una actitud abierta, crítica, creativa, colaborativa y de afecto hacia el área y hacia el alumnado.

Los cambios curriculares han planteado un cambio en el papel del profesor. Mayor profesionalización y más amplia y permanente formación son las grandes exigencias que ese nuevo papel ha supuesto para el profesorado.

Recomendaciones

El apartado dedicado a las recomendaciones ha de tener el valor de una primera reflexión sobre los aspectos didácticos por un profesor de matemáticas para las etapas de la educación obligatoria. No obstante, y así fue entendido por los miembros de las comisiones, éste es un mero punto de partida para un trabajo más detenido que desarrolle el documento, de modo que cada una de las recomendaciones se comente y se complemente con referencias concretas y ejemplificaciones desarrolladas de cada uno de los epígrafes.

Tal fue el objetivo que se marcaron los miembros de las comisiones, emplazándose para un segundo encuentro transcurridos dos años. Esta tarea constituye un reto que pretendemos hacer extensivo a todo el profesorado lector de estas propuestas, al que animamos a formar sus propios grupos de trabajo, y cuyas aportaciones serán bien recibidas por las comisiones.

Educación Primaria

Estructura y currículo de la etapa

- En la educación de cualquier persona, las Matemáticas desempeñan

un papel primordial desde la Educación Infantil. En la Educación Primaria ha desempeñado, desempeña y desempeñará un papel básico. No se reduce a la numeración y a las cuatro reglas, sino que se comienza a formar y asentarse el pensamiento matemático que a la postre resultará fundamental para el desarrollo de las Matemáticas y del resto de las áreas.

- El fin primordial del trabajo matemático es iniciar a los niños y a las niñas en el modo de pensar y de expresión que caracteriza las Matemáticas. Ello ha de permitir desarrollar algunas habilidades intelectuales:
  - — Establecer relaciones, ordenar, clasificar, organizar.
  - — Iniciarse en una expresión que utiliza una terminología y un simbolismo cada vez más preciso.
  - — Argumentar y alcanzar conclusiones por sí mismo.
  - — Resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando los conceptos y procedimientos propios del área.
- El carácter globalizador de la Educación Primaria, sobre todo en los dos primeros ciclos, debe ir dejando paso, de forma gradual, a la interdisciplinariedad, más propia del último ciclo y de la Educación Secundaria.
- La globalización exige un trabajo de planificación y diseño, dado que hay que interrelacionar las Matemáticas con el resto de las áreas, a partir de una organización previa del Centro, con proyectos consensuados que guíen el quehacer diario. La educación es una tarea de equipo, necesitada de un grupo directivo dinamizador del trabajo profundo y enriquecedor de todo el profesorado para alcanzar el éxito.
- Los objetivos y capacidades propios de esta etapa deben desarrollarse a través de los contenidos, utilizando materiales que permitan modelizar o experimentar, potenciando la expresión verbal de los procesos, por medio de juegos que posibiliten la adquisición de estrategias de cálculo, de medida y de resolución de problemas, etc.
- Los distintos pasos del proceso, programación-evaluación-actividad, deben entenderse de forma integradora, y constituyen un todo coherente. Debemos procurar que cada actividad obedezca a un criterio y conlleve una observación que permita evaluar lo que queremos conseguir al realizarla. Todo debe supeditarse a la consecución de un objetivo.

El fin primordial del trabajo matemático es iniciar a los niños y a las niñas en el modo de pensar y de expresión que caracteriza las Matemáticas.

Respecto a los objetivos

- Debemos tender a un desarrollo global, integrando los objetivos que se refieran a valores y procedimientos con los conceptuales.
- Teniendo en cuenta las necesidades sociales, se deben priorizar aquellos objetivos que favorezcan abordar problemas para los que no se tiene una regla determinada, que incidan en la interpretación de las diferentes maneras de organizar la información, que potencien la estimación de operaciones y de medidas y que ayuden a la descripción y comprensión del espacio.

Respecto a los contenidos

- Consideramos que los bloques propuestos en las orientaciones curriculares son adecuados. Hay que seleccionar pocos pero fundamentales contenidos para conseguir que el alumno sepa emplearlos correcta y conscientemente en el contexto adecuado.
- Es importante el bloque de Números y Operaciones, ya que articula el resto y permite conectarlos entre sí. Pero no debemos olvidar que la Geometría y el Tratamiento de la Información dotan al alumno de un mayor sentido crítico, aportan atractivo al proceso de aprendizaje y tienen posibilidades de ser visualizados y manipulados, permitiendo interrelaciones entre todos ellos. Serán dichas conexiones las que darán sentido al proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Tanto los contenidos como su secuenciación son a título orientativo, y cambiar algunos no implica aumento ni disminución de nivel.
- Los bloques no se acaban en un curso. Se basan en los conceptos previamente adquiridos, con sucesivas tomas de contacto, ampliaciones y ramificaciones, relacionando todos los bloques entre sí.
- Recomendamos, pues, una *secuencia en espiral*.
- El alumno es el centro de la actividad. Cada uno es diferente de los demás, y para atender la diversidad, debemos conocer y respetar los ritmos y estilos de

aprendizaje, y tener en cuenta su entorno sociocultural, presentándole situaciones lo más próximas posibles.

- La aparición de alumnos inmigrantes en nuestras aulas debe considerarse desde esta óptica, enriqueciendo el trabajo de aula con la interculturalidad que aportan y no discriminándolos. Las Matemáticas constituyen a este respecto un área intercultural y un lenguaje universal.
- Debemos tener presente que contenidos correctos en un ámbito determinado, luego, al ser utilizados en otro más amplio, pueden constituir un obstáculo para el aprendizaje. Hay que diseñar, en consecuencia, situaciones que permitan explicitar los conocimientos previos.
- El diálogo y la observación de los alumnos mientras trabajan son buenas técnicas de descubrimiento de ideas previas.
- Debe incidirse en los conceptos bien adquiridos desde todos los ángulos: reversibilidad, aplicación en distintos contextos...
- Es muy básico disponer de un listado de las ideas previas erróneas más frecuentes, con indicaciones sobre formas de detectarlas, etc.
- El bloque de Tratamiento de la Información resulta adecuado para la incorporación de información relacionada con los temas transversales (consumo, publicidad, salud, etc.)

Metodología

Es muy importante para nosotros partir de un plan de consecución de objetivos y de un trabajo en equipo. Los cambios metodológicos son muy lentos y resultan difíciles. Para que sean efectivos debemos cambiar poco a poco algunas cosas, introducir actividades diferentes, en coherencia siempre con el plan previo, y siguiendo una práctica metodológica activa y reflexiva.

Destacamos algunas propuestas ya experimentadas con éxito:

Organización del alumnado

- Aprendizaje cooperativo, organización flexible del trabajo en el aula.
- Ayuda de unos alumnos a otros; trabajo en equipos de 4 o 5, con una dedicación individual previa; pequeñas explicaciones del profesor; atención a 2 o 3 alumnos que necesiten un tratamiento individualizado, mientras los demás realizan actividades que permitan una mayor autonomía; explicaciones orales de contenidos, procesos, situaciones... y expresión gráfica de problemas y contenidos.

Los cambios metodológicos son muy lentos y resultan difíciles. Para que sean efectivos debemos cambiar poco a poco algunas cosas, introducir actividades diferentes, en coherencia siempre con el plan previo, y siguiendo una práctica metodológica activa y reflexiva.

- Trabajo en grupo como una práctica habitual y no ocasional en el aula. No todos los niños tienen la misma predisposición para trabajar correctamente en grupo ni para realizar aprendizajes compartidos, pero a todos se les debe poner en situación de aprender a hacerlo, aunque sin dejar de darles la oportunidad de escoger una modalidad de trabajo en la que se sientan más cómodos.
- Diversos agrupamientos y modelos alternativos de intervención en el aula; por ejemplo, más de un profesor con un grupo de alumnos.
- Tanto el trabajo individual como en equipo son imprescindibles; el que uno deba primar sobre otro depende del nivel, de la dinámica de la clase y de la personalidad de los niños.
- El trabajo en equipo favorece las relaciones entre los alumnos y con el maestro. El trabajo individual permite adaptarse más fácilmente al estilo de aprendizaje de cada niño y a sus características.

Sobre principios de procedimiento

- El profesor ayuda a que el niño establezca relaciones entre lo que ya conoce y lo que aprende, a través de situaciones en las que perciba problemas que le interesen, y a que reflexione sobre el contenido matemático, investigando, discutiendo con otros sus ideas y escribiendo lo que ha descubierto. Asimismo, debe tratar de ajustar el nivel de su ayuda pedagógica a las diferentes necesidades.
- Es conveniente partir de situaciones globales, contextualizadas y cercanas a los niños.
- Hay que respetar los estadios de aprendizaje (manipulativo, gráfico y simbólico) a la hora de diseñar actividades, no olvidando la utilización de modelos sensoriales (materiales manipulativos) que ilustren los conceptos matemáticos que lo requieran.
- Potenciar la *autoestima* es esencial para el desarrollo futuro del niño.

En la resolución de problemas, por ejemplo, si bien es necesario que los niños desarrollen destrezas de pensamiento y capacidades lógicas, el proponer algunas pruebas fácilmente superables puede suponer un estímulo para seguir adelante. Es necesario que, en todo momento, el alumno sea protagonista de su aprendizaje y se sorprenda gratamente de sus descubrimientos.

- La *consolidación de conceptos* puede conseguirse facilitando la construcción de aprendizajes significativos mediante actividades que posibiliten establecer relaciones sustantivas entre los conocimientos previos y los nuevos aprendizajes.
- Otras recomendaciones para la consolidación de conceptos:
  - — Aplicación de lo aprendido a situaciones nuevas.
  - — Propuestas por parte de los alumnos de situaciones nuevas resolubles mediante lo aprendido.
  - — Revisión de las nuevas respuestas a las situaciones problemáticas iniciales.
- En cuanto a la forma en que los alumnos pueden *demostrar lo que han aprendido*, se debería dar más importancia a los aspectos prácticos y funcionales de la materia. Sería bueno trabajar con proyectos que constaten la necesidad y utilidad de los aprendizajes y favorezcan la adquisición de nuevos contenidos.
- La exposición por el alumno es necesaria, ya que verbalizar y argumentar ayuda a fijar lo aprendido, desarrolla destrezas comunicativas y es enriquecedor para los demás.
- Memorización comprensiva y mecanización de aquello que, previamente construido, pueda considerarse básico para aprendizajes posteriores.

Sobre los medios

- Los medios audiovisuales pueden enriquecer ciertas actividades y generar una actitud positiva hacia las Matemáticas. El ordenador aporta nuevas posibilidades dada su versatilitad, permite atender distintos ritmos de aprendizaje y la diversidad del alumnado.
- Las nuevas tecnologías deben considerarse un medio, no un fin. Las calculadoras deben ser utilizadas no sólo para comprobar resultados, sino para realizar pequeñas investigaciones y consolidar los procesos operatorios.
- Es preciso diseñar actividades que ayuden a desarrollar estrategias de cálculo y de estimación, utilizando recursos próximos (salidas al mercado, folletos publicitarios, información en prensa, etc.).

La asunción de incompetencia para las Matemática se empieza a manifestar a finales del segundo ciclo o principios del tercero y, generalmente, por problemas en los aprendizajes previos, que deben ser detectados y tratados convenientemente.

Atención a la diversidad

- La *asunción de incompetencia* para las Matemáticas se empieza a manifestar a finales del segundo ciclo o principios del tercero y, generalmente, por problemas en los aprendizajes previos, que deben ser detectados y tratados convenientemente.
- Con los *alumnos desmotivados* y que no siguen el ritmo de la clase, se podría partir de aquellos aspectos de las Matemáticas que les sean más favorables, para que reciban algún estímulo a partir de ciertos éxitos. El trabajo en grupo también puede ayudar en estos casos. El uso de la calculadora posibilita la resolución de problemas a alumnos con deficiencias de cálculo.
- En el caso de niños con problemas, es necesaria la coordinación con la familia y con el resto de los maestros.
- Las *actividades que desarrollen el pensamiento divergente*, la creatividad, el espíritu crítico, la expresión personal, la fantasía..., pueden resultar muy motivadoras. Dada la diversidad de alumnos en un aula, no existen unas actividades tipo.
- Las actividades abiertas permiten que emerjan estrategias creativas. En este sentido, las exposiciones de los trabajos realizados por los niños, seguidas de discusiones y evaluaciones, resultan muy interesantes.

Evaluación

- La evaluación debe concebirse como un intercambio de información con el alumno, y es necesario devolver esa información de manera inmediata.
- Para nosotros es más interesante la evaluación de los procesos que la de los productos, ya que nos informa en cada momento de los niveles de cada niño, y así se pueden aplicar las correcciones oportunas en el momento adecuado. Aunque casi siempre un buen proceso lleva a un buen producto, debemos conocer el grado de consecución de los objetivos.
- El procedimiento adecuado para detectar logros y dificultades es la observación sistemática.

- Todas las producciones del alumnado han de ser corregidas. En el primer ciclo, la corrección ha de ser más individualizada.
- La *exposición de los trabajos* realizados individualmente o en grupo puede ser muy esclarecedora.
- Una buena práctica es la comunicación de experiencias.
- La puesta en común ha de hacerse por equipos, posibilitando la expresión entre todos sus componentes y facilitando que lo hagan de forma oral y por escrito.
- Los instrumentos de evaluación deben ser coherentes con el diseño de las actividades. Debe considerarse la manipulación de objetos, la expresión gráfica y los comentarios, dudas y conclusiones manifestados oralmente.
- Cada alumno debe tener la oportunidad de conseguir algún éxito en el proceso evaluador.
- Debemos practicar una evaluación de la enseñanza que informe sobre la adecuación de lo programado, con el fin de modificar oportunamente lo que sea necesario para el éxito del proceso.

Cada alumno debe tener la oportunidad de conseguir algún éxito en el proceso evaluador.

Materiales y recursos

- El trabajo en el aula debe basarse en una multiplicidad de materiales de uso individual y colectivo.
- La distribución del espacio, la disposición de los materiales, la ambientación de la clase, la forma en que están colocados los alumnos y la ubicación de la mesa del profesor son factores importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- La ausencia de un espacio específico para la realización de actividades manipulativas y experimentales no debe ser un impedimento para su realización. La principal dificultad radica en nuestra falta de confianza en este tipo de prácticas y en el deseo de tener en todo momento una clase estática, ordenada y silenciosa, lo que no es siempre posible ni deseable.
- Las *bibliotecas de aula*, las aulas taller, los juegos, la prensa, la radio, los vídeos, la elaboración de materiales por los equipos de nivel o ciclo, el uso de las nuevas tecnologías..., deberían facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. La organización de los centros debe adecuarse a las nuevas necesidades y posibilidades, dotando del tiempo necesario para preparar el uso de estos medios.
- La biblioteca de aula, valiosa tanto para los alumnos como para el profesor, puede contener fichas, libros de consulta, de divulgación, de historia, de problemas, sobre juegos lógicos y matemáticos, sobre temas monográficos; cuentos matemáticos, y, también, producciones escritas por los alumnos, diferentes libros de texto; ilustraciones gráficas, etc. Es muy importante que todos estos materiales estén catalogados, clasificados, ordenados y a disposición de los alumnos.

El trabajo en el aula debe basarse en una multiplicidad de materiales de uso individual y colectivo.

- El conocimiento matemático elemental surge de la reflexión que se hace a partir de la manipulación de los objetos. De aquí la importancia de disponer y utilizar los distintos materiales manipulativos de las matemáticas (ábaco, regletas, tangram, etc.).
- Algunos *materiales cotidianos* (domésticos, de tiendas, de oficinas, de la construcción...) son útiles para experimentar características físicas, para la exploración de formas, la determinación de magnitudes, etc.
- El libro de texto es un recurso más. Ajustarse demasiado a él dificulta la contextualización, la actualización, etc. Un buen libro de texto debería conseguir motivar al alumno planteando situaciones y actividades que inciten a la investigación y contribuyan a la construcción del conocimiento. Su elección debe ser coherente con el Proyecto Curricular de Centro y se hará por la totalidad del equipo de profesores.
- Todos los materiales e instrumentos tecnológicos son útiles y es preciso disponer de ellos y familiarizarse con su uso. Algunos de nuestros alumnos tendrán muy pocas posibilidades de aprender a usarlos fuera del contexto de la escuela. La facilidad con que los alumnos abordan estos medios, muy próximos a las máquinas que utilizan en su tiempo de ocio, y el uso de maniobras de ensayo y error con que los afrontan facilitan mucho sus estrategias de pensamiento. Todos debemos hacer un esfuerzo para propiciar su uso en el aula.
- La calculadora debe desempeñar un papel muy importante en el trabajo del aula: puede favorecer las habilidades para el cálculo mental, el reconocimiento de patrones, el descubrimiento y la consolidación de conceptos, etc.
- Las *exposiciones orales de trabajos* son muy útiles. Junto con las publi-

caciones escolares y la correspondencia contribuyen notablemente al desarrollo de la comunicación.

- Es muy importante exhibir las producciones de los alumnos. Hay que potenciar la claridad del aspecto gráfico, la mayor concreción de la expresión escrita y que todo lo que se muestre se explique al resto de la clase.
- A través de las exposiciones de materiales pueden presentarse las Matemáticas como algo dinámico, que evoluciona con el tiempo. Además, contribuyen al desarrollo de la creatividad y la fantasía y permiten la relación con otras áreas. Puede haber exposiciones de trabajos realizados por adultos y otras donde se muestren trabajos, propuestas y materiales elaborados por los niños.
- Deben programarse actividades dentro y fuera del centro: conocimiento de espacios, realización de planos, medición de distancias, medición de tiempos, fotografía, etc. La clase de Matemáticas no ha de limitarse al aula.
- Todas las actividades han de ser debidamente planificadas y deben tener su origen en el Proyecto Curricular de Centro.
- El tiempo no puede ser un impedimento para el aprendizaje de las Matemáticas. Los procesos de este aprendizaje exigen una conciencia clara del uso del tiempo, flexibilizando adecuadamente el total disponible, de manera que se respeten los ritmos y las secuencias de contenido. Todo lo reseñado anteriormente en cuestiones metodológicas exige que el tiempo no esté limitado ni compartimentado.

El papel del profesorado

El alumno es el centro de la actividad del profesor

- La toma de decisiones del profesor está siempre al servicio del alumno.
- Se ha de evitar la monotonía en el trabajo con los alumnos, programando actividades como exposiciones, concursos, visitas...
- Se debe intentar conocer a los alumnos, acercarse a sus necesidades personales y de aprendizaje y a su entorno.

Actitud abierta, crítica y autocrítica

- Es necesario compartir dudas, informarnos, formarnos e incorporar estrategias y recursos que favorezcan la seguridad.
- Conviene compartir los problemas con los demás miembros del equipo educativo.
- Ha de tenderse a compartir y favorecer experiencias de enseñanza conjunta con los restantes colegas.

El profesor debe tener una actitud creativa

- Atreverse a formular otras propuestas metodológicas.
- Constatar y reflexionar acerca de las investigaciones presentadas desde otros ámbitos contribuirá a la mejora de su labor profesional.
- Un maestro debe reflexionar continuamente sobre la práctica educativa, aunque la falta de tiempo y de preparación no le permita formalizar los resultados.

El profesor debe actuar activamente como miembro de un colectivo

- Contraer responsabilidad e incorporarse activamente a las propuestas del centro.
- Procurar manifestarse cordial: fomentar las relaciones de saludo, interesarse por los demás y conversar. La cordialidad es un primer paso para crear un clima de confianza en el centro. Implicarse en conseguir una correcta atención a los nuevos miembros del centro es indispensable para una buena organización en equipo.

La cordialidad es un primer paso para crear un clima de confianza en el centro.

Actitud positiva hacia las Matemáticas

- Un profesor no puede transmitir una imagen negativa de las Matemáticas. Todo maestro es también profesor de Matemáticas.
- Para contribuir a cambiar la concepción de unas Matemáticas frías debemos:
  - — Contextualizarlas.
  - — Aprovechar sus aspectos lúdicos.
  - — Dejar de enfatizar su papel como ciencia exacta e introducir modelos aleatorios, aproximativos, de estimación...
  - — Dejar de recurrir a ellas como un «filtro», etc.

La formación del profesorado

La formación inicial recibida no ha sido la adecuada para las tareas que este documento propone.

La formación permanente del profesorado está ligada a su desarrollo profesional, y éste, a su vez, no debe estar ligado al cambio de nivel, sino a la elevación de la calidad dentro del mismo.

Necesitamos por tanto:

- Ayuda para que nuestra práctica pueda ser conocida como fuente de innovación y difundida entre el resto de los profesores.
- Reconocimiento de la capacidad investigadora del profesorado no universitario.
- Facilidades para participar en la investigación en educación matemática.
- Disponibilidad de los resultados de la investigación en educación matemática.
- Ayuda de expertos en algunas cuestiones relacionadas con nuevos contenidos.
- Participación en seminarios, grupos estables, jornadas, congresos, etc.
- Lectura de revistas profesionales para discutir algunos de sus artículos con vistas a la mejora de la elaboración de las actividades.
- Necesidad de participación activa de la Federación en todas las actividades de perfeccionamiento que pueda necesitar el profesorado de Primaria.

Recomendaciones

- Recomendamos la lectura reflexiva del decálogo de Puig Adam, a ser posible en equipo, y a la luz de la práctica escolar de cada uno.
- Todos los asistentes a este Seminario deberán comprometerse en un trabajo de desarrollo del documento durante los próximos dos años, desde cada Sociedad y en el ámbito de la Federación.
- Dicho trabajo deberá incluir al menos un glosario, un cuaderno de ejemplificaciones, un catálogo de ideas previas, un estudio de los segmentos horarios, un decálogo actualizado y algunos otros trabajos encargados a expertos en temas puntuales.

Educación Secundaria Obligatoria

El profesor, además de ser transmisor de conocimientos, es el coordinador del proceso de aprendizaje.

La formación permanente del profesorado está ligada a su desarrollo profesional, y éste, a su vez, no debe estar ligado al cambio de nivel, sino a la elevación de la calidad dentro del mismo

Estructura y currículo de la etapa

Acerca de esta cuestión se ha escrito en abundancia y se tienen las diversas interpretaciones recogidas en los distintos documentos oficiales, por lo que los párrafos que vienen a continuación hay que leerlos como observaciones no exhaustivas sobre los distintos epígrafes.

Respecto a los objetivos de etapa, se reconoce que no resulta sencillo alcanzarlos todos por igual; para ello es necesario no sólo incluir todos los contenidos del área sino tomar en cuenta también otros aspectos como por ejemplo la metodología (algunos objetivos sólo pueden desarrollarse mediante una determinada forma de hacer).

Para compatibilizar los fines de la etapa con los contenidos del área hay que tener en cuenta que la priorización de los objetivos generales de cada centro marcará, de alguna forma, la de los contenidos del área, y puede contribuir a evitar distorsiones entre dichos fines y el desarrollo de los contenidos.

Los planteamientos globalizadores o interdisciplinares son muy apropiados para desarrollar ciertos objetivos y, sobre todo, para favorecer la visión global de la ciencia y enriquecer la visión del área, y de ahí que en algún momento del curso sea conveniente realizar actividades de este tipo. No obstante, este planteamiento no debe excluir el trabajo específico en el área, para que sea posible desarrollar suficientemente sus contenidos.

En este apartado se quiere mencionar las dificultades existentes en cuarto de la ESO con una diversidad no abordable a partir de las dos opciones existentes, proponiéndose diversas alternativas que han de estudiarse:

- Distinguir en cuarto de la ESO tres tipos de matemáticas, añadiendo a los actuales un tercero: matemáticas diseñadas para desenvolverse en la vida.
- Ofrecer un solo tipo de matemáticas en este nivel, y cubrir las ampliaciones mediante optatividad.

- Ofertar en toda la Secundaria Obligatoria la posibilidad de que el alumno pueda elegir el número de horas de matemáticas (2 o 4 horas), permitiéndose traspasos de una a otra opción.
- Aplicar el actual sistema de matemáticas A y B de 4.° curso desde el 3.°.

Relacionada con el desarrollo del currículo, existe asimismo documentación diversa, pero desde este seminario se desea hacer algunas recomendaciones.

Es normal que se dé prioridad a unos objetivos sobre otros, aunque es necesario que se haga explicitando qué Matemáticas son necesarias para atender a la triple finalidad del área en la etapa: la formativa, la funcional y la instrumental. Hay que evitar que incidan los factores «de siempre»: la inercia de muchos años de profesión, lo que a mí me enseñaron, lo que viene en el libro de texto...

En general, se está de acuerdo con los contenidos actuales, considerándose que son suficientes los del currículo oficial (otra cosa es lo que aparece en los libros de texto o lo que el profesor trabaja). Pese a ello, se cree necesario ir introduciendo nuevos elementos, como por ejemplo, la teoría de grafos, demostraciones en momentos puntuales..., potenciando siempre el constructivismo y el aprendizaje por descubrimiento.

También se recomienda no insistir en contenidos «conservadores» (polinomios, sucesiones, más modelos de funciones, etc.) ni en ciertas formas de proceder.

A la vista del desarrollo de las nuevas tecnologías, se cuestiona la enseñanza de todos los algoritmos que actualmente se intenta que aprenda el alumnado. Hay que estudiar cuáles se deben trabajar y hasta qué punto se debe insistir en ellos, valorándose las capacidades que contribuyen a desarrollar.

Es muy recomendable una secuencia en espiral, pero hay que tener en cuenta que esto hace necesaria una mayor coordinación entre el profesorado de los dos ciclos, con el fin de evitar distorsiones. Para desarrollar una metodología de ese tipo, hay que superar la presentación de contenidos en forma de bloques, procurando conectarlos entre sí.

También se recomienda no insistir en contenidos «conservadores» (polinomios, sucesiones, más modelos de funciones, etc.) ni en ciertas formas de proceder.

En cuanto a las adaptaciones, es preciso indicar que requieren, entre otras condiciones, materiales muy estructurados, grupos de 15 alumnos o menos, enseñanza individualizada, actividades que permitan diferentes niveles de profundización, y motivar mediante la contextualización. La elaboración de materiales que faciliten las adaptaciones no es tarea fácil, en especial porque cada grupo o cada alumno puede necesitar una diferente. Se trata de una labor de equipo que requiere ayudas externas.

Es importante insistir en que para realizar adaptaciones curriculares hay que determinar la causa de la dificultad. Si se trata de baja capacidad comprensiva, habrá que potenciar las fases manipulativa y figurativa; si las actitudes y los hábitos son inadecuados, se deben conocer los intereses de los alumnos y tenerlos en cuenta para el desarrollo de la programación en el aula y, en caso de insuficiencia de conocimientos previos, proporcionar apoyos específicos.

La transversalidad, entendida como la forma de tratar un determinado tópico desde los diferentes bloques, resulta conveniente. Para conseguir un tratamiento transversal de los bloques de contenidos, es preciso que la resolución de problemas, en su sentido más amplio, sea el eje vertebrador del aprendizaje, y que se utilicen actividades que aborden de manera integral contenidos de los distintos bloques, como trabajos de investigación, proyectos...

En el proceso de enseñanza-aprendizaje deben diagnosticarse continuamente los conocimientos previos, mediante una serie de actividades diseñadas al efecto. El profesorado debe conocer la situación de partida del alumnado siempre que se vaya a introducir cualquier idea nueva.

Si se parte de que una consideración negativa de las Matemáticas se debe a que tradicionalmente se han presentado a los alumnos sin relacionarlas con situaciones de la vida cotidiana, con una formalización en exceso temprana y con un abuso de la automatización de algoritmos, se ofrecen algunas recomendaciones para contribuir a cambiar esta concepción:

- Contextualizarlas con actividades cercanas a la vida diaria y que respondan a intereses del alumnado.
- Aprovechar sus aspectos lúdicos.
- Potenciar la divulgación de las Matemáticas en todos los medios.
- Complementar la vertiente de ciencia exacta que tradicionalmente se concede a la Matemática con modelos aleatorios, aproximativos, de estimación...
- Incorporar las nuevas tecnologías como un elemento imprescindible para profundizar en el conocimiento e interpretación de la realidad.

- Revisar los contenidos tradicionales para introducir otros que permitan interpretar fenómenos propios de nuestro tiempo (grafos, matemática discreta...).

Metodología

Todas las metodologías son adecuadas; lo que conviene es que estén siempre disponibles para dar respuesta ágil a las diversas situaciones.

La realidad de las aulas indica que el profesor va a encontrar una diversidad entre sus alumnos y alumnas más amplia que la que afecta sólo a sus niveles de conocimiento. Esta situación también aconseja tomar en consideración una amplia gama de metodologías e ir variándolas junto con los agrupamientos y los recursos, ya que no todo es adecuado para el conjunto.

En el informe «Cockcroft» puede leerse: «somos conscientes de la existencia de profesores que desearían que les señalásemos el método más idóneo para enseñar matemáticas, pero no consideramos que esto sea ni posible ni deseable». A continuación se indican ciertos elementos que deben estar presentes en una enseñanza acertada de las matemáticas, para alumnos y alumnas de todas las edades:

- Exposición por parte del profesor.
- Discusión entre el profesor y los alumnos y entre éstos últimos.
- Trabajo práctico apropiado.
- Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas.
- Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana.
- Realización de trabajos de investigación.

Agrupamientos

Conviene tener presente algunos principios:

- Se trata de un recurso metodológico que sólo debe utilizarse si el profesor está convencido de su utilidad.
- Es aconsejable conocer algunas técnicas de dinámica de grupos. No obstante, la puesta en práctica del recurso mostrará las mejores estrategias para cada situación.
- El trabajo en grupos es un recurso que ha de utilizarse habiendo planificado muy bien aspectos tales como los siguientes:
  - — Objetivos para los que se forma el grupo.
  - — Misión que ha de desarrollar cada componente.
  - — Materiales necesarios para desarrollar el trabajo, pues, en general, no se pueden improvisar.
  - — Lo que se pretende y su evaluación.

Todas las metodologías son adecuadas; lo que conviene es que estén siempre disponibles para dar respuesta ágil a las diversas situaciones.

- Trabajar en grupo no es lo mismo que un grupo que trabaja.
- Un grupo de trabajo debe terminar su cometido presentando un informe con el proceso seguido y los resultados.
- Es necesario enseñar pautas para la presentación de trabajos.
- Estudiar y decidir si debe ser alumnado de nivel homogéneo o heterogéneo. No pueden enunciarse reglas fijas para esto ya que, en algún caso, el trabajo en grupo puede utilizarse para dar respuesta a la diversidad del aula haciendo que los más capaces ayuden al resto, pero en otros convendrá que sean homogéneos.

Debe partirse de la hipótesis de que no todas las personas se sienten a gusto trabajando en equipos. En cualquier caso, se debe intentar hacerles ver las ventajas que reporta esta estrategia de aprendizaje.

Es una estrategia que no debe utilizarse de forma exhaustiva. Si bien hay momentos y temas para los que es aconsejable, no siempre es así. Por ejemplo, es recomendable para situaciones como las siguientes:

- Resolución de problemas.
- Inicio del tema a través de juegos o relatos que hagan aflorar el concepto tras la discusión y la puesta en común, poniendo de manifiesto conflictos cognitivos y falsas concepciones.
- Introducción y aplicaciones de la trigonometría.
- Desarrollo de trabajos estadísticos.

No se considera aconsejable trabajar en equipo en situaciones como estas:

- Refuerzo de conceptos o algoritmos.
- Construcción de conceptos que requieran un gran esfuerzo intelectual (números con signos, número irracional...).

El trabajo en grupo debe incluir una fase de trabajo individual en mayor o menor medida, según las características

de aquél. Por otra parte, favorece que el alumnado se relacione entre sí y también con el profesor, y que se plantee la necesidad de ir perfilando y creando un lenguaje común y preciso.

Pese a las ventajas educativas que comporta la utilización de esta metodología, nos encontramos con que un estudio realizado en Canarias en 1997 revela que sólo un 8% del profesorado lo pone en práctica. Los libros de texto no dan recomendaciones ni pautas para el desarrollo de algún aspecto de los contenidos mediante la organización de equipos.

La historia de las matemáticas como recurso metodológico

- El profesorado, en general, adolece de formación en esta parcela y se suele mostrar reacio a utilizarla.
- No siempre es aconsejable una metodología basada en la reconstrucción del proceso histórico-matemático. Sin embargo, la introducción histórica, contar cómo algún matemático resolvió un problema concreto, anécdotas significativas de la historia de las matemáticas o de los matemáticos, etc., motiva a un buen número de alumnos y alumnas.
- Debe tenderse a que todo el profesorado adquiera un conocimiento amplio y profundo de la historia de las matemáticas, para que pueda utilizarla como recurso metodológico y asumir también un cierto protagonismo en la divulgación de esta ciencia entre su alumnado.

Trabajar en proyectos

Es una estrategia metodológica de amplio espectro en el sentido de que puede ir desde el proyecto sencillo diseñado por el profesor o la profesora para algún aspecto concreto y con una duración breve, hasta proyectos globalizadores e interdisciplinares de larga duración, incluso de más de un curso académico.

En todos los casos es conveniente realizar labores de síntesis que se reflejen, por ejemplo, en carteles, memorias, etc., y en exposiciones orales de lo realizado, bien ante sus propios compañeros e incluso ante profesores.

Muchas de las propuestas de aula pueden y deben tener una proyección fuera del aula.

Las clases iniciales del curso deben estar enfocadas, entre otros objetivos, a establecer un contrato didáctico lo más explícito posible…

Es una buena metodología para dar respuesta a muchos aspectos de la diversidad.

Proyección de las actividades de clase fuera del aula

Muchas de las propuestas de aula pueden y deben tener una proyección fuera del aula. Una buena coordinación favorece la elaboración de propuestas de este tipo y deben recogerse en la programación general del centro.

El desarrollo transversal de contenidos de distintas áreas mediante estrategias comunes exige una cultura de centro, un enfoque de la enseñanza más global. Son necesarios proyectos del Departamento de Matemáticas o de otras áreas, con intención de aunar conocimientos en torno a cada tema. Esto entra de lleno en los desarrollos interdisciplinares, celebración de efemérides, de exposiciones, etc. En el horario extraescolar hay actividades a las que se les puede sacar partido educativo: clubes, talleres, talleres de juegos, bibliotecas, concursos, excursiones, etc.

Otras propuestas:

- Solicitar a los alumnos y las alumnas que durante el fin de semana, las vacaciones o en una tarde cualquiera, escriban sobre si han necesitado las matemáticas para resolver algún problema cotidiano. Las primeras aportaciones suelen girar en torno al manejo de dinero, pero pronto empiezan a aparecer situaciones sorprendentes.
- Repartir periódicos para tratar de extraer de ellos toda la matemática posible.
- Introducir cuestiones matemáticas en guías didácticas de museos u otros espacios.
- Crear rutas matemáticas en el entorno cotidiano.

Algunas recomendaciones metodológicas:

- Programar en cada unidad didáctica actividades de refuerzo, profundización y ampliación a través de la resolución de problemas, lecturas, pequeñas investigaciones, etc.
- No olvidar los estadios de aprendizaje (manipulativo, gráfico, simbólico, verbal), a la hora de diseñar las actividades.
- Contextualizar el aprendizaje.
- En algunas situaciones concretas se debe conseguir que actúen al mismo tiempo dos profesores en la misma aula.

Clases iniciales

Las clases iniciales del curso deben estar enfocadas, entre otros objetivos, a establecer un contrato didáctico lo más explícito posible, incluyendo aspectos tales como los que siguen:

- Criterios para la valoración del trabajo.
- Criterios para la valoración del aprendizaje.
- Actitud del profesor y del alumno ante el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Objetivos de diverso tipo que deben conseguirse a lo largo del curso.
- Criterios de evaluación.

Para una mayor motivación del alumnado, es recomendable comenzar cada tema con un ejemplo o modelo contextualizado del contenido que se vaya a trabajar. Estas actividades iniciales deben perseguir fundamentalmente dos objetivos:

- Proporcionar una visión general de lo que se va a estudiar.
- Tener una idea clara del nivel de conocimientos de los alumnos y las alumnas, de sus ideas previas y de los principales errores conceptuales.

Algunas propuestas para desarrollar en las clases iniciales:

- Pasar un cuestionario sobre procedimientos y conceptos previos.
- Montar una clase expositiva seguida de actividades que incluyan preguntas y respuestas del alumnado. Éstas deben tenerse muy en cuenta, pues aun siendo incorrectas o sin que se ajusten a las expectativas del profesor, no deben ser ignoradas.
- Preparar una salida del aula para plantear situaciones problemáticas que luego se van a resolver.
- Cuentos para contextualizar.
- Vídeos.
- Actividades con ordenador.
- Juegos...

La autoestima

La autoestima es fundamental para el aprendizaje. Para fomentarla, uno de los elementos más eficaces es una buena relación entre profesores y alumnos. También conviene diseñar actividades con distintos niveles para asegurar que todos los alumnos tengan algún tipo de éxito.

Se debe evaluar teniendo en cuenta el punto de partida de cada uno, y considerarse normal que no todos los alumnos lleguen a un mismo nivel de desarrollo de capacidades y de conocimientos.

Los errores que se cometen en las respuestas a preguntas o en la resolución de problemas suponen un buen recurso didáctico que no debe dejar de utilizarse.

La inhibición y la agresividad suelen ser síntomas claros de falta de autoestima.

…con cierta frecuencia, existen en nuestras aulas alumnos y alumnas que rechazan el sistema educativo y lo hacen de forma activa y ostensible. Es una situación que va más allá del aula de matemáticas…

La ansiedad

La ansiedad puede ser la causa de bloqueos que dificultan el aprendizaje y es la responsable de un cierto porcentaje de fracaso escolar. Es bueno hablar de ella como un problema normal ya que así se suele conseguir que el alumno la descargue y llegue a colocarla fuera de sí.

Enumeramos algunos consejos que ayudan a rebajar el grado de ansiedad:

- No hacer matemáticas competitivas y autoritarias.
- Conseguir que la construcción se haga entre todos.
- Dar tiempo para que los alumnos respondan a nuestras preguntas, y que lo hagan por escrito para que las respuestas de los más rápidos no impidan que los demás piensen en las suyas.
- Hacer las valoraciones de exámenes u otros trabajos por adición, esto es, ir sumando puntos en función de lo que esté bien en lugar de restar por lo que esté mal.

Rechazo al sistema educativo

Constatamos que, con cierta frecuencia, existen en nuestras aulas alumnos y alumnas que rechazan el sistema educativo y lo hacen de forma activa y ostensible. Es una situación que va más allá del aula de matemáticas: es un problema de tipo social que requiere, por tanto, la acción conjunta del tutor, los padres, el departamento de orientación, los compañeros, los demás profesores, etc.

Relacionamos algunas estrategias que ayudan a afrontar la situación:

- Proponer actividades aparentemente alejadas de las matemáticas como enigmas, juegos, paradojas...
- Trabajar en actividades que conduzcan a los alumnos a pensar, ordenar, organizar...
- Clarificar al máximo el contrato didáctico que se haga con ellos, dejando bien claro dónde está la autoridad en el aula.

- En ocasiones puede considerarse un éxito el conseguir que estos alumnos no boicoteen el desarrollo de la clase.

Integración de las minusvalías

Es conveniente conseguir la integración escolar, afortunadamente, pero con medios, formación y recursos para poder atenderla con éxito. Así, por ejemplo, en algunos casos (deficiencias auditivas, visuales...) se necesita la presencia física de especialistas que ayuden y orienten al profesor respecto a la forma más adecuada para desarrollar la clase.

Consolidación de contenidos

Es necesario transmitir a nuestros alumnos la cultura del esfuerzo personal. Debemos dotarlos de pautas para que aprendan a estudiar de forma autónoma:

- Cómo hacer un esquema.
- Cómo memorizar.
- Cómo hacer resúmenes.
- Cómo afrontar la realización de un examen.

Para consolidar contenidos es conveniente, entre otras posibles estrategias las que siguen:

- Hacer reflexionar al alumno sobre lo que está haciendo y que lo exprese por escrito.
- Al final de cada tema, cada persona hace un balance individual sobre lo que se ha estudiado y aprendido en él, realizando una puesta en común con todo el grupo.
- Proponer la preparación de un modelo de examen y utilizar estas ideas.
- Proponer tareas de refuerzo para casa.
- Los contenidos relacionados con la consolidación de destrezas han de trabajarse mediante sesiones breves y nunca en periodos largos.

Actividades que desarrollan el pensamiento divergente, la creatividad, el espíritu crítico, la expresión personal, la fantasía…

Conviene plantear con cierta frecuencia actividades abiertas, en las que la creatividad y la forma de enfocar y tratar el problema sean ricas y variadas. No existen actividades tipo para el desarrollo de estas capacidades. Ello exige que el profesor favorezca el clima adecuado para conseguir que esos aspectos estén presentes en el proceso de aprendizaje, por ejemplo, admitiendo distintos puntos de vista, valorando los procedimientos más creativos y personales, estimulando la crítica y la búsqueda de alternativas, etc.

Conviene plantear con cierta frecuencia actividades abiertas, en las que la creatividad y la forma de enfocar y tratar el problema sean ricas y variadas.

Para la consecución de esos fines no son oportunas metodologías basadas en la clase magistral u otras de tipo dirigista ni de repetición de rutinas.

Exposiciones de materiales y su papel en el aprendizaje

Las exposiciones de materiales presentan las matemáticas como algo dinámico que va evolucionando con el tiempo, a la par que favorecen el desarrollo de la creatividad y la fantasía y ponen de manifiesto relaciones con otras áreas. Para que sean motivadoras, es recomendable que contengan objetos manipulables que induzcan al alumnado a interactuar.

Evaluación

En la parte de este documento relativa a la etapa de Educación Primaria se recogen ideas y reflexiones en torno a la evaluación, que suscriben los componentes de este equipo.

Consideramos que se trata de un aspecto de gran importancia y trascendencia y que no puede ser tratado en este encuentro en toda su extensión. Por eso, se recomienda que sea el tema central para la próxima cita en La Gomera.

Materiales y recursos

Libro de texto

Es recomendable como material de consulta para el alumno y el profesor, pero no como único recurso.

Si se decide no utilizar el libro de texto, entonces se debe dar una alternativa rigurosa que obliga, entre otras a las siguientes acciones:

a) Elaborar unos materiales adecuados.

b) Enseñar a tomar apuntes.

c) Leer y corregir los cuadernos de apuntes.

Se consideran aspectos negativos de todo libro de texto los siguientes:

- No presentan un aprendizaje constructivo.
- No suelen tener un tratamiento adecuado de la diversidad.
- En ocasiones utilizan un lenguaje que los alumnos no conocen o está muy estructurado.

- El último nivel de concreción no puede hacerse siguiendo de forma rígida un libro de texto.

Por contra, presenta algunos aspectos positivos:

- Posiblemente sea el único libro que maneje el alumno, por lo que enseñar a utilizarlo proporciona una forma de aprender a valorar los libros, en general.
- Es una fuente importante de actividades y de propuestas de carácter individual para el trabajo en el aula.

Aula de matemáticas

Es aconsejable que los centros estructuren sus dependencias de manera que puedan crear aulas de matemáticas con una dotación adecuada y actualizada. Entre otros recursos, se consideran adecuados: la biblioteca de aula, un vídeo, un ordenador, un retroproyector, calculadoras, archivos para las producciones de los alumnos, materiales manipulables, etc.

El aula de matemáticas debe ser un lugar para la reflexión y para la producción de ideas matemáticas.

Aparatos y recursos

La incidencia en la mejora de la práctica docente de los distintos aparatos y recursos didácticos vendrá determinada, más que por el hecho de disponer de ellos en los centros, por su utilización por los profesores, siendo crucial que de forma individual y colectiva nos planteemos cuándo utilizarlos, para qué utilizarlos y cómo hacerlo eficazmente. Por ello resulta imprescindible formar al profesorado para que los conozca y aprenda a sacarles el mayor provecho educativo, ya que, en general, favorecen que el alumno se aficione a la materia.

Algunos permiten modelizar situaciones, estrategia ésta muy difícil o imposible de realizar sin la ayuda de estos recursos, sobre todo de la calculadora y del ordenador. Apoyándonos en estos dos, se puede insistir más en los procesos matemáticos que en la ejecución de rutinas, razón por la que incluso habría que plantear la revisión de los contenidos de los currículos.

En general, puede considerarse que las nuevas tecnologías proporcionan a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas unas nuevas maneras de construir el conocimiento, cualitativamente distintas a las utilizadas hasta hoy.

Hagamos un breve análisis de los recursos habituales:

Retroproyector

Es un recurso muy eficaz para el desarrollo de temas con alto contenido gráfico y visual, y que permite estructurar el aprendizaje mediante la presentación de esquemas, diagramas... Posee notables ventajas sobre la pizarra: facilita una secuenciación ágil y con posibilidad de retroceso, el material generalmente está creado de antemano, posibilita las composiciones por superposición, concentra la atención y mejora el diálogo con los alumnos por cuanto que se les mira de frente todo el tiempo.

El aula de matemáticas debe ser un lugar para la reflexión y para la producción de ideas matemáticas.

Fotografías y diapositivas

Su uso está especialmente indicado para la enseñanza de la geometría: identificación de figuras y elementos geométricos en el entorno, la naturaleza, el arte, semejanza, proporcionalidad, escalas..., y también resulta útil para ciertos aspectos relacionados con los números, las funciones, etc.

Vídeo

Es un recurso que permite dinamizar y visualizar situaciones que no se pueden recrear en clase. Es aconsejable hacer su visión con un guión previamente elaborado, tratando siempre de convertir el pase de cualquier documento en algo activo.

Ordenadores

Son elementos que facilitan la visualización, la interactividad y la dinamización de las actividades y situaciones. Su utilización viene determinada por dos importantes aspectos: la formación e interés del profesor y la adecuada dotación informática del centro.

Es interesante disponer de un ordenador en el aula con un sistema de proyección como televisión, cañón de proyección, etc.

Debemos estar abiertos a la utilización de internet como un recurso más. Se trata de algo nuevo no suficientemente investigado como recurso educativo, algo sobre lo que habría que reflexionar más y también exigir una preparación del profesorado para su correcta utilización en el ámbito educativo.

Calculadoras

La calculadora plantea aspectos positivos que se deben considerar: facilidad de uso, asequibilidad económica, utilización ágil, posibilidad de realizar pequeñas investigaciones sobre propiedades de los números, ecuaciones, gráficas, probabilidad, etc.

Por otra parte, las calculadoras gráficas permiten, además, la visualización de situaciones que pueden ser proyectables.

Los alumnos deben adquirir su propia calculadora científica y disponer de ella en cualquier momento.

Recursos de siempre

Se trata de un conjunto de materiales relacionados con algunas actividades que han constituido y siguen constituyendo un importante recurso para enseñar y aprender matemáticas: manipulación, juegos, lecturas...

Cabe citar manipulaciones como construir, plegar, cortar, dibujar, mover, medir... Para ello existe un variado material como regletas, cubos multibase, mecanos, cubos, dados, fichas, dominós, barajas, geoplanos...

Las lecturas muestran la existencia de otras fuentes para aprender matemáticas además del libro de texto. Libros de historia, de divulgación científica, cuentos, novelas, libros de matemáticas recreativas, la prensa... Y otras formas de comunicación como juegos, canciones, refranes, poemas...

Guías de recursos

Existen publicaciones que ofrecen un amplio conjunto de materiales y recursos, por ejemplo:

- *Guía de recursos didácticos de matemáticas para primaria y para secundaria*. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación, c/ Alcalá, 34, Madrid.
- *Guía de recursos didácticos de matemáticas*. Consejería de Educación del Gobierno de Canarias, teléfono 922 477 834; fax 922 477 746.
- *Recursos para el aprendizaje en el aula de matemáticas. Elaboración y uso del material didáctico*. Se trata de un CD-Rom en el que se recogen las conclusiones y aportaciones realizadas en el encuentro organizado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por medio de la Sociedad Andaluza «Thales», en Granada en 1998.

Las revistas didácticas han de servir fundamentalmente para mantener al profesorado en contacto con las últimas investigaciones e innovaciones, con los materiales e ideas, para potenciar los encuentros, reflexiones y debates entre colegas y, al mismo tiempo, para ser utilizadas como vehículo de transmisión de sus propias ideas y experiencias educativas.

Papel de las revistas didácticas, libros de actualización pedagógica, cursos, jornadas, etc., en el perfeccionamiento permanente del profesorado

- Las revistas didácticas han de servir fundamentalmente para mantener al profesorado en contacto con las últimas investigaciones e innovaciones, con los materiales e ideas, para potenciar los encuentros, reflexiones y debates entre colegas y, al mismo tiempo, para ser utilizadas como vehículo de transmisión de sus propias ideas y experiencias educativas.
- En los libros de actualización didáctica y científica sería deseable hacer un esfuerzo para que su contenido presente un lenguaje asequible y, en último término, que se hagan propuestas que faciliten la adaptación de los nuevos contenidos al aula.
- Los cursos y charlas han de ocuparse, preferentemente, de facilitar el trabajo de aula de los profesores, atendiendo necesidades concretas de formación y actualización docentes; también deben servir para la reflexión y para la formación científica.
- Las interacciones puntuales con profesores de reconocida solvencia normalmente no suelen promover un cambio profesional relevante. Podría ser interesante un plan de formación del profesorado que incluyera, entre otras medidas, la dedicación exclusiva o semiexclusiva de algunos de esos profesores a las tareas de formación.
- Los congresos y jornadas deben dedicar tiempo a debates profundos sobre temas de nuestra profesión: el papel del profesor en los distintos ámbitos, el currículo de matemáticas en los diferentes niveles, los aspectos metodológicos, la evaluación, cómo mejorar la valoración social de la materia, qué problemas profesionales tenemos y qué hacer para solucionarlos, etc.
- Es conveniente encontrar líneas de colaboración entre el profesorado de aula y los investigadores, tanto en educación matemática como en matemáticas.

El papel del profesorado

Actitudes del profesorado

Como ayuda para mejorar el desarrollo de la actividad profesional viene al caso proponerse:

- Conocer las experiencias de otros profesores.
- Participar en jornadas.
- Asistir a cursos de formación.
- Leer revistas didácticas.
- Integrarse en grupos de trabajo.
- Asociarse con otros profesores.

- Transmitir ideas y experiencias propias.
- Estar abiertos al diálogo y a la colaboración en proyectos que vayan más allá de nuestra propia disciplina.

Las reuniones de Departamento deben considerarse como un lugar de encuentro y de trabajo cooperativo entre sus miembros, para la evaluación y el contraste de la propia actividad, para la información y formación permanente y para la incorporación de estrategias y recursos que favorezcan una mejora de la calidad de la enseñanza.

Mantener una actitud crítica sobre la propia práctica docente es la base sin la cual no es posible el perfeccionamiento; fomentarla resulta prioritario.

Papel del profesor en el campo de la innovación e investigación educativas

Es conveniente tener una actitud positiva hacia la innovación, por cuanto supone creer que se puede mejorar la labor profesional y en tanto que implica una disposición a compartir ideas, opiniones y experiencias.

Se debe reconocer el protagonismo innovador del profesorado y su capacidad para realizar investigaciones.

Formación del profesorado

En este tema se insiste en la idea de hacer un análisis crítico de la estrategia seguida hasta ahora para la formación del profesorado, y que las administraciones se planteen ofrecer un tipo de formación más diversificado para que cada cual pueda adaptar al mismo su nivel, sus disponibilidades horarias, sus necesidades de formación, etc.

Recomendaciones

Se propone a la Federación:

1. Organizar el próximo encuentro de La Gomera centrado en la evaluación del proceso enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.
2. Crear grupos de trabajo o encargar a expertos que profundicen y hagan llegar al profesorado documentos sobre los siguientes temas:
   - — Recopilación de los errores preconceptuales más frecuentes, estudiar alternativas y soluciones, elaborar cuestionarios que ayuden a detectarlos, etc. Este material se prepararía para ser debatido durante el próximo encuentro en La Gomera.
   - — El papel de los algoritmos en la Educación Matemática.
   - — La Matemática en la vida cotidiana: posible creación de una nueva educación matemática.
3. Tomar una postura activa en lo que se refiere a los libros de texto, exponiendo lo que se considere que deben contener y las orientaciones que deben ofrecer.

Se debe reconocer el protagonismo innovador del profesorado y su capacidad para realizar investigaciones.

El número de horas semanales es manifiestamente insuficiente. No se pretende abordar más contenidos, sino trabajar adecuadamente los existentes en la actualidad.

4. Solicitar a las editoriales la publicación de libros de consulta.

A las Administraciones Educativas se recomienda:

- Afrontar a fondo, con menos frivolidad, con más medios y con recursos adecuados la integración de las minusvalías, tanto físicas como psíquicas.
- Ponerse en contacto con otras instituciones expertas y con medios para tratar de conseguir el mayor éxito en el objetivo de la integración escolar.
- Posibilitar que, en algunas circunstancias, pueda haber más de un profesor en una misma aula.
- Tener presente que la conexión de los centros educativos a internet no consiste sólo en entrar en la red sino que debe ir acompañada de una preparación del profesorado para que sea rentable desde el punto de vista educativo.
- Insistir, una vez más, en la necesidad de ampliar el horario de las matemáticas. El número de horas semanales es manifiestamente insuficiente. No se pretende abordar más contenidos, sino trabajar adecuadamente los existentes en la actualidad.
- Es necesario promover la creación de grupos de trabajo con dotación económica y reducción horaria, coordinados por profesorado especialista en innovación y en matemáticas que, entre otros objetivos, puedan elaborar material y experimentarlo en el aula, criticarlo, mejorarlo y transmitirlo a quien lo demande.
- Reconocer y valorar la labor innovadora, sobre todo en las diversas convocatorias en las que se realizan concursos de méritos o decisiones administrativas similares.
- Reconocer que el profesorado está capacitado para realizar trabajos de investigación y de ampliación de estudios. En este sentido, deben

facilitar los medios para poder efectuarlos (masters, tesis, ampliaciones de estudios, etc.), abriendo la posibilidad de ampliar la carrera docente.

- Crear la figura del asesor didáctico con un perfil que contenga, entre otros, una alta cualificación pedagógica, una actualización permanente en esta materia de forma que pueda ir a los centros para ayudar a resolver los problemas didácticos que suscita la práctica educativa, y que también el profesorado pueda recabar de él orientaciones didácticas.
- Convertir la formación permanente en algo obligatorio y realizada dentro del horario lectivo.

Cuestionario

Es norma de la Federación organizar sus encuentros con un documento inicial de discusión elaborado a partir de las respuestas ofrecidas por las distintas Sociedades a un cuestionario previo, cuya cumplimentación y envío a la Sociedad organizadora es preceptivo para aquellas personas que representarán a su respectiva Sociedad.

El documento que se acompaña pretende servir de reflexión individual (o colectiva) sobre diversos aspectos relacionados con la práctica en el aula, como paso previo a la elaboración de un documento de recomendaciones didácticas que pueda servir al profesorado de la Educación Obligatoria en su práctica diaria. La distribución de la Educación Obligatoria en dos etapas diferenciadas obligará, obviamente, a diversificar la participación de cada Sociedad cumplimentando un cuestionario por cada etapa y con la asistencia de profesorado de ambas. Agradecemos de antemano el esfuerzo que se tiene que realizar para cumplimentar el cuestionario, lo cual enriquecerá sustancialmente el documento de partida que se manejará en el encuentro de octubre.

Participantes

Acosta Sosa, Pilar, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Aguiar Clavijo, Francisco, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Álvarez García, José Luis, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Aranda Plata, Antonio, Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».

Arrieta Gallastegui, José Joaquín, dSociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes».

Balbuena Castellano, Luis, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Bell-lloch, Aurora, Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo».

Berini, Marta, Federació d' Entitats per l' Enseyament de les Matemátiques a Catalunya.

Calvo Aldea, Carmen, Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo».

Díaz Correa, Hipólito, Comunidad Autómona de Canarias.

Fernández Reyes, Manuel, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Freaza Déniz, Enrique, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Galarreta Espinosa, Javier, Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima».

García Cruz, Juan Antonio, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

García Déniz, Manuel, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

García Jiménez, Juan Emilio, Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas.

Girondo Pérez, Luisa, Federació d' Entitats per l' Enseyament de les Matemátiques a Catalunya.

Godoy Delgado, Dolores, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

González García, Antonio Eugenio, Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de .de Pedrayes».

Henríquez Rodríguez, Lucía, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Lorenzo Pérez, Ricardo, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Macías Gil, Cristóbal, Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».

Martín Adrian, Antonio, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Martínez Fernández, Pedro J., Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».

Negrín Hernández, Ana, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Nomdedeu Moreno, Xaro, Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron».

Padilla Díaz, Francisco, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Pazos Crespo, Manuel, Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia.

Pérez Hernández, Ana Alicia, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Pérez Jiménez, Antonio, Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».

Plata Casais, Aurora, Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia.

Puerta García, Francisco, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Quesada Frigolet, Carlos, Comunidad Autómona de Canarias.

Ramírez Martel, Arístides, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Sancho Rocher, Julio, Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas.

Trujillo La Roche, Ana, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Velázquez Manuel, Fidela, Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas.

Vilella, Xavier, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Villarroya, Florencio, Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas.

1. Sobre el área de Matemáticas dentro de la estructura de la Etapa[1]

1.a. ¿Cómo desarrollar los objetivos y capacidades de la etapa (dentro del conjunto de la educación obligatoria) a través de los contenidos del área?

1.b. ¿Cómo compatibilizar los fines de cada etapa con los contenidos del área?[2]

1.c. ¿Existe contradicción o enriquecimiento entre planteamientos globalizadores o interdisciplinares y el desarrollo de los contenidos del área? Ventajas e inconvenientes y propuestas de trabajo.

2. Sobre desarrollo curricular

Sobre los objetivos

2.a. ¿Se priorizan en la actualidad unos objetivos del área sobre otros? ¿Se deben priorizar? Recomendaciones al respecto.

Sobre los contenidos

2.b. Los contenidos ¿son suficientes o excesivos? Recomendaciones para su priorización.

2.c. ¿Cómo establecer una adecuada secuenciación? ¿Es óptima la secuenciación «en espiral»? Recomendaciones al profesor como planificador y ejecutor de lo planificado.

2.d. ¿Cómo realizar adaptaciones curriculares? Recomendaciones al profesor.

2.e. Integración teleológica (de atención a todas las dimensiones madurativas) del alumno, o ¿cómo desarrollar a través de los contenidos del área las capacidades emanadas de los objetivos generales de la etapa correspondiente?

2.f. ¿Es posible un tratamiento transversal de los bloques de contenidos? Sugerencias.

2.g. ¿En qué medida los preconceptos o conocimientos previos afectan a la adquisición de los contenidos? Sugerencias al respecto.

2.h. ¿Está de acuerdo con las valoraciones que catalogan a las matemáticas como una materia socialmente considerada como fría, objetiva, descontextualizada, poco atractiva..., en cuanto a los contenidos? Comente esta valoración y haga propuestas.

Sobre la metodología

2.i. Situaciones de aprendizaje diversas requieren diversidad metodológica. Realice propuestas de alternativas metodológicas variadas de adaptación a la diversidad a través de la metodología.

2.j. ¿Qué papel han de jugar las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? Formule propuestas metodológicas.

2.k. Las clases iniciales ¿han de ser iniciantes en el acceso al conocimiento matemático? Complemente la propuesta o realice una alternativa.

2.l. ¿En qué medida se debe propiciar el trabajo en grupo y el aprendizaje compartido? Sugerencias.

2.m. ¿El profesor ha de ser transmisor de conocimientos o coordinador de los aprendizajes que se van a realizar? Comentarios y propuestas.

2.n. Las situaciones de partida o de motivación ¿han de ser globales y contextualizadas, o por el contrario hay que partir de matematizaciones de la realidad? Comentarios y propuestas.

2.o. Comente el papel de la autoestima en el contexto del aula y proponga modos de incentivarla desde el área.

2.p. ¿Qué medidas ha de adoptar un profesor para incentivar la participación del alumnado desmotivado, con baja autoestima, con sentimientos de fracaso previo, con asunción de incompetencia para el área? Comente el perfil y haga propuestas.

2.q. ¿Cómo consolidar adecuadamente los conceptos como ideas dadas, antes de pasar a nuevas ideas? Proponga estrategias.

2.r. ¿Cómo permitir que los alumnos y las alumnas demuestren lo que han aprendido? Proponga instrumentos.

2.s. ¿Qué papel ha de jugar dentro del tiempo del área, el trabajo en equipo, el trabajo individual, la exposición...? Haga propuestas

2.t. ¿Qué papel tienen dentro del área las actividades que desarrollan el pensamiento divergente, la creatividad, la expresión personal, el espíritu crítico y la fantasía? Haga propuestas al respecto.

Sobre la evaluación

2.u. ¿Evaluación de los procesos frente a evaluación de los productos? Comente en qué medida ha de evaluarse cada uno de los aspectos reseñados y el papel de ambos en ayuda de una evaluación continua, formativa y de apoyo y orientación

2.v. ¿La corrección de las producciones del alumnado ha de realizarse diariamente y en su presencia? Haga propuestas en este sentido.

2.x. ¿Qué papel tiene para Vd. la puesta en común como trabajo de síntesis de los aprendido? Valórela y haga propuestas.

2.y. ¿Qué tipo de pruebas de control propone y qué modalidades de análisis de las producciones de los alumnos? Valore la importancia de cada una en el proceso de evaluación.

Sobre los materiales y recursos

2.z. ¿Qué papel ha de darse al libro de texto? ¿Y a los múltiples materiales curriculares que desarrollan los contenidos del área?

2.aa. El papel de la biblioteca de aula y de las producciones escritas de los alumnos. Haga propuestas.

2.ab. Materiales para contar, medir, estimar, probar suerte. Descripción sucinta, optimización de uso y sugerencias.

2.ac. Materiales para la observación y la experimentación. Descripción sucinta, optimización de uso y sugerencias.

---

1 Cuando se hable de la Etapa se entiende la Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria. Se pide que se aporten las reflexiones sobre ambas en documentos separados.

2 La primaria es una etapa fundamentalmente de conocimiento de sí mismo y del medio y de preparación para la secundaria obligatoria, mientras que esta última tiene una triple finalidad: de educación a término, de preparación vocacional (acceso a ciclos formativos) y propedéutica.

2.ad. Otros materiales (prensa, folletos publicitarios...) Sugerencias de uso

2.ae. Planes de trabajo, distribución horaria y delimitación de espacios como materiales didácticos.

2.af. Los materiales de desecho y el aula taller de Matemáticas. Sugerencias.

2.ag. Los materiales comerciales estructurados, y las nuevas tecnologías y el aula laboratorio de matemáticas. Sugerencias.

2.ah. Las exposiciones y su papel en el aprendizaje. Sugerencias

2.ai. El aula y el espacio para pensar y re-crear las matemáticas. Sugerencias.

3. Sobre el empleo horario

3.a. ¿Cómo realizar la secuencia del área en vertical (a través de la etapa)?

3.b. ¿Cómo realizar la secuencia en horizontal o programación (dentro del ciclo o curso)?

3.c. Propuestas para la proyección de la actividad de clase en relación a otros horarios escolares y al horario extraescolar.

3.d. Distribución temporal de los tipos de contenido y estrategias para su desarrollo.

3.e. La importancia de la adecuada programación de actividades y de su temporalización.

3.f. ¿Cómo organizar el tiempo de la actividad, el antes y el después?

3.g. La flexibilización de los tiempos en función de la diversidad. Propuestas.

4. Sobre las actitudes del profesorado

4.a. La motivación del profesorado depende de la autosatisfacción del trabajo bien hecho y el cumplimiento de los compromisos y responsabilidades. Para ello es preciso atender a una serie de necesidades básicas del profesorado. Proponga acciones que ayuden a mejorar esos parámetros:

Necesidades	*Acciones de ayuda*
...de seguridad	
Claridad en la organización	
Mejora de la comunicación	
...sociales y de clima afectivo	
Cordialidad	
Confianza	
...del yo. Enriquecer el trabajo	
Variedad	
Objetivos que supongan un reto	
Alcanzar un alto nivel de calidad, orientado hacia...	
Los alumnos	
La eliminación de errores	
Obtener realimentación	
Creatividad	
Autonomía	

4.b. ¿Cuál ha de ser el papel del profesor dentro del campo de la investigación educativa? Propuestas.

4.c. ¿Cómo ha de estructurar el profesor su autodesarrollo profesional?

4.d. Papel que han de jugar, en el perfeccionamiento permanente del profesorado

- Las revistas didácticas.
- Los libros de actualización pedagógica y didáctica.
- Las nuevas tecnologías.
- Los cursos y charlas científico-didácticas.
- Las interacciones entre colegas de igual formación.
- Las interacciones con colegas de reconocida relevancia.
- La actitud crítica sobre la propia práctica docente.
- La asistencia a congresos y jornadas .

5. A modo de síntesis, y sin parafrasear a Puig Adam, ¿podría establecer su propio decálogo del profesor de Matemáticas?

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Comisión Ejecutiva

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretario General: José Luis Álvarez García
Vicepresidente: Serapio García
Tesorera: Claudia Lázaro

Secretariados:
Prensa: Antonio Pérez Sanz
Revista SUMA: Emilio Palacián/Julio Sancho
Relaciones internacionales: Luis Balbuena/Florencio Villarroya
Actividades: Xavier Vilella Miró
Publicaciones: Ricardo Luengo González

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Marta Berini López-Lara
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Xaro Nomdedeu Moreno
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12.
50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidenta: Dolores de la Coba
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Santiago Pascual
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n.
09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: Remedios Peña Quintana
IES Francisco de Goya. C./ Caravaca, s/n.
30500-MOLINA DE SEGURA (Murcia)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Francisco Manuel Rodríguez Mayo
Apartado de Correos 103.
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 590. 06080-BADAJOZ

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
C/ Limonero, 28
28020-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidente: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29.
39003-SANTANDER

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidenta: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y HUmanidades
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005-MELILLA

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra.
31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 305. Facultad de Educación.
Universidad Complutense. 28040-MADRID

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
C.P.R. Avda. de la Paz, 9. 26004-LOGROÑO

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente:
Apartado 4188. 15080-A CORUÑA

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica.
Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 37
junio 2001, pp. 27-31

El Año Mundial de las Matemáticas: Una valoración

Así que hemos tenido un Año de las Matemáticas, en España y en todo el mundo

José L. Fernández, Manuel de León, M.ª Jesús Luelmo y Juan Luis Vásquez

INFORME 2000

La Comisión Permanente del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000 reflexiona sobre el significado de las Matemáticas y su situación actual en España, así como sobre lo que ha supuesto la celebración de este año.

1

LA UNIÓN MATEMÁTICA INTERNACIONAL (IMU[1]) tuvo la idea. Le preocupaba que la sociedad no apreciara las Matemáticas en su justa medida y pensó que tanto a los matemáticos como a la sociedad le convenía cambiar esta situación. Los matemáticos creen que la ciencia que investigan, que enseñan, que usan, y con la que tanto disfrutan, es importante, es útil, es formativa, es elegante..., y que, sin embargo, la sociedad no lo ve así. La IMU tomó la decisión (en 1992) de declarar el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. La UNESCO, más tarde, apoyó la resolución de IMU, perfilando sus objetivos, insistiendo en los aspectos educativos de las Matemáticas.

Brevemente, el objetivo no era otro sino el de acercar las Matemáticas a la sociedad, demostrando su enorme utilidad en todo tipo de actividades cotidianas, profesionales, empresariales, industriales y tecnológicas, explicando su importancia como logro intelectual de la humanidad, exhibiendo su enorme belleza y riqueza, exponiendo su versatilidad como lenguaje y forma de pensar, y recalcando su valor formativo y educacional.

Una descripción inmejorable de estos objetivos es la exposición de motivos de la proposición no de ley del 9 de Febrero de 1999 del Congreso de los Diputados de España en apoyo al Año Mundial de las Matemáticas y que fue promovida, fundamentalmente, por dos matemáticos y diputados: Antonio Martinón y Teresa Riera, y cuya lectura recomendamos encarecidamente.

En España hay muchas Sociedades que entienden de distintos aspectos de las Matemáticas. Para lograr los objetivos de este Año Mundial estas sociedades decidieron colaborar creando un comité conjunto, CEAMM2000, que tenía el propósito fundamental de divulgar los objetivos del Año Matemático, de recabar y de coordinar iniciativas.

1 IMU, International Mathematical Union.

2

Matemáticas significa muchas cosas y bien distintas para cada persona. Y, con seguridad, ésta es una de las razones (entre muchas otras) de la dificultad de asirlas, de saber qué son en realidad.

Para mucha gente las Matemáticas son fundamentalmente la *escuela*; un recuerdo que, como es bien sabido, no es, en general, particularmente grato. Y ahí se acaban. No se sabe que la Matemática es algo vivo, una ciencia en continuo desarrollo; no se conoce su belleza profunda, ni se percibe su utilidad y relevancia en el mundo moderno. Ian Stewart, con justicia el más afamado divulgador matemático del momento, en un prólogo reciente[2], comenta con amargura:

> Es ahora, tras tantos años, cuando me doy cuenta de que toda mi vida ha estado dedicada a luchar contra la ecuación «Matemáticas=Escuela».

La Matemática es una *ciencia*. Una afortunada definición de Hersch afirma que:

> La Matemática es la ciencia que estudia los objetos virtuales con propiedades reproducibles.

Esta afirmación no se acepta universalmente; la Matemática, se dice, no es una ciencia experimental, sus hipótesis de trabajo no son refutables, y los objetos de los que trata no existen, en realidad. Pero, no, la investigación matemática de esos objetos virtuales de los que trata la Matemática es en todo análoga a la de las ciencias experimentales. Hay conjeturas, callejones sin salida, experimentos virtuales. Aunque, por supuesto, lo que se logra con todo esto, sí que es bien distinto: es inevitable e irrefutable. La Matemática requiere un rigor definitivo, un engarce sin fisuras en el edificio del conocimiento matemático.

Las Matemáticas son además el *lenguaje* de la ciencia. La ciencia, en sentencia provocativa, es conocimiento expresado en Matemáticas; eso decía Kant, por ejemplo. Una exageración, de acuerdo, pero de una verdad. Un lenguaje que permite un rigor en el análisis de indudable eficacia. Y es el lenguaje de la tecnología y de las comunicaciones. Un lenguaje indispensable en el mundo moderno, en este mundo que se está dando en llamar la era de la información y/o de la comunicación.

Y, finalmente (¿?), los matemáticos gustan de considerar su actividad como un *arte*. Y no les falta razón. Oscar Tusquets, el reputado arquitecto catalán, en su magnífico *Dios lo ve* lo plantea así:

> ¡Qué cercano está el proceso de creación científica del artístico! Artistas y científicos compartimos no sólo el proceso sino también muchas ambiciones: la ambición de universalidad, de belleza, de coherencia, de rigor, de alcanzar la elegancia y concisión de una fórmula matemática [...] Nos sentimos muy cercanos, pero mientras los científicos generan certezas perecederas, los artistas intentamos comunicar [...] dudas eternas.

...la Matemática es muchas cosas. Una ciencia, un arte, un lenguaje, y por ende, una forma de pensar. Demasiadas cosas. Una realidad confusa.

2 Richard Mankiewicz, *The Story of Mathematics*, Cassell, Londres, 2000.

Así que la Matemática es muchas cosas. Una ciencia, un arte, un lenguaje, y por ende, una forma de pensar. Demasiadas cosas. Una realidad confusa.

Y creo que es importante insistir en la necesidad de respetar todas esas realidades. Cada cuál pondrá el énfasis en lo que más le atraiga o le interese, pero sin excluir otros puntos de vista, porque todos son enriquecedores.

3

La situación actual de las Matemáticas en el mundo, y en España, podría tildarse de esquizofrénica.

La necesidad de competencia matemática en este mundo de la información y la comunicación que ya está aquí es, o debiera ser, evidente. Ya no le basta al ciudadano con conocer las «cuatro reglas» y unos rudimentos de geometría y de medida. La interpretación de datos estadísticos y de información gráfica, las habilidades numéricas y de estrategias básicas de resolución de problemas son, entre otras, absolutamente necesarias para comprender, actuar y desenvolverse en el siglo XXI. No en vano, en estos momentos, la demanda de matemáticos como profesionales en la empresa, en la industria, en el comercio, no cesa de crecer.

Los retos de investigación siguen siendo fascinantes: estamos en una verdadera edad dorada de las Matemáticas, en la que grandes problemas cuya solución se había buscado durante mucho tiempo han sido resueltos, generando una entusiasta confianza sobre la potencia de la Matemática actual. Las enormes capacidades computacionales de que disponemos (o de que dispondremos) y la propia tecnología de la información y de la comunicación (en la que podríamos incluir el estudio del cerebro o del genoma humano) demandan nuevas ideas matemáticas para avanzar. Los sistemas complejos, sean biológicos, económicos y financieros, del clima o de turbulencia, requieren más y mejores Matemáticas. Y la propia complejidad de nuestros sistemas de comunicaciones, de servicios, y

comerciales, exigen, para su eficaz funcionamiento, algoritmos y estrategias profundamente matemáticas.

Pero las Matemáticas, al igual que las otras ciencias (salvo la Biología), han perdido atractivo para la sociedad. Ser físico, matemático, o químico, científico que sabe de su ciencia, la transmite y/o la hace avanzar, cautiva a muy pocos. Quienes acceden a la Universidad lo hacen, hoy en día, buscando una formación con un perfil profesional preciso, esperan de la Universidad una preparación específica para ejercer una profesión imbricada en el tejido productivo.

La misma esquizofrenia se observa en la enseñanza primaria y secundaria: a la vez que crecen las necesidades en formación matemática para todo el alumnado, disminuye preocupantemente el tiempo que se les dedica en el horario escolar; mientras que la enseñanza de la historia o de la lengua es objeto de atención preferente para los políticos y para los medios de comunicación, no hay una discusión pública sobre el papel de las Matemáticas escolares, cuya importancia nadie niega, aunque sin saber a veces muy bien el porqué de la misma.

…a la vez que crecen las necesidades en formación matemática para todo el alumnado, disminuye preocupantemente el tiempo que se les dedica en el horario escolar…

4

Las matemáticas, como ya hemos comentado, desempeñan una variopinta gama de papeles en la sociedad.

Las Matemáticas aparecen en todos los cursos de la *primaria* y de la *secundaria*; para todo el mundo aquí se fragua su relación con ellas. Y en gran medida aquí se genera, para un parte, el tradicional y conocido rechazo hacia las Matemáticas, como un arcano impenetrable, tedioso y hasta odioso. Grave problema, ¡qué gran pérdida! Y ello a pesar de que una buena parte del profesorado de Matemáticas, consciente de la especial dificultad de la asignatura, viene desarrollando desde hace años una actividad incansable para buscar métodos y recursos que faciliten el aprendizaje. No es un problema sólo de España, es universal. Pero en España, hay un ingrediente especial que apunta negativamente hacia el futuro, y es la cada vez menor presencia de las Matemáticas en la formación de los profesores de primaria, de los maestros y la escasa atención que se presta a la formación didáctica del futuro profesorado de secundaria.

El engarce de la educación matemática en secundaria con la enseñanza *universitaria* es muy deficiente. Los enseñantes en la universidad no son, en general, conscientes de que el alumnado cambia y de que el nivel de conocimientos y destrezas cuando entra en la universidad no puede corresponderse con el de épocas anteriores.

Las Matemáticas tiene una presencia destacada en la *formación básica de muchas carreras y enseñanzas profesionales*. Es muy habitual que quienes explican Matemáticas en esas licenciaturas universitarias no presten la debida atención a perfilar qué matemáticas les pueden ser útiles, realmente útiles, y no adapten el tono de la enseñanza a futuros profesionales a quienes nunca aprovechará haber tenido un entrenamiento superficial sobre cómo probar esto o aquello, o sutilezas que sólo interesan a quienes se forman para ser matemáticos.

Y ésa es otra. La *formación de matemáticos* en la Universidad tradicionalmente sólo contempla un objetivo, digamos que académico, y no atiende a las múltiples salidas profesionales no docentes e investigadoras. La realidad actual es que son muy pocos los jóvenes que eligen la carrera de Matemáticas, en España y en el mundo.

La *investigación en Matemáticas* en España parece pasar por muy buenos momentos. El porcentaje de artículos de Matemáticas publicados en revistas científicas de todo el mundo y firmados por autores españoles ha crecido paulatinamente en los últimos años hasta *alcanzar un respetable 4,18%* (en el quinquenio 1996-2001) que coloca a España en el décimo puesto mundial en este aspecto. Sin embargo, las expectativas de futuro no son muy buenas, si tenemos en cuenta cómo ha decrecido el apoyo a la investigación básica y que cada vez son menos los licenciados que deciden iniciar una carrera como investigadores. Además, hay poca investigación realmente aplicada, poca interacción con las otras ciencias y con los desarrollos tecnológicos, lo que de no corregirse supondrá un retraso indudable.

La enseñanza de las Matemáticas requiere de enfoques y técnicas particulares. La investigación en Educación Matemática, inexistente hasta hace una pocas décadas, es ahora una de las ramas más pujantes dentro de la didáctica; un logro que debe mucho a la actividad de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

5

Habida cuenta de la variedad de cosas distintas que los propios aficionados y usuarios entienden por Matemáticas,

no debe sorprender que la sociedad se sienta confundida. Pero cierta confusión sería el menor de los males; la realidad es que, en términos generales, la sociedad percibe las Matemáticas como un saber estático, de poca utilidad, y antipático, por un rigor innecesario e inútil.

Y además, como hemos visto, la realidad actual de las Matemáticas vista con un cierto conocimiento de causa tiene su buena dosis de sombra.

6

¿De qué ha servido este Año Mundial?

Lo primero que se detecta entre los matemáticos que han prestado atención a este Año Matemático es una cierta insatisfacción: los grandiosos objetivos iniciales no se han cumplido, los problemas siguen ahí, y poco han cambiado las cosas. Cada uno piensa en su parcela de las Matemáticas y ve que no ha avanzado en la dirección que propone.

No. Los matemáticos son particularmente exigentes y rigurosos en sus análisis, pendientes en gran medida de los detalles. Y una cierta distancia es necesaria. La verdad es que el objetivo del Año Mundial de las Matemáticas era iniciar un camino (¿o es que alguien pensaba otra cosa?) y a fe que para eso sí que ha servido.

Durante este año los matemáticos han hablado de lo que les preocupa, se han comunicado sus experiencias y propuestas y han puesto sobre la mesa sus variados puntos de vista sobre educación o sobre investigación. Son, con frecuencia, puntos de vista que, de no dialogados, se han vuelto en apariencia irreconciliables. Y han colaborado en numerosas actividades. Nos referimos a colaboraciones que iban más allá de las habituales y restringidas parcelas de interés. Y creemos que con ello se ha cimentado la posibilidad de mayor colaboración futura para lograr metas que son comunes. Lo que no es poco.

Pero el Año 2000 no era un año para los matemáticos. El Año se ha dirigido fundamentalmente a celebrar y a exhibir Matemáticas, a que la sociedad las viera y las apreciara. Hay que divulgar Matemáticas entre los investigadores, muy encerrados en sus especialidades, entre los otros científicos, despreocupados en demasía de la utilidad instrumental y conceptual de las Matemáticas, entre todos nosotros, para ser conscientes de la magnificencia del edificio intelectual que son las Matemáticas, entre nuestros alumnos de primaria, de secundaria y de universidad, porque son el futuro, y entre la sociedad, en general, porque es bueno. Durante este año se ha hecho divulgación en todos estos campos, unos con más éxito que otros. Desde el principio se tuvo claro que malo hubiera sido que el Año Matemático se dedicara sólo a conferencias, congresos, mesas redondas, actos multitudinarios. Las actividades puntuales con alumnos, con colegas, de pequeña escala, en la que la gente se involucrara directamente, eran el objetivo; y mucho y bueno de esto ha habido: exposiciones, actividades en la calle, concursos en prensa y radio, talleres y casetas en ferias, actividades en los centros, etc.

Pero el Año 2000 no era un año para los matemáticos. El Año se ha dirigido fundamentalmente a celebrar y a exhibir Matemáticas, a que la sociedad las viera y las apreciara.

La divulgación de las Matemáticas como función social sólo tiene sentido si es sostenida. Y no es una tarea fácil. No basta con una actitud bien intencionada y voluntarista de parte de algunos matemáticos, porque la falta de experiencia y profesionalidad puede conducir a mensajes desvirtuados. Es preciso contar con los profesionales de la comunicación por una parte y, además, que las sociedades dediquen recursos específicos a estas tareas.

Hay que decir que la comunidad matemática española es dinámica, entusiasta, consciente de su papel social y preocupada por cumplirlo lo más acertadamente. Conviene recordar, por ejemplo, el extraordinario avance, mencionado más arriba, de la calidad y de la relevancia de la investigación matemática y en educación matemática, la dedicación sostenida de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, y de los profesores de secundaria en general, a la mejora de la calidad de la enseñanza de las Matemáticas, la presidencia del ICMI[3] durante ocho años de Miguel de Guzmán, la organización, a cargo de la Societat Catalana de Matemàtiques, del Tercer Congreso Europeo de Matemáticas en Barcelona, la labor de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, de la Sociedad Española de Matemática Aplicada y de la Sociedad de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, y de la renovada Real Sociedad Matemática Española que llamó a la creación del CEAMM2000.

Durante este año la comunidad matemática ha mostrado creatividad, ingenio, entusiasmo y cultivada dedicación, al diseñar y llevar adelante todo tipo de actos y actividades llenos de contenido. El Año Matemático ha hecho aflorar, o mejor, ha exhibido ante todos esa dedicada creatividad.

3 ICMI, es la *International Commission on Mathematical Instruction*, la comisión de la IMU que entiende de asuntos de Educación Matemática.

Cuando más arriba describíamos un panorama de los problemas que aquejan y de las cuestiones que interesan a la comunidad matemática lo hacíamos con crudeza y sin afeites. Pero en ese panorama enseguida destaca que se trata de cuestiones que afectan a una comunidad, no a individuos. Las soluciones, el camino para mejorar, pasa por la acción colectiva. Tenemos muchas sociedades matemáticas, una multiplicidad que es fruto de una historia de encuentros y desencuentros, pero sobre todo de la diversidad de enfoques cara a las Matemáticas. Uno de los frutos más ricos del Año de las Matemáticas ha sido la colaboración entre todas estas sociedades. Una cooperación en la que las sociedades se han reconocido unas a otras sus potencialidades, sus diversas capacidad de acción, los diversos problemas y preocupaciones. No ha resultado sencillo, pero se ha abierto un camino de colaboración coordinada y estable de las sociedades, en la que se superen tensiones y recelos.

7

Y, ¿a partir de ahora qué?

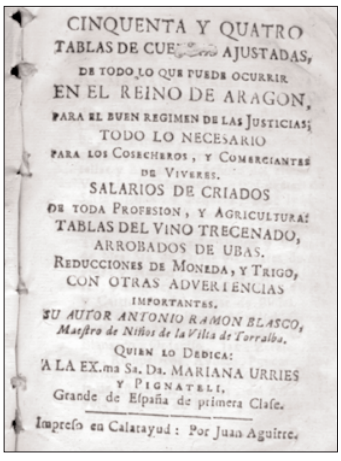
Hay mucho camino por andar. Una acción conjunta de las sociedades debería lograr que la voz de los matemáticos (a quienes ellas representa) se tuviera en cuenta, como no está siendo el caso, en la toma de decisiones en asuntos que les atañen profesionalmente y que les preocupan por su importancia social como planes de estudio, en todos los niveles educativos o formación de profesores y de investigadores.

El Año Matemático debiera ser el comienzo de un camino de colaboración entre los matemáticos para lograr una mejor cultura matemática, una mejor educación en Matemáticas, una mejor investigación en Matemáticas y una mejor preparación de los profesionales matemáticos. Sin perder nunca de vista que estos objetivos son bienes sociales en los que todos creemos y que no son un empeño corporativista por defender unos intereses.

José L. Fernández (RSME)
Manuel de León (RSME)
M.ª Jesús Luelmo (FESPM)
Juan Luis Vásquez (SEMA)
Comisión Permanente del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000

SOCIEDADES E INSTITUCIONES DEL COMITÉ ESPAÑOL DEL AÑO MUNDIAL DE LAS MATEMÁTICAS

- Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)
- Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
- Real Academia de Ciencias (RACEFN)
- Real Sociedad Matemática Española (RSME)
- Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)
- Sociedad Española de Historia de las Ciencias y las Técnicas (SEHCYT)
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
- Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA)
- Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI)
- Societat Catalana de Matemàtiques SCM


CINQUENTA Y QUATRO
TABLAS DE CUE[illegible] AJUSTADAS,
DE TODO LO QUE PUEDE OCURRIR
EN EL REINO DE ARAGON,
PARA EL BUEN REGIMEN DE LAS JUSTICIAS;
TODO LO NECESARIO
PARA LOS COSECHEROS, Y COMERCIANTES
DE VIVERES.
SALARIOS DE CRIADOS
DE TODA PROFESION, Y AGRICULTURA:
TABLAS DEL VINO TRECENADO,
ARROBADOS DE UBAS.
REDUCCIONES DE MONEDA, Y TRIGO,
CON OTRAS ADVERTENCIAS
IMPORTANTES.
SU AUTOR ANTONIO RAMON BLASCO,
Maestro de Niños de la Villa de Torralba.
QUIEN LO DEDICA:
A LA EX.ma Sa. Da. MARIANA URRIES
Y PIGNATELLI,
Grande de España de primera Clase.
Impreso en Calatayud: Por Juan Aguirre.

155
SALARIO DE CRIADAS.
El Año es 12. Meses.

Ganancia por Año.	Ganancia por Mes.	Ganancia por Dia.
Reales.	sueld.diner.terol.	diner. 1540
24.	4. 0. 0.	2. . 2.
26.	4. 5. 1.	2. . 4.
28.	4. 10. 2.	2. . 6.
30.	5. 0. 0.	2. . 8.
32.	5. 5. 1.	2. . 10.
34.	5. 10. 2.	2. . 12.
36.	6. 0. 0.	2. . 14.
38.	6. 5. 1.	3. . 1.
40.	6. 10. 2.	3. . 3.
42.	7. 0. 0.	3. . 5.
44.	7. 5. 1.	3. . 7.
46.	7. 10. 2.	3. . 9.
48.	8. 0. 0.	3. . 11.
50.	8. 5. 1.	3. . 13.
52.	8. 10. 2.	4. . 0.
54.	9. 0. 0.	4. . 2.
56.	9. 5. 1.	4. . 4.

72 Medios sueldos. | Libras, dineros, terelos. | Almudes, sueld. din. terel.
à 23. 7. 2. 1. 14. 2.
24. 8. 0. 2. 0. 0.
25. 8. 1. 2. 1. 1.
26. 8. 2. 2. 2. 2.
27. 9. 0. 2. 4. 0.
28. 9. 1. 2. 5. 1.
29. 9. 2. 2. 6. 2.
30. 10. 0. 2. 8. 0.
31. 10. 1. 2. 9. 1.
32. 10. 2. 2. 10. 2.
33. 11. 0. 2. 12. 0.
34. 11. 1. 2. 13. 1.
35. 11. 2. 2. 14. 2.
36. 12. 0. 3. 0. 0.
37. 12. 1. 3. 1. 1.
38. 12. 2. 3. 2. 2.
39. 13. 0. 3. 4. 0.
40. 13. 1. 3. 5. 1.
TA-

73 TABLA AJUSTADA PARA EL Aguardiente.
Se hallan los precios de la libra, y valor del Cantaro, peso del dineral: el Cantaro tiene 28. libras.

Precios de la Libra. Dineros.	Precios del Cantaro. sueld.diner.	Peso del Dineral. onz.at.arien.granos
à 6.	10. 8.	2. 0. 0.
7.	12. 4.	1. 11. 13.
8.	14. 0.	1. 8. 0.
9.	15. 12.	1. 5. 11.
10.	17. 8.	1. 3. 6.
11.	19. 4.	1. 1. 15.
12.	21. 0.	1. 0. 0.
13.	22. 12.	0. 14. 24.
14.	24. 8.	0. 13. 23.
15.	26. 4.	0. 12. 26.
16.	28. 0.	0. 12. 0.
TA-

SUMA 37
junio 2001, pp. 33-38

Actividades en el 2000: algunas nubes en un día radiante

Xavier Vilella Miró

INFORME 2000

Desde la Secretaría de Actividades de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas se presenta una apretada síntesis de las actividades organizadas y realizadas, con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, por las sociedades federadas y por la propia Federación.

LA FEDERACIÓN de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) ha organizado multitud de actividades en el 2000, ya sea como federación, ya sea cada una de las sociedades federadas. La cantidad de jornadas, seminarios, debates, conferencias, cursos, exposiciones, etc. es tan grande que incluso se nos hace difícil recopilarlas: algunas memorias que me llegan de cada sociedad contienen centenares de actividades, páginas y más páginas de descripciones y valoraciones, de explicación de procesos y de críticas finales. En todas ellas se nota el esfuerzo de miles de maestros, profesores y profesoras de todas las comunidades para lograr que la Educación Matemática estuviera presente en el año 2000. Un esfuerzo de un voluntariado al cual, a menudo, no se le reconoce su labor.

Un tema que merece comentario aparte es la labor desarrollada por la Federación en la constitución de los Comités del Año 2000 y en el desarrollo de su tarea, tanto el que coordinó el ámbito de toda España como en cada comunidad o provincia. He de destacar que generalmente los representantes de las sociedades de la Federación han ejercido de verdaderas locomotoras, coincidiendo con aquellas personas de otras sociedades que deseaban dar realce al Año Mundial de las Matemáticas.

Desde mi posición de secretario de actividades de la Federación dispongo de un conjunto de información sobre las actividades, lo que me permite tener un punto de vista más general sobre el tema. Desde la secretaría se ha elaborado una ficha para recoger los aspectos principales de cada actividad, formada por unos 20 apartados, con los que podemos hacernos una idea bastante acertada de lo que se ha hecho. Se pide también que se explicite qué es lo que se pretendía al organizar la actividad, y qué se ha obtenido de ella.

Por otro lado, se están elaborando los protocolos de actividades de la Federación (y de las sociedades federadas

con relación a la Federación), que nos permitirán profundizar en el establecimiento de una forma de actuar más metódica, sin olvidos que luego lamentamos, y con un sello propio de nuestra Federación.

Un primer análisis

De un primer análisis de todo lo que he podido recoger y evaluar, puedo destacar algunos aspectos. Empezaré por los positivos, seguiré con los ambivalentes, y señalaré finalmente aquellos que conviene mejorarlos:

1. *La gran variedad, la diversidad de perfiles, de tipología de público al que van dirigidas las actividades llevadas a cabo*. Esta primera conclusión se refiere al tipo de propuesta realizada. Se detecta un interés en llegar a públicos distintos, diversos, con perfiles bien diferenciados, ya sean maestros o profesores y profesoras, ya sean alumnos de diferentes niveles educativos, ya sea la ciudadanía en general. Puedo afirmar que diversificamos mucho la oferta de formación / renovación / divulgación en Educación Matemática.

2. Igualmente, *la diversidad de propuestas, su estructura, su forma final de llegar a quienes participan en ellas*. Esta segunda conclusión tiene en cuenta la estructura de la propuesta, su grado de libertad de cara a los participantes, que nos lleva a diferentes formas de participación. La variedad vuelve a ser la tónica general: desde cursos de formación del profesorado, hasta exposiciones abiertas a todo tipo de público, pasando por seminarios, concursos, jornadas y talleres... La gran mayoría de las actividades contenían un alto grado de libertad, facilitaban la participación más activa.

3. *El interés en organizar actividades con otras asociaciones, entidades o estamentos públicos y privados*. Se puede constatar que tanto la Federación como las sociedades federadas han colaborado con otras organizaciones, sean o no del ámbito estrictamente de la Educación Matemática, para conseguir los objetivos perseguidos. Esta capacidad de adaptación tiene un gran valor para eventos como el 2000, en el que se intentan concentrar muchos esfuerzos, pero aún es mayor el valor de cara al futuro a medio y largo plazo. Todos los temas educativos contienen una gran transversalidad y, seguramente, deberemos profundizar en el trabajo conjunto con otras sociedades, entidades y administraciones en los años venideros.

4. *Muchas actividades se han basado en salir a la calle, en ir al entorno cercano, o en recoger aspectos matemáticos de ese entorno.* Podemos afirmar que, en cierta medida, predicamos con el ejemplo. Un tema en el que insistimos recurrentemente es el descubrimiento de las matemáticas en la calle, en casa, en la imagen. Se puede constatar el esfuerzo realizado por diferentes sociedades en conseguir hacer realidad este deseo, especialmente en actividades relacionadas con el profesorado, y también en las que el alumnado era el protagonista principal.

Se detecta un interés en llegar a públicos distintos, diversos, con perfiles bien diferenciados, ya sean maestros o profesores y profesoras, ya sean alumnos de diferentes niveles educativos, ya sea la ciudadanía en general.

5. *La relación con los medios de comunicación: se denota un incremento en la preocupación en dar a conocer nuestras actividades, pero persiste la actitud general de estos medios en ignorarlas.* Parece ser que empieza a mejorar nuestra actitud en referencia a los medios de comunicación, empezamos a comprender que la sociedad en la que vivimos se mueve a ritmo de noticia y, por lo tanto, una actividad requiere de una proyección antes y después de su realización: antes, porque puede depender de ello su éxito de participación, y porque prepara y difunde lo que vendrá; después, porque es el certificado de su existencia, y permite que sus conclusiones lleguen seguramente mucho más lejos. Por otra parte, esta mejor actitud referida a los medios, contrasta con la persistencia del nulo interés de estos medios en cuanto a la Educación Matemática. No nos sorprende, claro está, dado el cariz que está tomando la comunicación en general, cada vez más interesada por falsos experimentos sociológicos del tres al cuarto o por historias para no dormir de abusos y violencia. Pero siempre hay excepciones, y se han de saber aprovechar. En cualquier caso, que no sea por falta de información sobre lo que hacemos, lo que perseguirnos, y sobre cómo lo hemos hecho.

6. *La esponsorización: se ha acudido a ella en casi todas las actividades, unas veces por parte de la Administración (local, autonómica, estatal) y otras a la privada (bancos y cajas, editoriales, etc.).* Este aspecto también indica una tendencia a incrementar la relación con las administraciones y el mundo empresarial. No puedo apreciar si ello se debe a un simple problema de financiación o se comprenden otros aspectos relacionados. Me refiero a que una actividad altamente esponsorizada puede transmi-

tir a quienes la reciben un mensaje: se trata de una actividad altamente valorada por la sociedad, que tiene un gran interés. Será más y mejor difundida, porque quienes la financian querrán que se conozca su esfuerzo económico. Crece su importancia social. Por todo ello, tendrá seguramente más influencia en el medio al que se dirige.

7. *Las valoraciones por parte de los organizadores de la actividad acostumbran a ser positivas.* Este aspecto se valora desde el punto de vista de cómo ve la propia organización la actividad y sus resultados. No se juzga si se ajusta a la realidad, dado que no se acostumbra a disponer de medios objetivos para evaluarlo. En general, se percibe una autosatisfacción elevada, aunque en algún caso en que la valoración es negativa se debe a la baja participación. Un par de comentarios al respecto: en primer lugar, hacer constar que aún no nos acostumbramos a pensar en la evaluación de la actividad, en que necesitaremos datos en los que basarnos más allá de la intuición y los comentarios de algunas personas cercanas. Incluso una buena cifra de participantes no asegura en absoluto la calidad y el verdadero éxito de la actividad. En segundo lugar, respecto a la participación, a menudo tenemos unas expectativas que no son explícitas y, por lo tanto, no podemos saber si son compartidas por el resto de la organización. Antes de su desarrollo, conviene reflexionar un poco acerca de la participación esperada en cualquier actividad, no dejarse llevar por un optimismo desmesurado, pero tampoco prever muy a la baja la participación. En todo caso, si se ha previsto un número de participantes sobre la base de un razonamiento explícito, podremos al final evaluar los resultados e intentar establecer las razones del acierto o del desacierto.

8. *En algunos casos, la actividad propuesta ha representado para la administración una oportunidad para difundir y dar a conocer el patrimonio cultural, histórico, artístico, arquitectónico, de un pueblo o una ciudad, de una comunidad.* Este tipo de actividades cumplen algunos de los requisitos que podríamos asignar a las llamadas «actividades ricas»:

a) Acostumbran a ser multidisciplinares, o permiten fácilmente la multidisciplinariedad.

b) Se relacionan siempre con el entorno urbano, social, cultural.

c) Resultan muy atractivas para la administración (local y autonómica, especialmente) y ello facilita su esponsorización.

d) Cumplen parte de la función social de las matemáticas, colaborando a, difundir y a conocer nuestro rico patrimonio.

e) Interesan a los medios de comunicación porque resultan ser originales y porque en su realización intervienen agentes sociales diversos, además de los estrictamente educativos.

f) Se pueden relacionar con facilidad con aspectos multiculturales, permitiendo un acercamiento cultural diverso a los participantes.

Todo ello hace que estas actividades cuenten con un valor añadido al suyo propio como actividad de Educación Matemática.

…se le ha dado muy poco valor a la relación con los Movimientos de Renovación Pedagógica (MRP), los sindicatos, u otras organizaciones, como federaciones de asociaciones de padres y madres, otras sociedades afines a la educación matemática, bibliotecas, etc.

9. *En general, puedo afirmar que se le ha dado muy poco valor a la relación con los Movimientos de Renovación Pedagógica (MRP), los sindicatos, u otras organizaciones, como federaciones de asociaciones de padres y madres, otras sociedades afines a la educación matemática, bibliotecas, etc.* La reflexión que este hecho me produce se refiere a la creación de red. Me explico: yo soy de los que opinan que toda actividad educativa que se desee eficaz y eficiente, requiere de la acción coordinada de muchos y variados agentes. La forma que se me ocurre que debe tomar esta coordinación es la del trabajo en red, una red formada por nudos que entrelazan y relacionan, incluso a gran distancia, un maestro o maestra de educación infantil en un centro de un pueblo, con el realizador de un programa de televisión, a través de diversos intermediarios (un concejal del Ayuntamiento, la inspectora de zona, un centro de ocio infantil con una ludotecaría...). Es decir, creo que todas las actividades deberían ser motivo de reflexión interna, nuestra, pero también por parte de otros agentes del entorno, y para ello es precisa una cierta relación, una cierta comunicación mutua. Seguramente la actividad se podrá realizar aún sin esta relación, pero pienso que su calidad mermará. Este proceso, repetido *n* veces, puede facilitar la creación de una tupida red de relaciones entre agentes sociales y culturales, con la persona en el centro, sea ésta niño o niña o joven, maestro o profesora, familia, etc.

10. *A menudo no se produce una buena comunicación de los resultados a la sociedad, algunas veces ni a los centros ni*

a los propios socios. Ahí tenemos un punto en el que también debemos mejorar. El esfuerzo que representa la organización de actividades, el éxito final obtenido, puede ser sencillamente desconocido por aquellos a quien se dirigía. Debemos siempre contar con un plan de comunicación en el que figure la comunicación interna y externa, la comunicación anterior y posterior a la actividad. Ello facilitaría enormemente el conocimiento de lo tratado, de las conclusiones, y permitiría que pudiera repercutir en la labor del profesorado, en la educación en la familia, en la actitud de la administración. En definitiva, se sumaría a la mejora de la consideración social de la Educación Matemática.

El resumen imposible

Como ya he señalado, resulta imposible resumir todas las actividades ligadas al Año Mundial de las Matemáticas en unas pocas páginas, dado el enorme volumen de información recogida. Todas las sociedades han llevado a cabo multitud de actos, cursos, encuentros, conferencias, etc. Además de todas estas actividades, cabe señalar la celebración de jornadas especiales en el Congreso de los Diputados, y sesiones especiales en parlamentos autonómicos, como en el Parlament de Catalunya o en el Gobierno de Canarias, así como la participación en diferentes encuentros internacionales de Educación matemática o de sociedades de profesores de matemáticas (el segundo Congreso Internacional sobre Educación Matemática y Sociedad, en Portugal; el Encuentro de Sociedades de Matemáticas españolas y portuguesas, en Zamora; las reuniones preparatorias de la constitución de la Federación Iberoamericana, los progresos en la ampliación de la Federación Europea).

Solamente con el ánimo de mostrar la gran diversidad y complejidad de las actividades realizadas, sin que signifique ningún tipo de selección ni clasificación, simplemente voy a nombrar algunas de ellas:

- El amplio y complejo Congreso de Educación Matemática - cem2000, satélite del congreso Europeo de Matemáticas (EMC), organizado en Cataluña por FEEMCAT.
- El «Rincón Matemático» de institutos de Leganés, en el CPR de este barrio, y la exposición conjunta «2.000 piezas matemáticas» de la Sociedad Madrileña Emma Catelnuovo.
- La construcción de icosaedros de Cantabria, en el Día Escolar de las Matemáticas.
- El congreso Alhambra 2000, también satélite del EMC, un encuentro euro-árabe de Matemáticas, con la dinámica sociedad andaluza Thales como coorganizadora.

La construcción de icosaedros de Cantabria…

El concurso de Primavera en La Rioja…

La exposición «Geometría mudéjar en Aragón…

El acto académico de homenaje a Puig Adam…

Las actividades ligadas al meridiano cero, en Castellón.

- Las XX Jornadas de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.
- El concurso de Primavera en La Rioja, con más de 400 participantes como finalistas.
- Las ediciones especiales del calendario matemático en la Comunidad Valenciana.
- las Jornadas Matemáticas de Avilés.
- El V Encuentro de profesores extremeños de matemáticas, en Cáceres.
- El Congreso Regional de Educación Matemática, en Ciudad Real.
- La exposición «Geometría mudéjar en Aragón», a cargo de la Sociedad Aragonesa.
- El seminario Castellano celebrado en Burgos.
- Los encuentros del profesorado de matemáticas de la Comunidad de Madrid.
- El Día de la Matemática, con 70 talleres en un polideportivo municipal en la comarca catalana del Priorat.
- El concurso de problemas de ingenio Thales, en la Alcazaba de Almería.
- La exposición de fotografía matemática, acompañada de actividades para los alumnos, en Galicia.
- El acto académico de homenaje a Puig Adam, en el centenario de su nacimiento, en Madrid, coorganizado por la Sociedad Madrileña Enma Castelnuovo.
- El ciclo de conferencias «Matemáticas y vida cotidiana», organizado por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes, que ha dado lugar a un número monográfico de la revista de cultura y ciencias sociales *Ábaco.*
- Las actividades ligadas al meridiano cero, en Castellón.
- El concurso de «enxeño e entretemento matemático», sobre material manipulativo, en Santiago.

- La Semana Matemática en la Nave Ivanow, en Barcelona,
- Los múltiples ciclos de conferencias en diversas localidades de Andalucía, organizados por la sociedad andaluza Thales.
- El suplemento matemático dominical en dos periódicos canarios, las colaboraciones semanales y mensuales en diversos periódicos aragoneses, los artículos en La Rioja, en Cataluña, en Galicia, en Madrid, los artículos dedicados especialmente al Año Mundial, como en *El País* (cada mes aparecieron artículos diversos sobre Matemáticas), *ABC*, *El Mundo*, *La Vanguardia* y en revistas diversas.
- La exposición de «Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura».
- La exposición itinerante sobre «Pintura matemática de Julián Gil», en La Rioja.
- La exposición «Matemáticas 2000», de la Sociedad Canaria.
- Los debates en las televisiones locales catalanas, como en El Vendrell, Barcelona, Mataró, etc. y los programas de radio, como los de Canarias o de Huesca.
- Las publicaciones sobre educación matemática, numerosísimas, como la revista *Números* de la Sociedad Canaria, dedicada a la figura de Puig Adam, o el número especial «Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos», los «Paseos matemáticos por Logroño»; las de la Sociedad Extremeña en colaboración con la Federación; las de la sociedad andaluza, Thales; la recopilación «Las diez primeras olimpiadas nacionales», a cargo del equipo de las comarcas de Girona.
- Las visitas guiadas a la Mezquita Catedral de Córdoba, en las que se destacan los problemas matemáticos que se plantearon y las soluciones adoptadas.

Los múltiples ciclos de conferencias en diversas localidades de Andalucía…

La exposición de «Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura»…

La exposición «Matemáticas 2000», de la Sociedad Canaria…

Las publicaciones sobre educación matemática…

Las olimpiadas diversas, prácticamente en todas las comunidades…

- Las actividades conjuntas entre departamentos de institutos: matemáticas y dibujo, matemáticas y lenguaje, matemáticas y ciencias, etc., como en diversos IES de Madrid.
- La exposición «El legado de las matemáticas» con su versión virtual en la red, coorganizada por Thales.
- El concurso de Caballeros Enigmatemáticos, a cargo de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas.
- Los muchos y diversos concursos de carteles (Cantabria, Extremadura, Canarias), de fotografía matemática (Andalucía, Cataluña, Aragón, Canarias, Cantabria).
- Las olimpiadas diversas, prácticamente en todas las comunidades, concursos de resolución de problemas, como el de la Sociedad Puig Adam o los de Andalucía, o de entretenimientos matemáticos.
- Los homenajes, recuerdos y exaltación de profesores y profesoras de matemáticas de diferentes puntos de España, como en Cataluña, Madrid, Castilla-León, La Rioja, Andalucía.
- Videos matemáticos, simultaneas de ajedrez, ciclos de cine relacionado con las Matemáticas, chistes, adivinanzas, anécdotas... ¡hasta un partido de fútbol!

Mención aparte merece la instauración en este Año Mundial del «Día Escolar de las Matemáticas», el 12 de mayo de cada año, a propuesta de nuestra Federación, que ha recibido amplio apoyo en diferentes comunidades, y que se ha afianzado en el 2001. Estamos convencidos de que se extenderá cada vez más y que se convertirá en un referente de la Educación Matemática en España.

Insisto en que no se trata de ninguna lista exhaustiva y pido disculpas por no nombrar centenares de actividades que no aparecen aquí. Sólo pretendo ejemplificar el decálogo expuesto más arriba.

Y para que no se diga que no he usado ningún número en todo el artículo, mencionaré un dato: el número total aproximado de actividades realizadas en el 2000 por la Federación, o en las que ha participado activamente la Federación, o cualquiera de las sociedades federadas, es próximo a las 2.000. Curiosa coincidencia. Un promedio de más de 10 actividades relacionadas con la Matemática y la Educación Matemática por día lectivo del año 2000. Ese es el número de actividades que han llegado a mis manos, lo que no significa que su número real pueda ser todavía mayor. Francamente, creo que nos merecemos un sobresaliente en «Año Mundial de las Matemáticas».

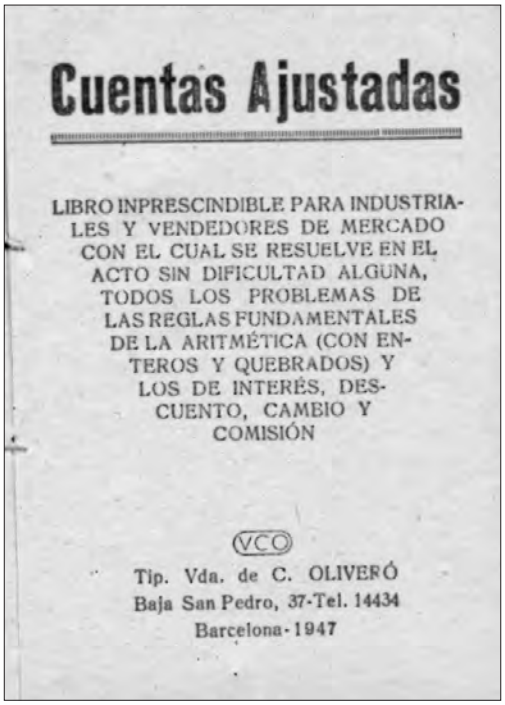
Nos merecemos un descanso, pero sabemos que no nos lo tomaremos. Somos así. Acabado el 2000, estamos en plena tarea: nuevos seminarios de la Federación, las JAEM en Zaragoza, los contactos europeos e iberoamericanos,

nuestra querida Olimpiada, las actividades anuales de cada sociedad... y un gobierno del estado que nos ignora aún en el momento de reformar la Reforma. Definitivamente, tenemos trabajo.

Queremos y debemos aprovechar las puertas abiertas durante este año especial, y ello requiere tiempo y esfuerzo, algo que nuestro voluntariado no acostumbra a escatimar.

Xavier Vilella
Secretario de Actividades de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Que el 2001, y el 2002, y el 2003, y... nos sean tan productivos como este año 2000, ése es mi deseo para todos y para todas. Sintamos el orgullo por la tarea realizada y afrontemos con energía renovada el siglo XXI.

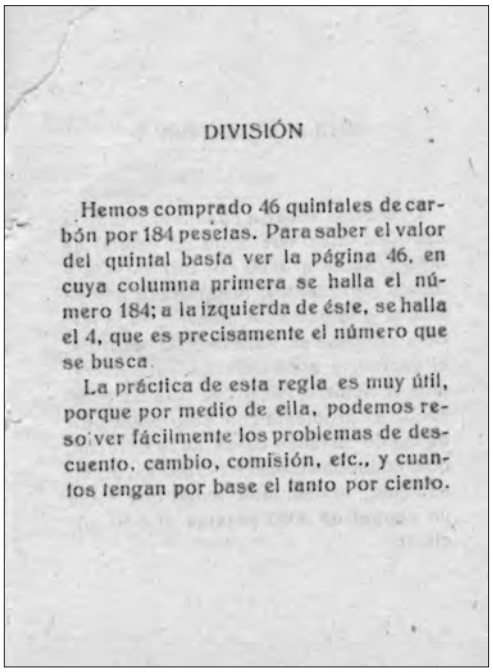


Cuentas Ajustadas

LIBRO INPRESCINDIBLE PARA INDUSTRIALES Y VENDEDORES DE MERCADO CON EL CUAL SE RESUELVE EN EL ACTO SIN DIFICULTAD ALGUNA, TODOS LOS PROBLEMAS DE LAS REGLAS FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA (CON ENTEROS Y QUEBRADOS) Y LOS DE INTERÉS, DESCUENTO, CAMBIO Y COMISIÓN

VCO

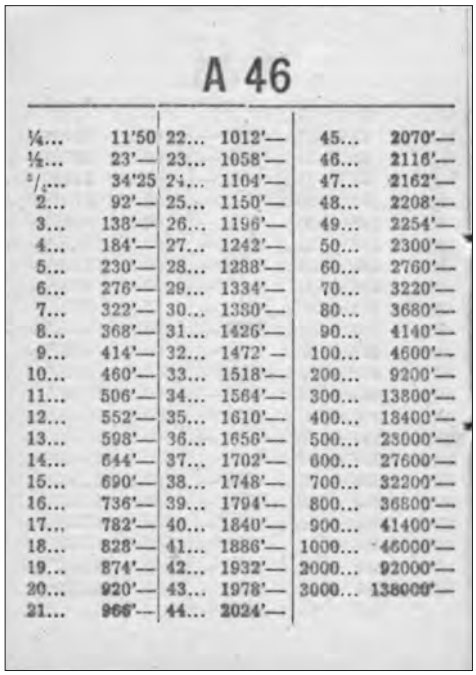
Tip. Vda. de C. OLIVERÓ
Baja San Pedro, 37-Tel. 14434
Barcelona-1947



DIVISIÓN

Hemos comprado 46 quintales de carbón por 184 pesetas. Para saber el valor del quintal basta ver la página 46, en cuya columna primera se halla el número 184; a la izquierda de éste, se halla el 4, que es precisamente el número que se busca.

La práctica de esta regla es muy útil, porque por medio de ella, podemos resolver fácilmente los problemas de descuento, cambio, comisión, etc., y cuantos tengan por base el tanto por ciento.



A 46

¼...	11'50	22...	1012'—	45...	2070'—
½...	23'—	23...	1058'—	46...	2116'—
¾...	34'25	24...	1104'—	47...	2162'—
2...	92'—	25...	1150'—	48...	2208'—
3...	138'—	26...	1196'—	49...	2254'—
4...	184'—	27...	1242'—	50...	2300'—
5...	230'—	28...	1288'—	60...	2760'—
6...	276'—	29...	1334'—	70...	3220'—
7...	322'—	30...	1380'—	80...	3680'—
8...	368'—	31...	1426'—	90...	4140'—
9...	414'—	32...	1472'—	100...	4600'—
10...	460'—	33...	1518'—	200...	9200'—
11...	506'—	34...	1564'—	300...	13800'—
12...	552'—	35...	1610'—	400...	18400'—
13...	598'—	36...	1656'—	500...	23000'—
14...	644'—	37...	1702'—	600...	27600'—
15...	690'—	38...	1748'—	700...	32200'—
16...	736'—	39...	1794'—	800...	36800'—
17...	782'—	40...	1840'—	900...	41400'—
18...	828'—	41...	1886'—	1000...	46000'—
19...	874'—	42...	1932'—	2000...	92000'—
20...	920'—	43...	1978'—	3000...	138000'—
21...	966'—	44...	2024'—		

SUMA 37
junio 2001, pp. 39-41

El Año Mundial de las Matemáticas en Andalucía

Antonio Pérez Jiménez

INFORME 2000

Desde la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», una de las más antiguas de la Federación y la de mayor número de socios, se describe cómo se vivió en Andalucía el Año Mundial de las Matemáticas.

COMO EN TODAS las grandes conmemoraciones, un primer balance nunca puede ser negativo porque suelen ser tantas las actividades que se proponen que, sólo con mirar de forma absoluta el número de las realizadas, la conclusión ha de ser optimista. Además, en las actividades y acciones que potencian las Sociedades de Profesores es tal el entusiasmo y el derroche de energías que forzosamente (si soslayamos la mirada de los pesimistas recalcitrantes) han de contemplarse prioritariamente los aspectos positivos que, sin duda, serán muchos.

La verdad es que la mera relación de títulos genéricos nos da una idea de la multiplicidad y variedad de actividades:

- Olimpiadas Matemáticas, Competiciones y Premios.
- Exposiciones diversas, incluyendo exposiciones de libros antiguos.
- Jornadas, Congresos, Seminarios.
- Cursos, Conferencias, Charlas.
- Publicaciones: desde las de carácter científico a las lúdicas, pasando por las publicaciones en prensa.
- Actividades de Matemáticas en la calle, con participación del público en general.

Cuando en 1992 la Unión Matemática Internacional (IMU) declaró el año 2000 Año Mundial de las Matemáticas se plantearon los siguientes objetivos:

1) Determinar los grandes desafíos matemáticos del siglo XXI.
2) Proclamar las Matemáticas como una de las claves fundamentales del desarrollo.
3) Impulsar su presencia sistemática en la sociedad de la información.

Además, el Comité Andaluz añadió un cuarto objetivo:

4) Acercar las Matemáticas a la sociedad y contribuir al fomento de una Educación Matemática adecuada para la población andaluza.

Estoy en condiciones de afirmar que hemos colaborado decisivamente a la consecución de tales objetivos.

Tanto el primero (escrito con el deseo de emular el planteamiento que para los años sucesivos indicase Hilbert en el célebre Congreso de 1900) como el segundo, lo hemos traducido por sesiones de carácter científico en las que se ha puesto el empeño en determinar el estado de la cuestión y en la propuesta de líneas de actuación (Encuentro de Matemáticos Andaluces; Grupo de Estudio sobre el estado actual de las matemáticas en Andalucía; Semblanzas de matemáticos andaluces ilustres; Semanas Matemáticas (en su vertiente de comunicación científica) desarrolladas en casi todas las provincias; Conferencias; Charlas, Seminarios, etc).

En cuanto al tercer objetivo, en una primera instancia deberíamos decir, sencillamente, que hemos hecho lo que hemos podido, pues no es fácil impulsar la presencia de las matemáticas en la sociedad de la información si se intenta, además, que sea sistemática. Si no hacemos mucho caso a este adjetivo y lo consideramos como algo que hay que conseguir a un plazo muy largo, hay que resaltar que hemos obtenido un seguimiento importante en los medios de comunicación locales y esporádico en los regionales (abundante a veces pero insuficiente desde el punto de vista de lo que uno desea). Pero si por penetración en la sociedad de la información entendemos además, como se anuncia en el cuarto objetivo, la divulgación a través de otros mecanismos, hemos de constatar grandes logros:

a) Distintas exposiciones de los más diversos tipos celebradas en todas las provincias, en particular merece resaltarse la exposición de libros «El Legado de las Matemáticas», de carácter regional, que ha tenido una presencia contabilizada en más de 45.000 personas; esta exposición ha sido, además, una buena manera de hacerse presente en nuestra sociedad, con la historia por delante y en el incomparable marco del Salón de Tapices de los Reales Alcázares de Sevilla.

b) La Jornada Matemática en el Parlamento Andaluz nos ha permitido relacionar las matemáticas con la política, con la empresa y su papel en la educación y ha supuesto, además de la publicidad mediática añadida, la utilización (dicho sea en su sentido más noble) del foro publico más importante de nuestra Comunidad.

c) Finalmente, las Actividades de Matemáticas en la calle han servido para divulgar los aspectos más lúdicos y atractivos de nuestra disciplina, permitiendo la participación del gran público en actividades con contenido matemático.

…las Actividades de Matemáticas en la calle han servido para divulgar los aspectos más lúdicos y atractivos de nuestra disciplina, permitiendo la participación del gran público en actividades con contenido matemático.

En relación con el último objetivo, además de la divulgación ya señalada, hemos de indicar la multiplicidad de actividades centradas en el fomento de la Educación Matemática. En el aspecto científico la Educación Matemática ha tenido su propio marco en el Encuentro de Matemáticos Andaluces y en el Grupo de Estudio en torno a la Educación Matemática (con exposición de sus conclusiones en las Jornadas celebradas en el Parlamento). En cuanto a la divulgación entre profesores de enseñanza primaria y secundaria (entendiendo por divulgación también el intercambio de experiencias en torno a la enseñanza en las aulas), hay que indicar el Congreso de Educación matemática celebrado con carácter regional en San Fernando (Cádiz) y la segunda parte de la Jornada Matemática en el Parlamento. Además, en todas las Semanas Matemáticas celebradas en Andalucía ha ocupado un lugar importante la educación matemática con celebración de múltiples y variadas actividades, algunas de las cuales incluía visitas programadas de Centros. En concreto, por el Salón de Juegos Matemáticos, durante la Semana celebrada en Sevilla pasaron más de tres mil alumnos.

Los alumnos y profesores han sido centro innegable del 2000. Ya hemos aludido a la participación de los primeros en las actividades de las Semanas Matemáticas. La Olimpiadas, realizadas en los niveles de primaria, secundaria y preuniversitario, las Gymkanas, los Concursos de Fotografía y Matemáticas, y otras variedades de competiciones matemáticas han permitido la participación directa de una gran cantidad de alumnos y de Centros; asimismo, se han realizado publicaciones especiales para ellos: *O'Thales* es un buen ejemplo de publicación divulgativa para alumnos. Ha sido remitida a todos los Centros de Andalucía.

En cuanto a los profesores, ya hemos señalado múltiples actividades pensada por y para los mismos. Pero a más abundancia, queremos destacar: las Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas que, bajo el subtítulo

«Retos de la Educación matemática del siglo XXI» tuvo lugar en Granada, con una importante participación de nuevos profesores y de alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura; los Premios Thales-San Fernando, en la modalidades de investigación y renovación en educación matemática, que nos has acercado más a los profesores de Portugal y de América latina. Por último, hay que resaltar dos publicaciones notables hechas con motivo de las conmemoraciones del citado año: la edición facsimilar de un ejemplar del *Analisyn infinitorum* de Euler (cedido gentilmente a los efectos de edición por el Real Observatorio de la Armada en San Fernando), acompañada de la traducción y una extraordinaria edición crítica; y el catálogo de la exposición *El Legado de las matemáticas*, magníficamente ilustrado y con el sabor de un relato histórico al hilo de los libros expuestos.

En este breve recorrido he pretendido realizar una pequeña síntesis de lo que ha supuesto el año 2000 en Andalucía, a la luz de los objetivos propuestos por la IMU. Hay muchos datos y actividades concretas no señalados (porque no ha sido mi intención hacer un compendio de las actividades, que va a editarse en breve) pero con la muestra citada creo que ha sido suficiente para entender hasta dónde hemos alcanzado.

Todos los logros lo han sido gracias a la unión de esfuerzos que, de manera prioritaria y siguiendo los llamamientos realizados desde la IMU, la Federación de Sociedades y el Comité Español para el Año 2000, nos planteamos desde los distintos estamentos y que se plasmó organizativamente en un Comité Andaluz, del que tuve el honor de ser el portavoz. Este Comité estuvo formado por:

- Todas las Sociedades con implantación en Andalucía: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Real Sociedad Matemática Española, Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, Sociedad Española de Investigación en la Educación Matemática y Sociedad Española de Matemática Aplicada.
- Representantes de todas las Universidades Andaluzas.
- Un parlamentario matemático.

A su vez, en cada provincia se constituyó un Comité Local con estructura similar a la del regional.

Esta estructura organizativa ha auspiciado una colaboración que, siendo muy compleja y difícil inicialmente por la disparidad de los puntos de vista e intereses académicos, ha resultado a la postre, uno de los logros más importantes del 2000, pues además de haber convergido en el intento de conseguir los citados objetivos, ha planteado la necesidad de una colaboración más estrecha en el futuro, sobre todo y, particularmente, en los temas relativos a la Educación Matemática, en donde aún pueden observarse muchas y claras diferencias: desde qué contenidos y métodos son necesarios para una buena formación básica del ciudadano, pasando por el currículo necesario para un profesor de matemáticas y llegando hasta los más gremiales de dónde ha de ubicarse la formación inicial del futuro profesor de matemáticas y el reconocimiento como comunidad científica de los investigadores en Educación Matemática.

…el 2000 más que un fin en sí mismo ha de ser un inicio…

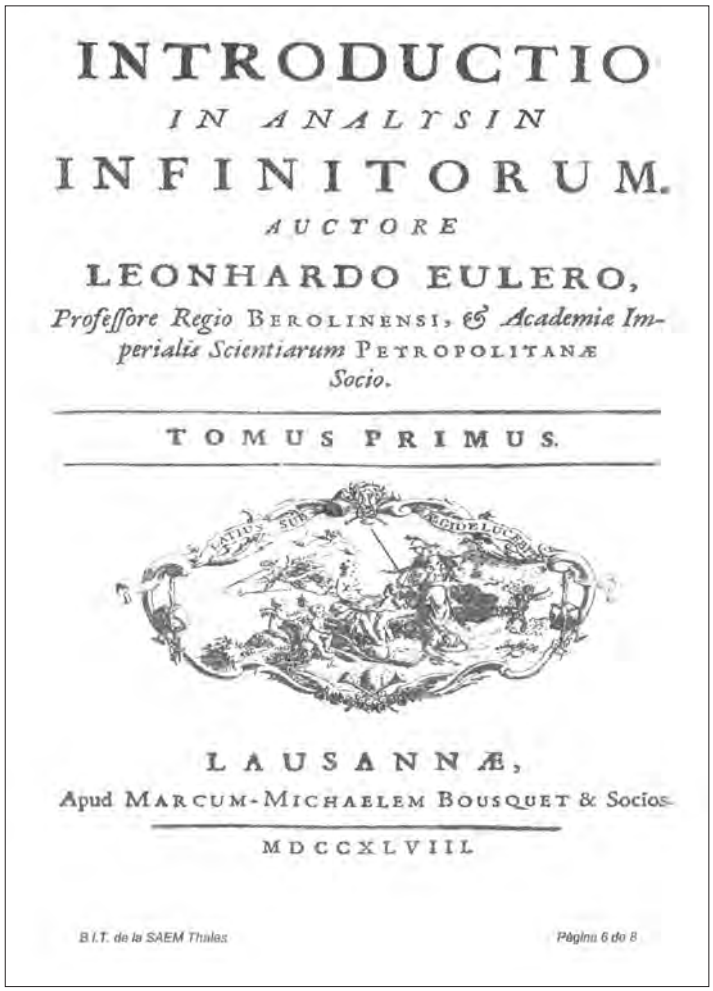
Siempre hemos dicho que el 2000 más que un fin en sí mismo ha de ser un inicio (continúan el *O'Thales* como publicación periódica; el Encuentro de Matemáticos Andaluces –que celebrará su próxima edición en Granada; en algunas provincias, las Semanas Matemáticas; y, por supuesto, las que con anterioridad estaban en marcha). En el párrafo anterior ha quedado planteada la necesidad del comienzo sistemático de esa colaboración entre profesores a través de sus Sociedades y de sus Universidades. Hemos sido capaces de llegar a un cierto entendimiento, a partir de una colaboración concreta. La potencialidad de las Sociedades es pujante y se ha puesto de manifiesto el deseo (y los frutos) de esa colaboración; por otra parte hemos contado, y creo que podremos seguir contando, con la ayuda de nuestras instituciones políticas y académicas. Hemos de concluir que, tras el 2000, las bases están puestas; de nosotros depende que todo lo realizado no haya sido más que el comienzo.

Antonio Pérez Jiménez
Portavoz del Comité Andaluz para el Año Mundial de las Matemáticas.
Miembro de la SAEM Thales.

SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA



INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

B.I.T. de la SAEM Thales

Pàgina 6 de 8

BOLETÍN DE PETICIÓN

D. (Dª).:——

con domicilio en———————————————— provincia de————————————, C.P. ———

calle————————————————, nº——— piso———, letra ———, teléfono ————————,

E-mail:————————————————————,

DESEO MEDIANTE EL PRESENTE DOCUMENTO ME REMITAN

———————— EJEMPLAR (ES) de la edición facsimilar, crítica y traducida de *Introductio in Analysin infinitorum* de Leonard Euler al precio especial de 8.500 ptas. para peticiones anteriores al 15 de Julio de 2001. A partir de la fecha anterior el precio de venta será de 10.000 ptas. (socios) y de 14.000 ptas. (no socios). No están incluidos IVA ni gastos de envío.

Firmado: ————————

REMITIR A: S.A.E.M. "THALES", Facultad de Matemáticas, Apdo.: 1160, 41080-SEVILLA

SUMA 37
junio 2001, pp. 43-46

El Año 2000 en La Rioja

Javier Galarreta Espinosa

INFORME 2000

Desde una comunidad autónoma pequeña, La Rioja, y desde una Sociedad de Profesores recientemente constituida, «A prima» se cuentan las actividades realizadas en el 2000.

A PESAR DE QUE YA han transcurrido varios meses del nuevo milenio, todavía sigue dando sus últimos coletazos el 2000, como que no quisiera dejarnos. Varias actividades siguen desarrollándose en este momento como colofón de la serie de exposiciones, concursos, conferencias, debates etc. que han tenido lugar durante este prolífico año. Recuerdo que alguien quería promover un tercer milenio hipermundial de las matemáticas...

La Rioja, por ser una comunidad autónoma pequeña, tiene por tanto una Sociedad de Profesores de Matemáticas pequeña, «A prima», de reciente creación e incorporación a la Federación. Tanto es así que cuando en marzo de 1999 se crea el CRAMM, Comité Riojano para el Año Mundial de las Matemáticas, la Sociedad Riojana sólo existía en la cabeza de varios compañeros aunque, eso sí, dos meses más tarde ya se fundaba y empezaba a dar sus primeros pasos.

El CRAMM comienza a funcionar desde el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja (U.R.), presidiéndolo su Director de Departamento José Ignacio Extremiana.

En las primeras sesiones de trabajo son convocados miembros del Departamento de Matemáticas y diversos profesores de secundaria de la provincia. Se habla de lo que representa el año para los docentes de las matemáticas en general y de lo que se pretende dar a conocer a la sociedad durante el año 2000, viéndose cuáles son las actividades que podrían ayudar para conseguir este fin. Ideas no faltan y no creo que difieran mucho de otros comités provinciales o regionales. La hoja Web oficial del comité es http://www.unirioja.es/dptos/dmc/jvarona/2000.htm, gestionada por Juan Luis Varona.

El Comité fue trabajando y haciendo diversas gestiones durante el año presentando proyectos de actividades en diversas instituciones tanto públicas como privadas. En

casi todas ellas muy buena acogida pero..., «poca plata» para su desarrollo.

Se sigue con los pocos medios disponibles, voluntad no faltaba, para darse a conocer a los profesores riojanos en el mes de diciembre y realizando su presentación a los medios de comunicación en los primeros días del año 2000.

Precisamente el seis de enero aparece en el diario *La Rioja* el artículo «2000, Año Mundial de las Matemáticas», donde el Presidente del Comité expone el significado de tal celebración y los puntos que avalan la presencia de las matemáticas en la sociedad del conocimiento.

Desde el mes de enero empiezan a desarrollarse las primeras actividades y, aunque en las próximas líneas se podrá ver que es prolijo el número de las mismas, cierto es que se deben al gran trabajo de unos pocos que, a tenor de los resultados, creo que ha sido reconocido.

Exposición: Fotografía matemática y arte mudéjar

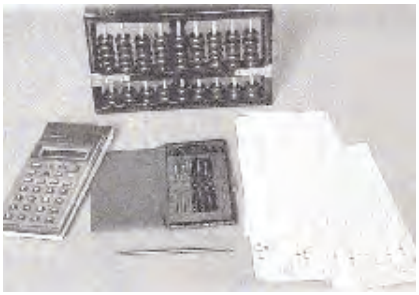
Primer cuatrimestre en Arnedo, Logroño, Nájera y Santo Domingo.

Muestra de fotografías pertenecientes a un concurso realizado en el IES Andalán de Zaragoza y a una colección fotográfica del esplendor del mudéjar aragonés de Florencio Villarroya, de la Sociedad Aragonesa. La exposición se completa con una serie de carteles del IES Celso Díaz de Arnedo (La Rioja) que sirvieron para realizar el cartel de la exposición.

Exposición: Máquinas de calcular, de la mano a la electrónica

Primer cuatrimestre en Calahorra, Haro, Logroño y Nájera.

Una magnifica recopilación del que fuera nuestro compañero Ángel Ramírez. Como el propio título nos indica, se ha podido ver en la exposición el camino recorrido por la humanidad para automatizar el cálculo.



Exposición: La pintura matemática de Julian Gil

Primer cuatrimestre en Calahorra, Logroño y Nájera.

Las matemáticas reflejadas en el arte es la viva expresión de este pintor riojano que reside actualmente en Madrid.

Los gastos de estas tres exposiciones han sido sufragados por los Institutos de Secundaria de La Rioja Alta y La Rioja Baja siendo sus coordinadores Carlos Usón, Juan de Blas y Carmelo García (miembros de «A prima»).

Exposiciones filatélicas

Conmemorando la emisión de un sello relativo al año 2000 en el que aparece el ilustre matemático riojano D. Julio Rey Pastor, «A prima», en colaboración con la Federación Riojana de Sociedades Filatélicas, organizó dos exposiciones en las que se pudieron ver diversas colecciones de sellos además de un conjunto de paneles reproduciendo sellos relacionados con las matemáticas y los matemáticos cedidos por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas.

Con la coordinación de Javier Galarreta (presidente de A prima) se celebraron en mayo en Logroño y en diciembre en Calahorra.

Exposición: Las matemáticas. Ayer, hoy y siempre

Último trimestre del 2000 en Logroño.

A pesar de que el comité riojano ofreció al Ayuntamiento de Logroño y, por tanto, a su Casa de las Ciencias, la posibilidad de desarrollar una exposición en la que se podía poner de manifiesto todo aquello que representaba el Año 2000, la Casa de las Ciencias organizó una por su cuenta de la que el comité no quedó del todo satisfecho a pesar de las aportaciones de última hora que se le solicitaron.

Esta exposición ha intentado mostrar la presencia de las matemáticas a lo largo de la historia y su influencia en la construcción del razonamiento humano. Por otra parte, se estableció una singular relación entre las matemáticas y La Rioja con textos de los fondos de las bibliotecas de la región, subrayando la destacada figura de Julio Rey Pastor. Finalmente, se habilitó un taller de «Enseñar a pensar» dirigido al público escolar pero del que no se dio la suficiente difusión.

Exposición: Las medidas tradicionales en La Rioja: una cita entre tradición y futuro

Con este título se han estado desarrollando diversas actividades que han comprometido a gran parte de la sociedad riojana, desde el escolar en la zona rural, a las personas mayores e instituciones.

Un trabajo de recopilación de información e instrumentos de medida tradicionales ha hecho revivir situaciones no tan antiguas y que en alguna medida vamos a volver a vivir próximamente con la entrada del euro.

Un Taller que ha trabajado con los alumnos de primero de secundaria de diversas localidades riojanas ha hecho ver la importancia de la medida independientemente del instrumento o la unidad que se dedique a tal fin.

…se estableció una singular relación entre las matemáticas y La Rioja con textos de los fondos de las bibliotecas de la región, subrayando la destacada figura de Julio Rey Pastor.

Todo este trabajo ha concluido este año en una magna exposición que, partiendo de Logroño, va a recorrer tras el verano las localidades de Calahorra, Alfaro, Nájera, Haro y Santo Domingo bajo el patrocinio de la Fundación Caja Rioja.

Coordinadores: Carmen Arnedo, Javier Galarreta, José Antonio San Martín, Carlos Usón (miembros de «A prima») y Francisco Pérez.

II Concurso de primavera

Con la financiación de la Dirección General de Ordenación Educativa y Universidades se ha realizado la segunda edición de este concurso que ha vuelto a tener un enorme éxito entre los escolares riojanos. Tiene cuatro niveles que abarcan desde tercer ciclo de primaria hasta el bachillerato.

La primera fase se desarrolló en los propios centros educativos de la provincia con participación de 4.000 escolares, celebrándose la fase provincial final en la Universidad de La Rioja en abril, con 371 finalistas entre sus cuatro niveles.

Coordinadores: Rodolfo Larrea, Manolo Benito y Tomás Virgos (miembros de «A prima»).

Olimpiada matemática

Con la financiación de la Universidad de La Rioja y la Dirección General de Ordenación Educativa y Universidades, se celebró la fase local en Logroño en el mes de enero participando los tres ganadores en la fase nacional celebrada en Palma de Mallorca.

Coordinadores: José Luis Ansorena y Victor Lanchares (UR).

Concurso y Exposición: Fotografía matemática

La Casa de las Ciencias del Ayuntamiento de Logroño con el Comité del Año Mundial de las Matemáticas de La Rioja y la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas convocaron este concurso de fotografía matemática para nuestros alumnos en el mes de diciembre del 2000. Tras la resolución en el mes de febrero, gran parte de los trabajos presentados han sido expuestos hasta el mes de abril.

Con dicho concurso se ha pretendido acercar nuestra disciplina a la mayoría de la población, además de que los alumnos y alumnas de todas las edades desarrollen la imaginación, la sensibilidad, la atención y la observación del entorno, en el que existen multitud de formas naturales o no (arquitectura, construcciones, urbanismo, ingeniería, etc.) relacionadas con las matemáticas.

Seminario permanente de actualización

Diversas conferencias se celebran periódicamente organizadas por el Departamento de Matemáticas y Computación como actualización de los docentes de todos los niveles. Por el Seminario, que tiene una antigüedad de más de veinte años, van pasando los más ilustres matemáticos españoles además de varios extranjeros y las intervenciones también de algunos riojanos. El responsable de la actividad, José J. Guadalupe falleció terriblemente el uno de abril del 2000 en accidente de tráfico dejando una gran huella entre nosotros.

Ciclo: Matemáticas y Astronomía

Conferencias celebradas en el mes de marzo en Logroño para abordar la Astronomía en su relación con otras ciencias como la Computación, la Estadística, Métodos Numéricos...

Coordinador: Víctor Lanchares (U.R.).

Semana de las Matemáticas en la U.R.

Con el eslogan de «La imprescindible presencia de las Matemáticas», y organizado por el Departamento de Matemáticas y Computación de la U.R., se han desarrollado en el mes de mayo diversas conferencias sobre Matemáticas, plan de estudios, investigación y relación con otras ciencias, además de mesas redondas con debate sobre las «Matemáticas en la Sociedad» y las «Matemáticas en la Universidad».

Conferencias de divulgación matemática

Varios profesores se ofrecieron para dar conferencias de divulgación en los centros que lo solicitaran no llegándose a dar algunas de ellas por falta de solicitudes de los centros: Luis Español («Matemáticas y matemáticos en La Rioja»), J. Ignacio Extremiana («Cuerpos platónicos. Poliedros regulares»), L. Javier Hernández («¿Hay sólo una geometría? Historia del V Postulado de Euclides»), Jesús Laliena («Códigos y criptografía»), Victor Lanchares («Mirar al cielo con ojos matemáticos»), Carlos Usón («Arte y matemáticas») y Juan Luis Varona («Sistemas de numeración»).

Programa de divulgación sobre el Año Mundial de las Matemáticas

La Universidad de La Rioja y la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales celebraron un ciclo de conferencias sobre el Año Mundial de las Matemáticas con un total de doce conferencias incluidas dentro del Programa de difusión de la cultura científica y tecnológica dedicado a la ciencia de las Matemáticas. Las conferencias se celebraron entre noviembre de 2000 y enero de 2001.

…la noticia de que Julio Rey Pastor había sido elegido como riojano más relevante del siglo XX.

Javier Galarreta
Presidente de la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A Prima»

Otras actividades

- Paseos matemáticos por Logroño guiados por Carlos Usón y Juan de Blas.
- Programas de radio relacionados con las matemáticas en La Rioja Baja.
- El Aula de Cultura del diario La Rioja organizó la conferencia «Matemáticas, Ordenadores y Sociedad», desarrollada por Javier Echeverría.
- Coordinado por Luis Español, y con la colaboración del Instituto de Estudios Riojanos, se han realizado paneles sobre varios matemáticos riojanos.

Tampoco podemos olvidar a aquellos compañeros que han ganado diversas premios durante el pasado año como los del IES Celso Díaz de Arnedo por su primer premio regional en Innovación e Investigación Educativa o el segundo Premio Nacional del Año Mundial de las Matemáticas de José Javier Escribano con su trabajo: «Biografía científica del matemático Sixto Cámara Tecedor».

Desde el comité no se ha hecho una valoración específica de las actuaciones enumeradas, aunque sí que estamos de acuerdo en que el nivel de compromiso de los docentes no ha sido todo lo que nos hubiera gustado, sin desdeñar el ingente trabajo de gran número de personas a costa, como ya se sabe, de su tiempo y otras ocupaciones.

Si la valoración debiera hacerse en cuanto al número de nuevas altas surgidas en nuestra Sociedad, «A prima», podríamos decir que no ha trascendido demasiado, pues no se ha producido ninguna. Sin embargo, seamos optimistas y veámoslo desde el punto de vista de que no ha habido bajas.

Quisiera concluir poniendo de manifiesto la enorme satisfacción que para todos los matemáticos y matemáticas supuso encontrarnos en la portada del diario *La Rioja* del tres de enero de 2001 la noticia de que Julio Rey Pastor había sido elegido como riojano más relevante del siglo XX.

SUMA 37
junio 2001, pp. 47-53

2000, Año Mundial de las Matemáticas: una experiencia práctica

Rosario Baños, Antonia Garre, Juan Carlos Marco, Fco. Javier Tomás Antonia Conesa, Salvador Escudero

ARTÍCULOS

Con motivo de la declaración, por la UNESCO, del año 2000 como *Año Mundial de las Matemáticas*, decidimos en nuestro Centro, el IES n.° 3 de San Javier en Murcia, organizar una Semana de las Matemáticas, con la programación de diferentes actividades como *Actividades Interdisciplinares*, *I Encuentros Matemáticos*, *Obra de Teatro*, *Exposiciones* y *Conferencias*.

EN EL VERANO del 99, a través de la revista *Suma*, nos enteramos que este año 2000 había sido declarado por la UNESCO *Año Mundial de las Matemáticas*.

Desde ese primer momento tuvimos la sensación de que no podíamos dejar pasar la ocasión de aportar nuestro granito de arena a la celebración de tal evento.

Los primeros pasos

Llegó septiembre y en una de las primeras reuniones del Departamento, nos planteamos la posibilidad de organizar una semana dedicada a las Matemáticas. Posteriormente fuimos diseñando lo que sería el programa de actividades.

El siguiente paso fue presentar nuestra iniciativa en la reunión semanal de la Comisión de Coordinación Pedagógica. Todavía recordamos aquella reunión a mediados de octubre cuando la mayoría de los departamentos apoyaron nuestro proyecto y aportaron nuevas sugerencias. Incluso hubo un momento en que nuestro director dijo: «¡¡Basta ya!!, va a ser materialmente imposible, en una semana, dar cabida a tanta actividad».

Esta actitud tan positiva por parte de los compañeros nos dio un gran impulso para empezar a organizar nuestra *Semana de las Matemáticas*.

Primeramente fuimos contactando con los diferentes jefes de Departamento para concretar cada una de las actividades que íbamos a realizar de forma conjunta. Igualmente informamos a la Asociación de Padres de Alumnos del Centro y a entidades públicas y privadas de nuestras intenciones, solicitando su colaboración a través de subvenciones económicas y aportación de material para las exposiciones que se iban a realizar.

A continuación, en el Departamento, elaboramos el plan de actuación teniendo como criterio prioritario el que la vida del centro se alterara lo menos posible durante esa semana. Así algunas actividades interdisciplinares se llevarían a cabo en la última franja horaria de la mañana, y la visita a las exposiciones se realizaría, por los diferentes grupos, en una hora lectiva de Matemáticas acompañados por el profesor de área y otro del Departamento. Esta propuesta fue aprobada en la Comisión de Coordinación Pedagógica, acordando que la *Semana de las Matemáticas* se celebrara del 10 al 14 de abril, que coincidía con el final del segundo trimestre. Se elaboró un tríptico informativo para difundirlo entre toda la comunidad educativa y el Municipio.

Foto 1. Exposición de trabajos realizados en las actividades interdisciplinares

Del dicho al hecho

Las actividades desarrolladas fueron las siguientes (ver tablas 1 a 9): *Actividades interdisciplinares*, *I Encuentros Matemáticos*, *Exposiciones y Conferencias*.

Por su parte un grupo de profesores del Centro representamos una versión teatral de la novela de Susana Mataix titulada *Matemática es nombre de mujer*, donde se resalta la importancia que la mujer ha tenido en el mundo de las matemáticas, desde Hipatia hasta Emmy Noether pasando por Madame de Châ telet, María Gaetana Agnesi, Sophie Germain, Ada Lovelace, Florence Nightingale y Sofía Kovalveskaya.

Además se organizó una exposición de libros antiguos gracias a la aportación de distintas librerías especializadas y de particulares que prestaron, de forma desinteresada, sus colecciones.

También contamos con una colección, bastante completa, de libros relacionados

Departamento	*Actividad*	*Nivel*	*Núm. de alumnos*
Tecnología	Tableros inteligentes	2.° y 4.° de ESO,	180
Inglés	Biografías de matemáticos y cómics	1.°, 2.°, 3.° y 4.° de ESO y Ciclos Formativos	163
Lengua	Concurso literario de poesía y prosa «Las Matemáticas en nuestras vidas»	1.°, 2.°, 3.° y 4.° de ESO y Ciclos Formativos	65
Plástica y Visual	Concurso de carteles	3.° y 4.° de ESO	135
Historia	Historia de los números y el calendario	1.°, 2.°, 3.° y 4.° de ESO	142
Música	Música y Matemáticas: El Compás Canción de rap titulada «3 x 3»	2.° y 3.° de ESO	75
Religión	El «7» número bíblico	Profesor de área	
Matemáticas	Concurso de Fotografía Matemática	1.°, 2.°, 3.° y 4.° de ESO	125
Ciencias de la Naturaleza	Naturaleza y Geometría	1.°, 2.° y 3.º de ESO	92
Ciclo Formativo de Comercio	Taller del Euro	Ciclos Formativos	20

Tabla 1. Actividades Interdisciplinares

Foto 2. Representación teatral de *Matemática es nombre de mujer*, de Susana Mataix

con aspectos recreativos y lúdicos de las matemáticas y de obras literarias en las que se las relaciona con otras disciplinas

Se llevó a cabo otra exposición de instrumentos de medida tradicionales y de oficios, gracias a la colaboración del Museo del Campo del Ayuntamiento de Torre Pacheco y de los propios alumnos, que aportaron todo tipo de piezas: calibradores de naranjas, legumbres; medidas de capacidad de áridos (celemín, medio celemín, cuartillo, fanega,…); de capacidad de líquidos (cuartillo, cántara, arroba,…); unidades de peso (romanas, sistemas de pesas, balanzas,…); máquina clasificadora de huevos; distintos tipos de relojes; vara de medición de telas; tablas de numeración de calzado; teodolito, etc. La exposición iba acompañada de paneles informativos sobre la historia de la medida, sirviendo como referente el trabajo realizado por la

Foto 3. Exposición de libros

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo», como complemento de la Exposición sobre instrumentos de medida tradicionales y de oficios celebrada con ocasión de las *VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM).

La visita a esta exposición contó con la inestimable ayuda del encargado de dicho Museo del Campo, el cual fue explicando a todos los alumnos los pormenores de la misma. También se pudo contemplar en la Sala de Exposiciones los trabajos realizados por los alumnos en las diferentes áreas.

Otra actividad muy enriquecedora, en todos los aspectos, fue la organización de los *I Encuentros Matemáticos*, por parte de nuestro Departamento, en colaboración con los otros cinco IES de la zona.

Foto 4. Exposición de aparatos de medida

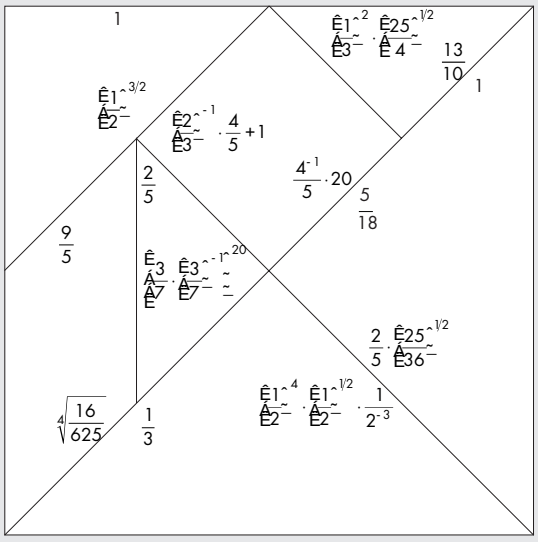
Nuestro Departamento mantiene reuniones periódicas con compañeros de todos esos centros para tratar diferentes temas relacionados con nuestra labor docente, y fue en una de esas reuniones donde surgió la idea de celebrar una jornada de convivencia realizando pruebas en las que se fomentara el gusto por hacer Matemáticas, contribuyendo, de este modo, a la popularización de las mismas mediante la difusión de sus aspectos más lúdicos y recreativos. Eliminamos el factor de competitividad entre centros formando equipos por niveles –Primer Ciclo, Segundo Ciclo y Bachilleratos– de 6 alumnos, uno de cada centro; contando con la participación de 150 alumnos de ESO y Bachillerato. Cada uno de los seis centros implicados, se encargó de organizar una de las siguientes actividades: *Matgrams*, *cuestiones de ingenio*, *palillos marinos*, *el euro*, *«el paso del río»*, *estimación y medidas* y *fotografía matemática* (ver tablas 2-8).

Cada una de estas actividades tenía una duración de 20 minutos, organizándose simultáneamente, una *Gymkhana Matemática* donde cada grupo participante tenía que resolver las cuestiones planteadas para poder continuar con la siguiente prueba.

La mañana de los Encuentros contamos con la presencia de un grupo de profesores y alumnos de la Facultad de Matemáticas que, enterados por la prensa de la celebración de nuestra Semana, nos pidieron estar presentes en el desarrollo de la jornada como observadores. Ante la buena impresión que les causó la misma, la mencionada Facultad, que celebra este año su 25.° aniversario, va a organizar diversos actos, entre los que destaca una gymkhana matemática a la que hemos sido invitados junto con otros IES de la región.

Foto 5. Grupo de alumnos siguiendo las explicaciones del encargado del Museo del Campo de Torre Pacheco

Foto 6. Celebración de los Encuentros matemáticos: realizando una actividad titulada «Palillos marinos»

Actividad	*Ejemplo*
Matgram (Propuesta por el I.E.S. «N.º 3», de San Javier y el I.E.S. «Menarguez Costa», de Los Alcázares) Reglas: Basado en el Tangram chino, está formado por siete piezas, en cuyos lados hay conceptos matemáticos. Busca la solución que se te indica siguiendo las siguientes reglas • En los lados de las piezas figuran problemas y soluciones. Resuelve los problemas y une cada uno con su solución. • Si un lado de una pieza tiene dos conceptos matemáticos a relacionar, es que corresponde unirle dos piezas. • No a todos los lados que tienen conceptos a relacionar, les corresponde una pieza. • Debéis presentar la actividad con la figura montada así como todos los pasos realizados para resolver los problemas propuestos.	*Segundo Ciclo*  *Pista:* has de unir los lados de forma que coincidan los números con el resultado de las operaciones. Solución

Fuente: *Matgram*, Editex S. A., Madrid

Tabla 2

Actividad

Cuestiones de ingenio

(Propuesta por el IES «Mar Menor», de San Javier)

Ejemplo

Los discípulos de Einstein

Dos antiguos discípulos de Einstein se encuentran después de varios años sin verse. Uno de ellos se ha casado y tiene tres hijos.

–¿Cuántos años tienen sus hijos? —pregunta el soltero.

–Te diré que el producto de las edades de mis hijos es igual a 36 –contesta el casado.

–¿Y la suma?

–El número de ese portal.

–Con todo me falta un dato.

–El que tiene más años toca el piano.

–Entonces ya sé qué edades tienen tus hijos.

–¿Qué edades tienen los hijos del discípulo de Einstein?

Fuente: I. Tejada

Tabla 3

Actividad

Palillos marinos

(Propuesta por el IES «Tárraga Escribano», de San Pedro del Pinatar)

Coge ocho palillos y una aceituna, reproduce el pez de la figura y partiendo de la misma realiza las siguientes operaciones marítimo-matemáticas:

A) Cambiando de posición dos palillos y situando la aceituna donde corresponda hay que conseguir que el pez nade hacia arriba.

B) Cambiando de posición tres palillos y situando la aceituna donde corresponda, hay que conseguir que le pez nade en sentido contrario al de la figura.

Ejemplo

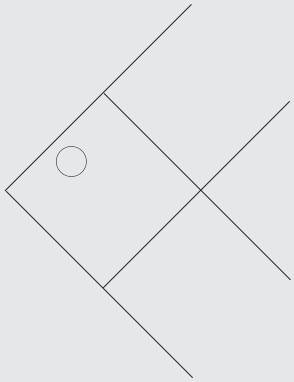


Tabla 4

Actividad

El euro

(Propuesta por el IES N.° 3, de San Javier)

Descripción

- Cada grupo deberá elegir entre unos sobres donde encontrará una ficha con 6 precios en euros que corresponden a 6 artículos de nuestra tienda.
- Una vez elegido el sobre deberá encontrar aquellos productos que correspondan a esos precios con la difiicultad de que en la tienda los productos estarán con los precios en pesetas.
- Aquellos que logren localizar los productos tendrán premio.
- No se permitirán calculadoras de ningún tipo, todos los cálculos se deben hacer mentalmente.
- El tipo de cambio para realizar los cálculos será:
  1 EURO = 166 pesetas

Tabla 5

Foto 7. Taller del Euro

Actividad
El paso del río (Propuesta por el IES «Ruiz de Alda», de San Javier) *Descripción* Sois tres monjes y tres caníbales que vais camino de la misión. Os habéis encontrado un río, que tenéis que conseguir cruzar los seis. Sólo dos personas caben en la barca. Los tres monjes sabéis remar, pero sólo un caníbal sabe hacerlo. En el momento en que, en alguna de las orillas del río, el número de caníbales supere al de monjes, éstos son devorados por aquéllos. ¿Cómo debéis hacer para atravesar los seis el río, sin siquiera un mordisquito? Los jueces estarán delante para ver cómo lo hacéis. Cada error implica comenzar de nuevo. ¡Ánimo! (Esta actividad fue escenificada)

Tabla 6

Actividad
Estimación y Medidas (Propuesta por el IES «Gerardo Molina», de Torre Pacheco) *Descripción* A) Cumplir un encargo: A petición de su madre, un hijo necesita medir un litro de naranjada para hace tortas de naranja. Su madre le comunica que ha exprimido 2 litros y no tiene ningún recipiente que mida esa cantidad de un litro, pero sí tiene otros recipientes que tienen capacidad de 1 litro y cuarto (1,25 litros) y 3/4 de litro (0,75 litros). El hijo/a le dice a su madre que no se preocupe, ya que puede medir exactamente 1 litro. Explica tú el proceso por el que lo consiguió. (Para Segundo Ciclo de ESO y Bachillerato) B) Estimar medidas: a) Tienes un bote lleno de corchos de colores. ¿Cuántos hay? b) Aquí tienes un melón. ¿Cuánto pesa aproximadamente? c) Al salir al patio te has encontrado un porche con columnas. Calcula aproximadamente la distancia entre la primera y la última columna. (Para Primer Ciclo de ESO)

Tabla 7

Foto 8. Celebración de los Encuentros matemáticos: actividad titulada «El paso del río»

Actividad
Fotografía Matemática (Propuesta por el IES N.° 3, de San Javier) *Descripción* Cada grupo deberá seleccionar cinco fotografías de la exposición y asignarle un lema o titulo. Se valorará su originalidad y relación con los conceptos matemáticos tratados.

Tabla 8

Por último, contamos con la colaboración del asesor del CPR de Villarrobledo (Albacete) Juan Emilio García Jiménez, que nos impartió dos conferencias, una para los profesores titulada *Tendencias actuales de la Educación Matemática*, y otra para los alumnos bajo el título de *¿Matemáticas? Sí, gracias. 100 imágenes de las Matemáticas en el 2000*, donde resaltó como las Matemáticas forman parte de nuestra vida cotidiana.

Los premios

Cada uno de los alumnos participantes en los *I Encuentros Matemáticos* recibió una camiseta grabada con el dibujo alusivo al Año Mundial de las Matemáticas, premiado en el concurso *Realiza un Cartel*. Asimismo, recibieron un diploma acreditativo y sus centros respectivos un obsequio conmemorativo de los Encuentros.

Las actividades que se convocaron en la modalidad de concurso: *Las Matemáticas*

en nuestras vidas, *Realiza un cartel*, los *Tableros inteligentes* y la *Fotografía matemática* y los equipos ganadores de los I Encuentros Matemáticos tuvieron como premio lotes de libros y cheques regalo para canjear por material didáctico, que fueron entregados en la jornada de clausura de la Semana.

Actividad

Gymkhana Matemática

(Propuesta por el IES «Ruiz de Alda», de San Javier)

Ejemplo

Leed con cuidado todas las instrucciones:

Todos debéis dirigiros al Salón de Actos, pero... No olvidéis llegar allí con una piedra que pese medio kilo, y con el siguiente acertijo resuelto:

«Si tú me das una cabra tendremos los dos las mismas,
pero si yo te la doy a ti tú tendrás el doble»

¿Cuántas cabras tendremos cada uno?

Respuesta .....

No olvides, al presentarte al control, cantar con ritmo de «corazón partío» la siguiente letra:

Pitágoras, ¿dónde te has ido?
Me has dejado er triángulo partío
Si tú no vuelves ya
La hipotenusa se nos muere y más...
¡Ay! Cateto mío,
me has dejao el triángulo partío
Pitágoras vuelve ya
que tengo el corazón partío

(Se valorará la gracia y la entonación de vuestro melódico canto).

Tabla 9

Foto 9. Conferencia a cargo de Juan Emilio García Jiménez

Rosario Baños
Antonia Garre
Juan Carlos Marco
Fco. Javier Tomás
Antonia Conesa
Salvador Escudero
IES N.° 3
San Javier (Murcia)

A modo de conclusión

Aunque esta semana se organizó con motivo de ser declarado el 2000 *Año Mundial de las Matemáticas*, pensamos que es necesario continuar con la labor de seguir popularizándolas y acercándolas a los ciudadanos y, sobre todo, que nuestros alumnos sigan disfrutando con ellas, por eso animamos a todos los centros que apoyen la iniciativa de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que ha declarado el 12 de mayo como *Día escolar de las Matemáticas*.

En este día seguiremos consolidando las actividades desarrolladas en nuestra Semana que tan buenos resultados nos han aportado a todos y que los alumnos han reivindicado, como así se refleja en sus comentarios, en la evaluación que hemos llevado a cabo:

> (...). En resumen, esta experiencia, que será difícil de olvidar a los que nos gustan las Matemáticas, no debe guardarse en el «baúl de los recuerdos», sino que debe seguir «explotándose» durante muchos años. (Alumno de 4.° de ESO)
>
> (...) Cuando pensamos en las Matemáticas, siempre las relacionamos con algo viejo, aburrido e inexplicable. Pero las Matemáticas son como las personas: no hay que juzgarlas sin saber cómo son por dentro. Aunque al principio (sinceramente) pensaba que iba a ser un poco aburrido, a medida que iba transcurriendo la Semana, tenía menos gana de que acabara. (Alumna de 3.° de ESO)

Pero no sólo nuestros alumnos fueron los que disfrutaron con las Matemáticas, también nuestros compañeros del Claustro estuvieron a la misma altura, y desde aquí queremos agradecerles todo el apoyo mostrado, así como las facilidades otorgadas por el Equipo Directivo tanto a nivel organizativo como económico.

Por último, es preciso resaltar la difusión que ha tenido nuestra Semana gracias al interés mostrado por los diferentes medios de comunicación de la Región como los diarios *La Verdad* y *La Opinión* de Murcia, la revista *El Municipio* de San Javier, distintas emisoras de Radio y el *Centro Territoria de TVE* de Murcia.

Bibliografía

ARGÜELLES, J. (1989): *Historia de la matemática*, Ediciones Akal, Madrid.

FABRETTI, C. (1999): *El libro del genio matemático*, Ediciones Martínez Roca, Barcelona.

LLEDÓ, J. (1999): *Calendarios y medidas del tiempo*, Acento Editorial, Madrid.

MATAIX, V. (1999): *Matemática es nombre de mujer*, Editorial Rubes, Barcelona.

SOCIEDAD MADRILEÑA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS «EMMA CASTELNUOVO» (1995): *Medidas tradicionales y de oficios. Guía Didáctica*, Centro de desarrollo curricular del MEC y SMPM «Emma Castelnuovo», Madrid.

TEJADA, I.: *100 problemas para pensar (un poco)*, Tikal Ediciones, Barcelona.

R.4095

Operaciones de Cuentas

Libro de cuentas ajustadas y hechas

Para poder sacar cualquier
: : cuenta en el acto : :

ÚTIL PARA TODOS

Con la reducción de kilos a arrobas, de :: las principales provincias de España ::

Util para comerciantes,
industriales y vendedores de mercado

Este es el más claro que se ha conocido hasta hoy dia

CATALUÑA

Reducción de Arrobas a Carniceras

Arrobas	Carniceras	Tersas	Arrobas	Carniceras	Tersas
1	8	2	18	156	
2	17	1	19	164	2
3	26		20	173	1
4	34	2	21	182	
5	43	1	22	190	2
6	52		23	199	1
7	60	2	24	208	
8	69	1	25	216	2
9	78		26	225	1
10	86	2	27	234	
11	95	1	28	242	2
12	104		29	251	1
13	112	2	30	260	
14	121	1	31	268	2
15	130		32	277	1
16	138	2	33	286	
17	147	1	34	294	2

VALENCIA

Reducción de kilos a arrobas de Harina
DE
32 libras Valencianas de 12 onzas

Kilos	Arro.	Lib.	Onz.	Kilos	Arro.	Lib.	Onz.
1	»	2	9	17	1	13	10
2	»	5	7	18	1	16	8
3	»	8	5	19	1	19	6
4	»	11	2	20	1	22	4
5	»	14	»	21	1	25	1
6	»	16	10	22	1	27	11
7	»	19	8	23	1	30	9
8	»	22	6	24	2	1	7
9	»	25	4	25	2	4	5
10	»	28	2	26	2	7	2
11	»	30	11	27	2	9	11
12	1	1	9	28	2	12	8
13	1	3	7	29	2	15	5
14	1	5	5	30	2	18	3
15	1	8	3	31	2	21	»
16	1	11	»	32	2	23	9

Kilos	Arro.	Lib.	Onz.	Gra.	Kilos	Arro.	Lib.	Onz.	Gra.
77	6	18	1	27	98	8	13	15	16
78	6	20	4	25	99	8	16	2	14
79	6	22	7	23	100	8	18	5	12
80	6	24	10	21	200	17	11	10	24
81	7	1	13	19	300	26	5		8
82	7	4		17	400	34	23	5	20
83	7	6	3	16	500	43	16	11	8
84	7	8	6	14	600	52	23	5	20
85	7	10	9	12	700	61	3	6	6
86	7	12	12	10	800	69	21	11	18
87	7	14	15	8	900	78	15	1	2
88	7	17	2	6	1000	87	8	6	14
89	7	19	5	4	2000	174	16	13	
90	7	21	8	2	3000	262		3	14
91	7	23	11	1	4000	349	8	10	
92	8		13	27	5000	436	17		14
93	8	2		25	6000	542		7	
94	8	5	3	23	7000	011	8	13	14
95	8	7	6	21	8000	678	17	4	
96	8	9	9	19	9000	776		11	
97	8	11	12	17	10000	843	9	1	14

HUESCA

REDUCCION
De kilos, arrobas, libras, onzas y granos

Kilos	Arro.	Lib.	Onz.	Gra.	Kilos	Arro.	Lib.	Onz.	Gra.
1		2	10	5	16	1	9	7	24
2		5	8	10	17	1	12	5	
3		8	6	16	18	1	15	3	
4		11	4	21	19	1	18	1	11
5		14	2	27	20	1	20	11	16
6		17	1	3	21	1	23	9	22
7		19	11	9	22	1	26	8	27
8		22	9	14	23	1	29	6	6
9		25	7	20	24	1	32	4	8
10		28	5	25	25	1	35	2	14
11		31	4	1	26	2	2		18
12		34	2	7	27	2	4	11	24
13	1	1		12	28	2	7	9	
14	1	3	10	18	29	2	10	7	6
15	1	6	8	23	30	2	13	5	11

SUMA 37
junio 2001, pp. 55-62

La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación

M. O. Lago, P. Rodríguez,
C. Dopico, M. J. Lozano

ARTÍCULOS

Un dato ampliamente constatado se refiere a que los problemas verbales de comparación resultan más difíciles para los niños que las restantes categorías de problemas de adición y sustracción. En nuestro estudio, partiendo del trabajo pionero de Hudson, nos hemos centrado en la reformulación de los enunciados correspondientes a estos problemas. Nuestro objetivo era mostrar que los efectos beneficiosos de la reformulación no se debían solamente al hecho de facilitar la puesta en marcha de la estrategia de emparejamiento, sino que podrían manifestarse también otros procesos de cuantificación. Para ello, cuarenta niños de 2.° de EI y 1.° de EP resolvieron problemas reformulados y tradicionales, con y sin dibujos y con cantidades no perceptivas. Los resultados demostraron que los problemas reformulados mejoraban la comprensión de las relaciones entre las cantidades del problema, permitiendo la aplicación de los procesos de cuantificación ya conocidos por los niños.

A PESAR DE QUE LOS PROBLEMAS verbales juegan un papel determinante en el aprendizaje de las matemáticas y en particular en la adquisición de la adición y sustracción, los niños topan con numerosas dificultades a la hora de traducir el enunciado verbal en formas de cómputo efectivas. Comprender un problema implica la capacidad de construir a partir del texto verbal una representación conceptual apropiada o modelo del problema, que a su vez permita seleccionar la operación matemática correspondiente. A este respecto, las investigaciones (por ejemplo, Bermejo y Rodríguez, 1990; Carpenter, 1981; Carpenter y Moser, 1982; De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990) han puesto de manifiesto que la estructura semántica, entendida como el tipo de relaciones entre las cantidades, resulta responsable del comportamiento diferencial de los niños en las distintas situaciones de adición y sustracción. De ahí, que se hayan elaborado clasificaciones de los problemas atendiendo a esta dimensión (Heller y Greeno, 1978; Vergnaud, 1982; Carpenter y Moser, 1982; Fuson, 1992; Bermejo, Lago, Rodríguez, Dopico, Lozano y Pintos, 1995-1997), que se concreta en tres tipos: cambio, combinación y comparación. Estos problemas difieren, en términos generales, en que describen situaciones dinámicas (es decir, cambio) o estáticas (es decir, combinación y comparación). En esta ocasión, nos ocuparemos únicamente de los problemas de comparación, ya que son los más difíciles de resolver por parte de los niños (por ejemplo, Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998; Fuson, Carroll y Landis, 1996; Mwangi y Sweller, 1998) y constituyen el eje central de nuestro trabajo empírico.

Los problemas de comparación presentan dos cantidades que se comparan entre sí para determinar la diferencia entre ellas, o bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas (por ejemplo, «Ana tiene 3 muñecas y Eva tiene 2 más que ella. ¿Cuántas muñecas tiene Eva?»).

Se han considerado varios factores para explicar el fracaso en este tipo de problema. Uno de ellos alude a la complejidad para interpretar los términos más que y menos que. En segundo lugar, también se ha sugerido que los problemas de comparación representan situaciones estáticas, relacionales (es decir, un conjunto se define en función de otro) en las que la tercera cantidad no figura en la situación, sino que ha de derivarse de la comparación. En este sentido, afirman Nunes y Bryant (1996) que la conexión entre la situación del problema y la operación sobre los objetos simbólicos que permiten la solución no parece evidente por no haberse producido ninguna acción.

Finalmente, también puede ocurrir que la operación aritmética resulte inconsistente con la sentencia relacional, teniendo los niños que reorganizar la información y resolver el problema según un esquema de lenguaje consistente (por ejemplo, Lewis y Mayer, 1987; Verschaffel, 1994).

A fin de superar las dificultades inherentes a estos problemas, se han desarrollado diversas líneas de investigación, que podemos agrupar en cuatro perspectivas:

1. el entrenamiento en las habilidades de representación (por ejemplo, Willis y Fuson, 1988; Lewis, 1989);
2. el registro del movimiento de los ojos para examinar la influencia de la estructura semántica en los patrones de tiempo de fijación visual (De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992);
3. el análisis de las habilidades componentes necesarias para operar sobre la información numérica contenida en las sentencias relacionales (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994)
4. la reformulación de los enunciados de los problemas (por ejemplo, De Corte, Verscheffel y De Win, 1985; Hudson, 1983).

Destacaremos especialmente esta última porque resulta más próxima a nuestros objetivos de investigación. A este respecto, un trabajo temprano de Hudson (1983) demostró que los problemas de comparación reformulados (es decir, «Imagina que todos los pájaros corrieran y cada uno intentara coger un gusano, ¿cogerá cada pájaro un gusano?… ¿cuántos pájaros se quedarán sin gusano?») resultaban más sencillos para los niños que los problemas sin reformular (es decir, «¿cuántos pájaros hay más que gusanos?»).

Una de las críticas que frecuentemente se hace al trabajo de Hudson es que la propia formulación de la pregunta (es decir, «¿cuántos pájaros se quedarán sin gusano?») sugiere la estrategia de resolución, es decir, el emparejamiento. En efecto, Nunes y Bryant (1996) indican que los niños utilizan la correspondencia uno-a-uno para construir conjuntos equivalentes, bien a través de la correspondencia directa (es decir, a través de parejas de objetos), bien mediante el procedimiento de contar cada conjunto hasta obtener el mismo número en ambos. Por su parte, Okamoto (1996) señala que las diversas formas lingüísticas que pueden adoptar los problemas de comparación suponen diferentes situaciones para los niños, propiciando la construcción de representaciones distintas, que demandan conocimientos matemáticos diferentes. Así, atribuye el éxito de los sujetos de Hudson en los problemas reformulados a la comprensión conceptual de la correspondencia uno-a-uno y explica el fracaso en los problemas tradicionales por la carencia de conocimientos matemáticos más elevados.

…introducimos algunas modificaciones en el trabajo de Hudson para esclarecer el posible efecto de diversos tipos de representación de las cantidades del problema y del tamaño de las mismas.

Por nuestra parte, confluimos con Hudson en que la formulación de la pregunta producirá efectos beneficiosos en los procesos de comprensión de los niños, pero no simplemente porque facilite la puesta en marcha de una estrategia de emparejamiento. Entendemos que en los problemas reformulados también se manifestarán estrategias de conteo, que van más allá de la propuesta por Nunes y Bryant. Nuestro planteamiento se encuentra más cercano a los de Bermejo y Lago (1991, 1993, 1994), Cowan, Foster y Al-Zubaidi (1993), Fuson (1988, 1992), entre otros, ya que establecen diferentes procedimientos de conteo como contar todo, contar a partir de uno de los sumandos, etc. Por ello, introducimos algunas modificaciones en el trabajo de Hudson para esclarecer el posible efecto de diversos tipos de representación de las cantidades del problema y del tamaño de las mismas. En este punto, conviene recordar que en la experiencia de Hudson las cantidades mencionadas en el problema se representaban por medio de dibujos, con correspondencias provocadas o espontáneas, y que el tamaño de los conjuntos se refería siempre a cantidades perceptivas (es decir, no superaban en ningún caso la cifra 5). Desde nuestro punto de vista, la presencia/ausencia de materiales, así como el orden y tipo de materiales, permitirá determinar con más precisión si es la mera formulación o el material que la acompaña la responsable del mejor rendimiento de los niños. En este sentido, intentaremos probar, en primer lugar, que el rendimiento de los niños

resultará claramente superior en los problemas en los que se utilice material frente a los que carezcan de él. En segundo lugar, la propia reformulación del problema influirá positivamente en el rendimiento de los sujetos en comparación con la formulación tradicional, a lo largo de las diferentes situaciones experimentales, siendo este efecto más notable a medida que disminuye la edad de los sujetos. No obstante, esperamos que el éxito en las tareas reformuladas sea mayor cuando los objetos están presentes, principalmente en la condición en la que se presentan ordenados en correspondencia uno-a-uno y sean desiguales. Finalmente, creemos que la propuesta de cantidades no perceptivas permitirá delimitar si el éxito de los sujetos en el estudio de Hudson se debía al tamaño de las cantidades, del mismo modo que favorecerá la presencia de diversas estrategias de conteo que vayan más allá del emparejamiento.

Método

Sujetos

Participaron en la investigación un total de 40 niños, alumnos de un colegio de enseñanza pública de la zona sur de Madrid. Las edades de los niños estaban comprendidas entre los 5-7 años de edad, distribuidos en dos grupos: 5-6 años (*M* = 5 años y 7 meses) y de 6-7 años (*M* = 6 años y 6 meses). El nivel socioeconómico era medio-bajo.

Participaron en la investigación un total de 40 niños, alumnos de un colegio de enseñanza pública de la zona sur de Madrid. Las edades de los niños estaban comprendidas entre los 5-7 años de edad, distribuidos en dos grupos…

Material y Procedimiento

El material estaba compuesto por 16 láminas con objetos dibujados. En ocho de ellas se presentaban dos conjuntos de objetos en correspondencia uno-a-uno. Dentro de esta forma, los objetos podían ser desiguales (es decir, correspondencias provocadas: por ejemplo, conejos-zanahorias) o iguales (es decir, correspondencias espontáneas: por ejemplo, globos-globos). En las ocho láminas restantes se incluían dos conjuntos de objetos distribuidos de manera desordenada. Asimismo, como en las láminas anteriores, los objetos podían ser desiguales o iguales. En síntesis y dado que también se mostraban variaciones en la formulación de los problemas (es decir, reformulados y tradicionales), se presentan a los niños, en el caso de los reformulados, 2 pares de conjuntos con objetos iguales (es decir, 6-9 plátanos y 5-8 muñecos) y 2 pares de conjuntos con objetos desiguales (es decir, 7 zanahorias-10 conejos y 6 balones-10 niños). Los conjuntos asignados a la formulación tradicional comprendieron igualmente 2 pares de conjuntos con objetos idénticos (es decir, 5-9 bombones y 8-10 libretas) y 2 pares de conjuntos con objetos distintos (es decir, 6 lápices-8 libretas y 7 palas-9 rastrillos). Además, se incluyeron 4 problemas caracterizados por la ausencia de material: dos correspondientes a la formulación tradicional y con referentes desiguales/iguales y otros dos reformulados también con referentes desiguales/iguales.

Respecto al tamaño de los conjuntos, seleccionamos cantidades intermedias que estaban comprendidas entre el 5 y el 10, siendo la diferencia entre los conjuntos de 2, 3 o 4.

En cuanto al orden de resolución de las tareas, se presentaron en primer lugar aquellas en las que no había objetos y a continuación las tareas con objetos, a fin de evitar un eventual aprendizaje derivado de estas últimas. Además, en uno y otro caso se extrajo un orden al azar, que se mantuvo constante para todos los sujetos.

Análisis y discusión de resultados

El ANOVA mixto 2 (Grupo: 2.° E.I vs. 1.° E.P) x 2 (Material: Ausencia vs. Presencia) x 2 (Problema: Reformulado vs. Tradicional) con medidas repetidas en los dos últimos factores, llevado a cabo con el programa SPSS, indicó que eran significativos los efectos principales de los factores: *Material* (Ausencia/Presencia) [$F1,38 = 62,29$, $p < 0,05$] y *Problema* (Reformulado/Tradicional) [$F1,38 = 34,76$, $p < 0,05$]. Además, en este análisis se pudo observar que alcanzaba la significatividad la interacción Material x Problema [$F1,38 = 55,98$, $p < 0,05$].

Como se desprende de la tabla 1, conforme a nuestra hipótesis hemos constatado que el rendimiento resultó superior en los problemas en los que se utilizaba material frente a los que carecían de él. La presencia del material facilitaba el proceso de representación de la tarea conduciendo a una mejora del éxito infantil (por ejemplo, Bermejo y Lago, 1988; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Carpenter y Moser, 1982). Del mismo modo, los problemas reformulados influyeron positivamente sobre el rendimiento de los sujetos, resultando superior el número de respuestas correctas frente a los tradicionales.

No obstante, la interacción *Material* x *Problema* permitió matizar estos datos, en el sentido de que la presencia de

	Con Dibujo		*Sin Dibujo*	
	Reformulado	*Tradicional*	*Reformulado*	*Tradicional*
2.° Educación Infantil	1,14 (0,73)	0,31 (0,65)	0,15 (0,49)	0,15 (0,49)
1.° Educación Primaria	1,04 (0,63)	0,15 (0,46)	0,30 (0,47)	0,15 (0,49)

Puntuación máxima posible = 2

Tabla 1. Medias y desviaciones típicas, entre paréntesis, de las respuestas correctas

material sólo parece mejorar el rendimiento de los sujetos en los problemas reformulados. Desde nuestro punto de vista y de acuerdo con otros autores (por ejemplo, De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Nunes y Bryant, 1996), para cuantificar la diferencia entre los conjuntos en los problemas de comparación es necesario vincular una acción sobre los objetos con la situación que se describe en la pregunta. Esto es precisamente lo que ocurre en los problemas reformulados, ya que la pregunta se reformula en términos dinámicos (por ejemplo, ¿cuántas abejas se quedarán sin flor?).

Por último, cabe destacar que no se encontraron diferencias significativas entre los grupos a lo largo de las diferentes situaciones experimentales.

Un segundo análisis de varianza mixto 2 (Grupo: 2.° E.I. vs 1.° E.P) x 2 (Problema: Reformulado vs. Tradicional) x 2 (Orden: Correspondencia uno-a-uno vs. Desordenados) x 2 (Objetos: Objetos Iguales vs. Objetos Desiguales) con medidas repetidas en los tres últimos factores, realizado mediante el programa SPSS, indicó que eran significativos los efectos principales de los factores *Problema* [F1,38 = 66,74, p < 0,05] y *Orden* [F1,38 = 24,54, p < 0,05]. Asimismo, dos interacciones dobles resultaron significativas. Por un lado, la interacción *Problema* x *Orden* [F1,38 = 12,88, p < 0,05] , y por otro *Problema* x *Objetos* [F1,38 = 15,56, p < 0,05].

…los problemas reformulados alcanzaban mejores puntuaciones que los tradicionales.

Los resultados de este segundo análisis también pusieron de manifiesto que los problemas reformulados alcanzaban mejores puntuaciones que los tradicionales. Igualmente evidenció que la disposición de los conjuntos en correspondencia uno-a-uno repercutía favorablemente en los niveles de ejecución, en ambas categorías de problemas.

El análisis de las interacciones permitió concluir, en primer lugar, que tanto en los problemas reformulados como en los tradicionales se elevó el rendimiento cuando los conjuntos de objetos eran presentados en correspondencia uno-a-uno, aunque la mejora afectó sustancialmente a los primeros. En segundo lugar, cuando los objetos fueron desiguales el número de respuestas correctas en los problemas reformulados fue mayor que cuando eran idénticos, dándose la situación contraria en los problemas tradicionales. Desde nuestro punto de vista, este dato podría guardar relación con la diferencia entre la correspondencia pro-

	Tradicional		*Reformulados*	
	Correspondencia 1-a-1	*Desordenados*	*Correspondencia 1-a-1*	*Desordenados*
Objetos idénticos				
2.° Educación Infantil	0,45 (0,83)	0,25 (0,64)	1,30 (0,98)	0,75 (0,97)
1.° Educación Primaria	0,25 (0,64)	0.10 (0.45)	1.05 (0.94)	0,65 (0,81)
Objetos desiguales				
2.° Educación Infantil	0,25 (0,64)	0,30 (0,73)	1,50 (0,76)	1,00 (0,97)
1.° Educación Primaria	0,15 (0,49)	0,10 (0,45)	1,55 (0,69)	0,90 (0,91)

Puntuación máxima = 2

Tabla 2. Medias y desviaciones típicas, entre paréntesis, de las respuestas correctas en la situación con Material

vocada en el caso de los objetos desiguales y la correspondencia espontánea cuando se trata de objetos iguales. A partir de los trabajos de Piaget y Szeminska (1941), un dato sobradamente comprobado, es que la correspondencia provocada es más precoz que la espontánea. Sin embargo, el hecho de que en los problemas tradicionales observemos el fenómeno inverso se puede atribuir a un conflicto entre el modo espontáneo de abordar la resolución del problema (es decir, estrategias de conteo) y la estrategia sugerida por la presencia de los conjuntos desiguales (es decir, el emparejamiento), como quedará patente en el análisis de los procedimientos de resolución.

En conclusión, no parece ser únicamente el material *per se* el que influyó sobre las respuestas de los sujetos, sino también el tipo de problema. En este mismo sentido, la ausencia de interacción significativa *Orden* x *Objetos* la interpretamos como una evidencia más de la preponderancia del tipo de problema sobre cualquier otro factor. En efecto, en ambos grupos de edad no se observó una mejora sustancial en los problemas tradicionales cuando el material se hallaba presente. Además, la mejora en los problemas reformulados con objetos tuvo lugar no sólo cuando se disponían en orden, sino también cuando aparecían desordenados y la estrategia de emparejamiento no resultaba tan evidente.

…no parece ser únicamente el material per se *el que influyó sobre las respuestas de los sujetos, sino también el tipo de problema.*

Los procedimientos de resolución

En cuanto a los procedimientos de resolución en los problemas *tradicionales sin dibujos*, los niños de 2.° de EI y 1.° de EP utilizaron mayoritariamente la estrategia correcta consistente en contar desde el término menor hasta alcanzar el mayor (es decir, CMM). Cuando estos mismos problemas se presentaron *con material*, el procedimiento CMM también fue predominante en las pruebas donde los objetos no estaban en orden, tanto con objetos iguales como desiguales. En las situaciones de correspondencia uno-a-uno, los alumnos optaron por una estrategia de emparejamiento, de modo que la respuesta resulta de contar los objetos que no tienen su elemento correspondiente en el otro conjunto.

En los *reformulados sin dibujos*, ambos grupos de edad recurrieron a estrategias de conteo, bien sea contando desde el término mayor al menor (es decir, CMM), bien contando el conjunto menor dentro del mayor para determinar «los que sobran» (es decir, CIM). Además, en el grupo de los mayores también se manifestaron algunas respuestas memorísticas y de descomposición (es decir, Otros). En *presencia de los dibujos*, las estrategias basadas en el emparejamiento predominaron, en ambos grupos de edad, en las situaciones de correspondencia uno-a-uno, principalmente cuando los objetos eran desiguales. Sin embargo, cuando los objetos no estaban dispuestos en orden los niños recurrieron a las de conteo (es decir, CIM y CMM).

		Sin dibujos		*Con dibujos*							
				C_{1-1}-IG		*C_{1-1}-DG*		*D-IG*		*D-DG*	
		Ref.	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*
Emparejamiento	2.° EI	—	—	40	12,5	52,5	7,5	2,5	2,5	12,5	—
	1.° EP	—	—	35	12,5	70	5	10	—	20	—
CIM	2.° EI	2,5	—	15	—	17,5	—	20	—	27,5	5
	1.° EP	10	—	12,5	—	5	—	17,5	—	15	—
CMM	2.° EI	5	7,5	10	7,5	5	2,5	12,5	7,5	10	7,5
	1.° EP	2,5	2,5	—	—	—	2,5	2,5	5	5	5
Otros	2.° EI	—	—	—	2,5	—	2,5	2,5	2,5	—	2,5
	1.° EP	5	5	5	—	2,5	—	2,5	—	5	—

Ref.: Problemas reformulados; *Trad.*: Problemas tradicionales; *C1-1*: Objetos dispuestos en correspondencia uno-a-uno; *D*: Objetos dispuestos sin orden; *IG*: Objetos iguales; *DG*: Objetos desiguales

Tabla 3. Porcentajes de ensayos correctos en las diferentes tareas

En general, teniendo en cuenta los datos obtenidos en el presente trabajo, no parece sostenerse la crítica que habitualmente se realiza al trabajo de Hudson (1983) respecto a que la propia reformulación de la pregunta sugiera al niño la estrategia de resolución, es decir, el emparejamiento. En efecto, como hemos podido comprobar, en los problemas reformulados sin dibujos la presencia de estrategias de emparejamiento fue nula. Por tanto, no es posible afirmar que la reformulación en sí misma implique necesariamente el emparejamiento, siendo, además, que las estrategias basadas en el conteo fueron mayoritarias en los problemas reformulados con dibujos, que no se presentaban en correspondencia uno-a-uno.

Ahora bien, las estrategias de conteo dependen del modelado de los conjuntos del problema y de ahí, su proliferación y elevados niveles de éxito en las situaciones con dibujos. De hecho, la presencia de estas estrategias de conteo denota, a nuestro juicio, una elevada comprensión matemática, ya que reiteradamente se ha encontrado que niños de edades semejantes a nuestros sujetos las usan espontáneamente para comparar dos conjuntos (por ejemplo, Bermejo y Lago, 1991; Fuson, 1988). Opinamos, en contra de lo mantenido por Nunes y Bryant (1996), que no constituyen procedimientos de resolución específicos de este tipo de problemas, ni en su vertiente tradicional ni en su vertiente reformulada, sino procesos con potencial para ser empleados en un amplio rango de situaciones. Por ejemplo, en las distintas categorías de problemas verbales (es decir, cambio, combinación, comparación e igualación), tal como se ha podido observar en numerosas investigaciones (por ejemplo, Bermejo y Rodríguez, 1990; Carpenter y Moser, 1984; De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990; Fuson y Willis, 1996; Verschaffel y De Corte, 1997).

…no parece sostenerse la crítica que habitualmente se realiza al trabajo de Hudson (1983) respecto a que la propia reformulación de la pregunta sugiera al niño la estrategia de resolución, es decir, el emparejamiento.

Con respecto a los errores, cuando se formularon los problemas *tradicionales sin dibujos*, los más comunes, en ambos grupos de edad, consistieron en responder con una de las cantidades del enunciado o los derivados de no cuantificar numéricamente la diferencia. En este último caso respondían: «no todas las abejas tienen flor... pero no sé cuantas abejas no tiene flor». *Con dibujos*, el error más frecuente, en ambos grupos de edad y tanto con objetos ordenados como desordenados, ha consistido en repetir una de las cantidades del problema. Igualmente, destacaron los errores perceptivos en el grupo de los pequeños cuando los objetos son iguales y no están en orden. En este caso respondían: «hay más niños... porque son más niños en el dibujo».

		Sin dibujos		*Con dibujos*							
				C_{1-1}-*IG*		C_{1-1}-*DG*		*D-IG*		*D-DG*	
		Ref.	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*	*Ref.*	*Trad.*
Cantidad del enunciado	2.° EI	—	70	7,5	72,5	—	70	10	50	—	67,5
	1.° EP	5	57,5	5	77,5	—	75	—	80	—	82,5
Correspondencia uno-a-uno	2.° EI	—	—	—	—	5	—	—	2,5	10	—
	1.° EP	—	—	2,5	—	7,5	—	—	—	22,5	—
Perceptivos	2.° EI	—	—	—	—	10	5	10	30	—	10
	1.° EP	12,5	—	—	5	7,5	5	15	12,5	10	10
No responde	2.° EI	55	17,5	10	5	10	12,5	20	5	27,5	7,5
	1.° EP	25	20	5	5	—	7,5	12,5	2,5	5	—
Respuesta al azar	2.° EI	20	2,5	12,5	—	—	—	12,5	—	7,5	—
	1.° EP	17,5	15	30	—	5	5	27,5	—	12,5	—
Otros	2.° EI	17,5	2,5	5	—	—	—	10	—	5	—
	1.° EP	22,5	—	5	—	2,5	—	12,5	—	5	2, 5

Ref,: Problemas reformulados; *Trad,*: Problemas tradicionales; *C1-1*: Objetos dispuestos en correspondencia uno-a-uno; *D*: Objetos dispuestos sin orden; *IG*: Objetos iguales; *DG*: Objetos desiguales

Tabla 4. Porcentajes de errores en las diferentes tareas

En los problemas *reformulados sin dibujos*, las respuestas incorrectas fueron debidas, en el grupo de EI a que no cuantificaban numéricamente la diferencia, mientras que los de EP cometieron este mismo error, así como «otros» en los que, por ejemplo, afirmaban que ambos conjuntos resultaban equivalentes. Con dibujos, en correspondencia uno-a-uno, los errores resultaron poco relevantes. Fueron debidos a la no cuantificación del resultado o al azar con objetos iguales, y perceptivos con objetos desiguales. En las situaciones de no correspondencia, se mantuvo una pauta similar de resultados. Así, con objetos iguales sobresalieron los errores en los que no se cuantificó numéricamente la diferencia, los perceptivos y las respuestas al azar. Con objetos desiguales, destacaremos el error que se produce en los niños de EP cuando recurren al emparejamiento.

En suma, el error más sobresaliente en los problemas tradicionales a lo largo de las distintas situaciones experimentales, consistió en responder con una de las cantidades del enunciado, que se corresponde con el que normalmente se menciona en los problemas de comparación (por ejemplo, Bermejo y Rodríguez, 1990; Cummins, 1991). Por tanto, la mera presencia del material no resulta suficiente para evitar este tipo de error en los problemas tradicionales, sino que parece necesaria su reformulación.

Esta clase de respuesta incorrecta ha sido objeto de múltiples interpretaciones, por ejemplo, Okamoto (1996) consideró que los niños pequeños (en torno a los 6 años) construían redes semánticas en los problemas de comparación sólo parcialmente, de manera que las construcciones «más que» y «menos que» se reducían a meros enunciados declarativos. En una línea muy semejante, Nunes y Bryant (1996) apuntaron que los niños comprendían el significado de «más» y «menos», es decir, podían establecer estas comparaciones, pero carecían de estrategias que les permitiesen cuantificar las diferencias.

En definitiva, hemos constatado que si las condiciones son favorables, es decir, si se reformulan los problemas mediante la dinamización de la pregunta y se emplean materiales para representar las cantidades de los enunciados, mejora notablemente el rendimiento de los niños.

Conclusiones

Desde los modelos recientes relacionados con la instrucción en matemáticas, se insiste en la importancia de fomentar los procesos de comprensión, vinculando la enseñanza a las situaciones de la vida cotidiana. Una de las posibles maneras de abordar este objetivo consiste en fomentar el aprendizaje de las operaciones básicas a partir de los problemas verbales. No obstante, una de las dificultades de este planteamiento es que para los niños no todas las categorías de problemas son igual de asequibles. En la presente investigación hemos analizado el comportamiento de los niños de corta edad en la categoría de problemas que les resulta más compleja, esto es, los problemas de comparación. Los resultados demostraron que la reformulación de este tipo de problemas influyó positivamente sobre el rendimiento de los niños. Los problemas reformulados mejoran la comprensión de las relaciones entre las cantidades del problema, permitiendo la aplicación de los procesos de cuantificación ya conocidos por los niños. Asimismo, en contra de lo habitualmente defendido por algunos autores, respecto a que la presencia del material y la propia reformulación de los problemas estándar lleven aparejadas estrategias primitivas, nuestros datos mostraron que estas condiciones promovían la aparición de procedimientos de cuantificación más complejos, aunque todavía dependientes del modelado directo de las cantidades.

En definitiva, hemos constatado que si las condiciones son favorables, es decir, si se reformulan los problemas mediante la dinamización de la pregunta y se emplean materiales para representar las cantidades de los enunciados, mejora notablemente el rendimiento de los niños. Además, en estas condiciones explicitan procedimientos de cuantificación que apenas muestran de modo espontáneo.

Por consiguiente y desde la óptica instruccional, desde muy temprana edad los niños pueden, bajo determinadas condiciones, llegar a comprender los problemas de comparación, permitiendo así su aprendizaje simultáneo con las restantes categorías de problemas.

Referencias bibliográficas

BERMEJO, V. y P. RODRÍGUEZ (1990): «La operación de sumar», en V. BERMEJO: *El niño y la aritmética*, Paidós, Barcelona, 107-140.

BERMEJO, V., M. O. LAGO y P. RODRÍGUEZ (1994): «Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa», *Cognitiva*, n.° 2 (6), 159-174.

BERMEJO, V., M. O. LAGO, P. RODRÍGUEZ, C. DOPICO, M.ª J. LOZANO y Mª T. PINTOS (1995-1997): *Intervención psicope-*

dagógica en el aula de matemáticas: Un programa instruccional para Primer Ciclo de Educación Primaria, Enviado al C.I.D.E.

CARPENTER, T. y J. MOSER (1984): «The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one trough three», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.° 15, 179-202.

COWAN, R., C. FOSTER y A. AL-ZUBAIDI (1993): «Encouraging children to count», *British Journal of Developmental Psychology*, n.° 11, 411-420.

CUMMINS, D. (1991): «Children´s interpretations of arithmetic word problems», *Cognition and Instruction*, n.° 8, 261-289.

DE CORTE, E., L. VERSCHAFFEL y A. PAUWELS (1990): «Influence of the semantic structure of word problems on second grades' eye movements», *Journal of Educational Psychology*, n.° 82, 359-365.

FUSON, K., W. M. CARROLL, y J. LANDIS (1996): «Levels in conceptualizing and solving addition and subtraction compare word problems», *Cognition and Instruction*, n.° 14(3), 345-371.

HUDSON, T. (1983): «Correspondences and numerical differences between disjoint sets», *Child Development*, n.° 54, 84-90.

LEWIS, A. (1989): «Training students to represent arithmetic word problems», *Journal of Educational Psychology*, n.° 81, 521-531.

LEWIS, A. y R. MAYER (1987): «Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems», *Journal of Educational Psychology*, n.° 79, 363-371.

MWANGI, W. y J. SWELLER (1998): «Learning to solve compare word problems: The effect of example format and generating self-explanations», *Cognition and instruction*, n.° 16 (2), 173-199.

M. O. Lago
P. Rodríguez
M. J. Lozano
Facultad de Psicología,
Universidad Complutense
C. Dopico
Facultad de Psicología,
Universidad San Pablo CEU

NUNES, T. y P. BRYANT (1996): «Giving meaning to addition and subtraction», en T. NUNES y P. BRYANT (eds): *Childrens doing mathematics,* Blackwell, 129-140.

NUNES, T. y BRYANT, p. (1996): «Begining with counting», en T. NUNES y P. BRYANT (eds.): *Childrens doing mathematics* (pp. 35-41): Blackwell.

OKAMOTO, Y. (1996): «Modeling children's understanding of quantitative relations in text: A developmental perspective», *Cognition and Instruction*, n.° 14(4), 409-440.

PIAGET, J. y A. SZEMINSKA (1941): *La genese du nombre chez l'enfant*, Edition Delachaux et Niestlé, Neuchatel.

VERGNAUD, G. (1982): «A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems», en T. CARPENTER, J. MOSER y T. ROMBERG (eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Erlbaum, Hillsdale, 35-59.

VERSCHAFFEL, L. y E. DE CORTE (1997): «Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school?», en T. NUNES y P. BRYANT (eds.): *Learning and teaching mathematics. An International Perspective*, Psychology Press Publishers, Hove, 69-97

SUMA

SUSCRIPCIONES

Particulares: 3.500 pts. (3 números)
Centros: 5.000 pts. (3 números)
Número suelto: 1.700 pts.

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45.
E-mail: suma@public.ibercaja.es

Se ruega a los suscriptores y a los socios de la Federación que para cualquier comunicación sobre envío de ejemplares atrasados, reclamaciones, suscripciones... se haga por correo, fax o mail. No se podrán atender este tipo de comunicaciones por teléfono.

SUMA 37
junio 2001, pp. 63-66

Una propiedad del triángulo isósceles

Juan-Bosco Romero Márquez

ARTÍCULOS

En este artículo se presenta una interesante propiedad de los triángulos isósceles, usando como apoyo técnicas y propiedades de Geometría básica.

EN ESTE ARTÍCULO de carácter elemental, sobre la geometría métrica plana del triángulo, damos una propiedad de los triángulos isósceles. Así mismo, ofrecemos otras caracterizaciones de los triángulos isósceles, que se pueden encontrar en la biblografía.

Los conceptos y resultados previos que se utilizan se enmarcan dentro de la Geometría y la Trigonometría elemental de la enseñanza actual, es decir: triángulos, semejanza y trigonometría.

Todos estos ingredientes, junto con la imaginación, creación e intuición matemática forman las claves esenciales de esta experiencia.

Resultados

Comenzamos esta sección dando un resultado clásico sobre los triángulos equiláteros, a través del siguiente:

Teorema 1

Dado un triángulo equilátero ABC, de lado a, en el que tomamos un punto arbitrario interior P, desde el cual se trazan las perpendiculares PD, PE y PF a los lados del triángulo BC, CA y AB, respectivamente, se verifica que:

$$k = \frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}$$

es constante.

Demostración

Véase la figura 1. Trazamos por el punto P tres rectas paralelas a los lados del triángulo. Los tres triángulos que así se forman son también equiláteros y la suma de sus lados es igual al lado a del triángulo ABC.

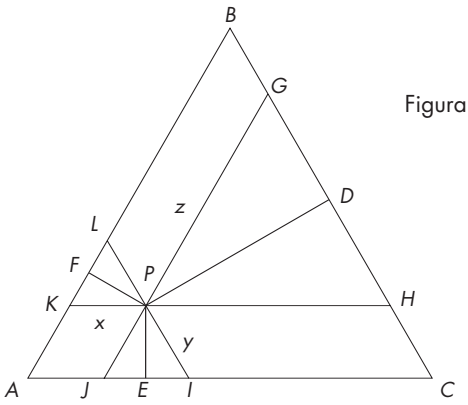


Figura 1

$a = x + y + z$

Por consiguiente, la suma de las tres alturas es igual a la altura h del triángulo ABC, por lo tanto:

$$PD + PE + PF = h = a \cdot \text{sen}60 = a\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por otra parte, la suma $BD + CE + AF$ es igual a la suma de los lados de los tres triángulos trazados más la suma de las mitades de estos lados, o sea de todos los triángulos indicados en la figura 1 deducimos que:

$$x + y + z = a,\ BD = x + z/2,\ CE = z + y/2,$$
$$AF = y + x/2;\ BD + CE + AF = (3/2)\,a.$$

Por tanto, al sustituir todo lo anterior en k, obtenemos que

$$k = 1/\sqrt{3}$$

Conjetura 1. ¿Es cierto el recíproco de este teorema?

De otra parte, en Clemens, O'Daffer y Cooney, encontramos un método de solución de este problema para demostrarlo como una técnica más de resolver problemas en matemáticas: utilizando para ello, la prueba del mismo en los casos particulares según sea la posición del punto P, en el triángulo equilátero dado.

Teorema 2

Sea ABC un triángulo isósceles. Si K es un punto cualquiera interior a la base BC, y si M, N son los puntos proyección perpendicular de K sobre los lados AB y AC, respectivamente y, sean P y Q las proyecciones perpendiculares de M y N sobre el lado BC, entonces se verifican:

i) $KM + KN$ es constante;

ii) $MP + NQ$ es constante.

Demostración

En todo lo que sigue ver la figura 2. Los ángulos del triángulo se denotan de la misma forma que sus vértices. Por tanto si ABC es un triángulo isósceles de base $a = BC$, se tiene que: $A + 2B = 180°$.

Sean $AB = AC = b$, D = ángulo determinado por los segmentos $AK = k$ y $AH = h$, siendo H el pie de la perpendicular trazada desde A, a la base BC.

i) Por todo lo dicho en el enunciado del teorema, los tres triángulos AKM, AKN y AHK son rectángulos en los vértices M, N y K respectivamente, y tenemos que:

$$KM = k \cdot \text{sen}(A/2 - D)$$
$$KN = \text{k} \cdot \text{sen}(\text{A}/2 + \text{D}) \qquad [1]$$

$$h = AH = AK \cdot \cos D = k \cdot \cos D$$
$$\cos B = \text{sen}(A/2) = a/2b. \qquad [2]$$

Sumando miembro a miembro las fórmulas de [1] y teniendo en cuenta [2], y que $A + 2B = 180°$, llegamos a:

$$KM + KN =$$
$$k \cdot \text{sen}(A/2 - D) + k \cdot \text{sen}(A/2 + D) =$$
$$k \cdot \text{sen}(90 - B - D) + k \cdot \text{sen}(90 - B + D) =$$
$$k[\cos(B + D) + \cos(B - D)] =$$
$$= k \cdot 2\cos B \cdot \cos D =$$
$$2 \cdot \cos B.(k \cdot \cos D) =$$
$$= 2 \cdot a/2b \cdot h = ab/b \qquad [3]$$

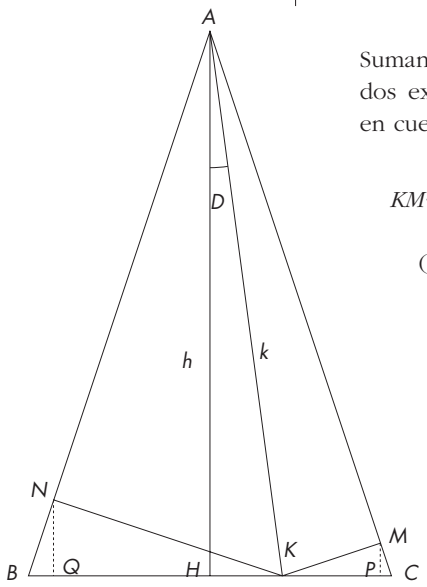
expresión que sólo depende de los lados a y b del triángulo, que es lo que queríamos demostrar.

ii) De la misma forma para los triángulos rectángulos MPK, NQK en los vértices P y Q, respectivamente, tenemos:

$$MP = KM \cdot \text{sen}(A/2)$$
$$NQ = KN\ \text{sen}(A/2). \qquad [4]$$

Sumando miembro a miembro las dos expresiones de [4] y teniendo en cuenta i) obtenemos:

$$MP + NQ =$$
$$KM \cdot \text{sen}(A/2) + KN\ \text{sen}(A/2) =$$
$$(KM + KN) \cdot \text{sen}(A/2) =$$
$$(ab/b) \cdot (a/2b) = ba^2/2b^2 \qquad [5]$$



$a = BC$
$b = AB = AC$
$B = C$

Figura 2

Observaciones y comentarios

1. Es evidente que las dos propiedades i) y ii) son equivalentes ya que los cálculos algebraicos efectuados son reversibles.
2. ¿Qué valor toman las dos relaciones i) y ii) para el caso de los triángulos equiláteros y rectángulos?
3. Se puede probar que las relaciones i) no se verifica para los triángulos rectángulos no isósceles, aunque sí es cierto ii).
4. En Mitrinovic, Pecaric y Volonec (1989), aparecen los dos teoremas anteriores propuestos como problemas.

Vamos a ensayar si, en cierto sentido, el teorema 2 verifica el recíproco.

Sea ABC el triángulo arbitrario de lados a, b y c, y denotamos por h y w, a la altura y bisectriz correspondientes al lado a. Sea $2p = a + b + c$ (perímetro), y llamamos R al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Supongamos que se verifica, para el punto H pie de la altura sobre el lado $BC = a$, la relación dada en i). Esto es:

$$HM + HN = ab/b \qquad [6]$$

donde los puntos M y N son respectivamente, las proyecciones perpendiculares de H sobre los lados $AC = b$ y $AB = c$ (ver figura 3).

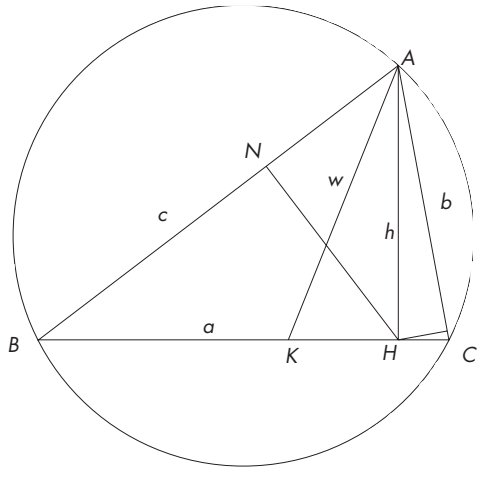


Figura 3

Si tenemos en cuenta la relación

$$h = w\cos\frac{B - C}{2}$$

entre la altura h y la bisectriz w, podemos poner:

$$b\left(\cos B + \cos C\right) = 2b\cos\frac{B + C}{2}\cdot\cos\frac{B - C}{2} = b\frac{2R\cdot\operatorname{sen}A}{2R\cdot\operatorname{sen}B}$$

$$2\cos\frac{180 - A}{2}\cdot\cos\frac{B - C}{2} = \frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}$$

$$2\cdot\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{sen}B\cdot\cos\frac{B - C}{2} = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$\operatorname{sen}B\cdot\cos\frac{B - C}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

$$h\cdot\operatorname{sen}B = c\cdot\operatorname{sen}^2 B = w\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b + c}\cos^2\frac{A}{2} \qquad [7]$$

Teniendo en cuenta las fórmulas del seno de un ángulo y seno del ángulo mitad en función del semiperímetro y de los lados a, b, y c. Después de operar y simplificar obtenemos:

$$a^2(b - c) = (b - c)^2(b + c) \qquad [8].$$

Desde [8] tenemos dos posibilidades:

1. Si b = c, entonces el triángulo es isósceles; o
2. Si b es distinto de c tenemos

   $$a^2 = b^2 - c^2,\ b^2 = a^2 + c^2$$

   es decir, el triángulo es rectángulo en el ángulo B.

Conjetura 2. En las condiciones anteriores supongamos que para el punto H, se verifica ii) del teorema 2. ¿De qué tipo del triángulo se trata?

Distintas caracterizaciones de los triángulos isósceles

En todos los resultados que se proponen, ver los que son equivalentes y los que admiten o no un recíproco:

1. Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales.
2. Un triángulo isósceles es el que tiene dos ángulos iguales.
3. *Teorema de Lehmus-Steiner.* Cualquier triángulo que tiene dos bisectrices iguales (medidas desde el vértice a lado opuesto) es isósceles (ver Coxeter y Greitzer, 1993).

   Utilizando que el cuadrado de la longitud de la bisectriz correspondiente al vértice A viene dada por:

   $$bc\left[1 - \left(\frac{a}{b + c}\right)^2\right]$$

   de aquí obtener también una demostración directa del Teorema de Lehmus-Steiner.

4. Demostrar que si en un triángulo se verifica la relación:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$$

es isósceles.

5. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y A, B, C, respectivamente los ángulos opuestos. Probar que si $a + b = \mathrm{tg}(C/2) \cdot (a \cdot \mathrm{tg}A + b \cdot \mathrm{tg}B)$, el triángulo es isósceles (Greitzer, 1994).

6. Demostrar que si en un triángulo la razón de las tangentes de dos ángulos es igual a la razón de los cuadrados de los senos de estos ángulos, el triángulo es isósceles o rectángulo.

Para otras caracterizaciones de todo tipo de triángulos mediante desigualdades que se convierten en identidades entre los diferentes elementos de un triángulo, ver Lalesco (1989).

Conclusiones y comentarios

La principal conclusión de este trabajo es que siempre se pueden encontrar nuevos o antiguos resultados sencillos con los que los alumnos pueden ensayar en clase, como una motivación didáctica-metodológica-pedagógica, dentro del marco de la enseñanza secundaria. Y esto es siempre un hecho positivo, porque puede suponer una motivación creadora e investigadora para el profesor y el alumno; imaginar, crear, resolver, construir y decidir es un arte: el pentágono regular de toda enseñanza Matemática, siendo el lado y la diagonal el alumno y profesor, respectivamente.

Por último, se podría proponer la generalización de estos resultados a triángulos más generales, inspirándose en los teoremas demostrados para la resolución o refutación de las conjeturas propuestas, o de los problemas.

Bibliografía

BEHNKE, H. y otros (eds.): *Fundamentals Mathematics, vol. II, Geometry*, MIT, California.

BERGER B. (1987): *Geometry, I, II*, Springer, New York.

BIX, R. (1994): *Topics in Geometry*, Academic Press, San Diego.

BRANNAN, D. A. (1999): *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

BROWN, S. I. y M. I. WALTER (1990): *The art of problem Posing*, Lawrence Erlabaum Associates Publishres, London.

CLEMENS, C. H. y M. A. CLEMENS (1991): *Exercices and solutions for the classroom*, Springer, New York.

CLEMENS, C. H. y M. A. CLEMENS (1991): *Geometry for the classroom*, Springer, New York.

CLEMENS, S. R., P. G. O'DAFFER y T. G. COONEY (1999): *Geometría con aplicaciones y soluciones de problemas*, Addison-Wesley Iberoamericana, España.

COXETER H. S. M. (1970): *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México.

Juan-Bosco Romero
Fcaultad de Ciencias.
Universidad
de Valladolid.
Sociedad «Puig Adam»
de Profesores de Matemáticas

COXETER H. S. M. y S. L. GREITZER (1993): *Retorno a la Geometría*, DLS-Euler, Editores.

CURCIO F. R. (1987)*: Teaching and learning: a problem, Solving focus*, Reston.

EVES, H. (1967): *Estudios de las Geometrías, vol. I, II*, Uteha, Mexico.

GREITZER, S. (ed.) (1994): *Olimpiadas Matemáticas*, DLS-Euler, Madrid.

GURSIATNIKOV, P. y S. REZNICHENKO: *Álgebra vectorial con ejemplos y problemas*, Mir Moscú.

HILBER, D. y S. COHN-VOSSEN (1952): *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York.

HONSEBERGER R. (1994): *El ingenio en Matemáticas*, DLS-Euler, Madrid.

HONSEBERGER, R. (1995): *Episodes in nineteenth and Twenty Century Euclidean Geometry*, MAA, Washington.

JACOBS, H. R. (1977): *Geometry*, Freeman, New York.

KING, J. R. y D. SCHATTSCNEIDER (eds.) (1994): *Geometry Turned on dynamic software in learning, teaching and research*, MAA, Washington.

LALESCO T. (1989): *La géométrie du triangle*, Gabay, Paris.

LARSON, L. C. (1983): *Problems: solving through problems*, Springer, New York.

LIDSKI, V. y otros (1978): *Problemas de Matemáticas elementales*, Mir, Moscú.

LITVINENKO, V. y A. MORDOKPVIC (1989): *Prácticas para resolver problemas*, Mir, Moscú.

MITRINOVIC, D. S., J. E. PECARIc y V. VOLONEC (1989): *Recents advances in geometric inequalities*, Kluwer, Dordrecht.

POLYA G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

POSAMENTIER, A. S. y Ch. T. SALKIND (1996): *Challemging problems in Geometry*, Dover, New York.

POTTAGE, J. (1983): *Geometrical investigations: illustrating the art of discovery in the Mathematical field*, Addison-Wesley, London.

PUIG ADAM, P. (1976): *Geometría Métrica, vol. I, II*, Madrid.

REES, E. G. (1983): *Notes on Geometry*, Sprigner, New York.

SHARIGUIN, I. (1989): *Problemas de Geometría*, Mir, Moscú.

SORTAIS, I y R. SORTAIS (1988): *Géométrie de l'space et du pla*, Hermann, Paris.

SORTAIS, Y. y. R. SORTAIS (1987): *Géométrie du triangle*, Hermann, Paris.

WALLACE, E. C. y S. F. WEST (1993): *Roads to Geometry*, Prentice Hall, New Jersey.

SUMA 37
junio 2001, pp. 67-74

Sobre la utilidad de la Geometría en la enseñanza de la Probabilidad

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

¿POR QUÉ CUANDO SE EXPLICA un concepto matemático no se aprovecha todo el bagaje de conocimientos que atesoran nuestros alumnos? ¿Por qué cuando se explica el concepto de probabilidad se prescinde de conceptos como el de área o el de longitud? ¿Por qué prescindir de la Geometría cuando el alumno comienza a tomar contacto con el azar?

El objetivo de este artículo es cocienciarnos de la importancia de aprovechar los conocimientos de Geometría que poseen nuestros alumnos, para explicar el concepto de probabilidad.

Desde la Antigüedad, la Geometría ha sido considerada como la personificación de la Matemática por antonomasia. La perfección y la belleza de las demostraciones geométricas es tal que algunos autores despachaban con un simple: ¡Mira!, la demostración de un teorema matemático, a la vista de su construcción gráfica. Descartes y Fermat, en los siglos XVI y XVII sintetizaron Geometría y Álgebra, identificando «puntos» con pares de números reales y «rectas» con ecuaciones lineales. Nosotros queremos demostrar lo beneficioso que desde un punto didáctico puede ser la unión de la Geometría y la Probabilidad.

Cuando se tira un dado, todo el mundo sabe que hay 6 resultados posibles y por tanto la probabilidad de obtener un 2 es 1/6. Pero, qué probabilidad hay tras, por ejemplo, estos problemas:

El objetivo de este artículo es concienciarnos de la importancia de aprovechar los conocimientos de Geometría que poseen nuestros alumnos para explicar el concepto de probabilidad. Queremos demostrar lo beneficioso que, desde un punto de vista didáctico, puede ser la unión de la Geometría y la Probabilidad

Problema 1

Consideremos el experimento consistente en elegir al azar un punto perteneciente al cuadrado de lado *R*. Calcular la probabilidad de que un punto elegido al azar en ese cuadrado, pertenezca al círculo inscrito en dicho cuadrado.

Problema 2

Supongamos un intervalo *AB* dividido en tres partes por dos puntos X_1, X_2 cogidos al azar. Calcular la probabilidad de construir un triángulo con los subintervalos como lados.

En los juegos de azar discretos podemos «contar» los casos favorables y los posibles, como en los problemas de dados y monedas. En los problemas geométricos, cuando el número de casos posibles y favorables es infinito, no podemos contar sino que tenemos que «medir» dichos casos. La diferencia entre «contar» y «medir» distinguen la Aritmética de la Geometría. Con este trabajo, queremos reivindicar también la Geometría, como un arma eficaz para iniciar al alumno en el peregrinaje por el azar.

En nuestro viaje también nos acompañan las palabras del profesor Santaló, quien se expresaba así:

> Creo que la Geometría es un puente entre el mundo real y el mundo de las ideas, y que como tal, debe jugar un papel esencial en todo el aprendizaje de las Matemáticas.

Ciertas utilidades

Didácticamente, a veces interesa que los primeros problemas que se planteen al alumno que se inicia en la Probabilidad tengan que ver con la Geometría, por la simplicidad con la que se hallan los resultados. Así en el problema 1, si elegimos como medida de probabilidad el área, según la figura 1, tenemos que, calculada como cociente de casos favorables entre casos posibles, la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}} = \frac{\pi(R/2)^2}{R^2} = \frac{\pi}{4}$$

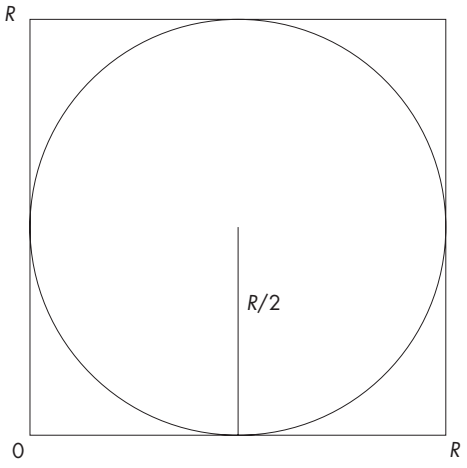


Figura 1

La diferencia entre «contar» y «medir» distinguen la Aritmética de la Geometría.

Otras veces, como en el problema 2, la tarea, amén de sencilla, goza de la belleza que sólo la Geometría posee. Nos basaremos en la figura 2, donde cogeremos como variables $x_1 = AX_1$ y $x_2 = AX_2$. El dominio de todas las posibles posiciones de los puntos x_1 y x_2, es el cuadrado cuyo lado *AB*, es igual a *l*. Para ver el dominio de los casos favorables, es decir, para que los subintervalos AX_1, X_1X_2 y X_2B formen un triángulo, tiene que ocurrir que:

a) Si X_1 precede a X_2, debe pasar que:

- $x_2 - x_1 < x_1 + l - x_2$, es decir $x_2 - x_1 < l/2$
- $x_1 < x_2 - x_1 + l - x_2$, es decir $x_1 < l/2$
- $l - x_2 < x_2 - x_1 + x_1$, es decir $x_2 > l/2$

lo cual significa que x_1, x_2 pertenecen al triángulo *OPN*, cuya definición es obvia si *L*, *M*, *N* y *P* son los puntos medios del cuadrado *ABCD*.

b) Si X_2 precede a X_1, tiene que ocurrir que:

- $x_1 - x_2 < l/2$
- $x_2 < l/2$
- $x_1 > l/2$

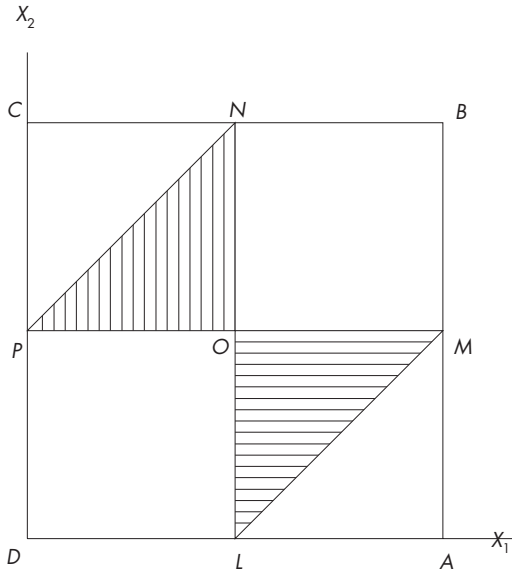


Figura 2

lo cual significa que x_1, x_2 pertenecen al triángulo *OLM*.

Así, la probabilidad requerida, como podemos ver en la figura 2 es:

$$p = \frac{\text{Área } OLM + \text{Área } OPN}{\text{Área } ABCD} = \frac{\frac{1}{4}l^2}{l^2} = \frac{1}{4}$$

Ciertos invonvenientes

Algunas veces la Geometría puede instalar la duda en nuestras mentes. Pero la aparición de paradojas, sólo nos pueden alentar a afianzar nuestros conocimientos. Dependiendo de la medida de probabilidad (longitud, área, etc.) que cojamos, el resultado puede ser distinto, así en Van Fraasen (1989) aparece la siguiente paradoja:

Problema 3

Una factoría construye cubos *C* de hierro, de arista menor o igual que 2 cm. ¿Cuál es la probabilidad de que un cubo C_1 construido en la citada factoría tenga una arista menor o igual que 1 cm?

Primera solución

$$p = \frac{\text{longitud de la arista de } C_1}{\text{longitud de la arista de } C} = \frac{1}{2}$$

Segunda solución

$$p = \frac{\text{Área de la cara de } C_1}{\text{Área de la cara de } C} = \frac{1}{4}$$

Tercera solución

$$p = \frac{\text{Volumen del cubo de } C_1}{\text{Volumen del cubo de } C} = \frac{1}{8}$$

Pero quizás la paradoja más conocida es la aparecida en la segunda página del libro de Bertrand, donde nos encontramos con el siguiente problema:

On trace au hasard *une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que la côté du triangle équilatéral inscrit?*

Es decir:

Se traza al azar una cuerda en un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que esa cuerda tenga una longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito?

Algunas veces la Geometría puede instalar la duda en nuestras mentes. Pero la aparición de paradojas, sólo nos pueden alentar a afianzar nuestros conocimientos.

Se pueden dar las siguientes soluciones:

Primera solución

El centro *M* de la cuerda *AB* es un punto obtenido al azar. Si M pertenece al interior del círculo C_1 de radio *R*/2, la longitud de la cuerda *l* es mayor que el lado del triángulo inscrito, cuya longitud es $R\sqrt{3}$ (figura 3). Midiendo por tanto la probabilidad como cociente de casos favorables entre casos posibles, tenemos:

$$p = \frac{\text{Área de } C_1}{\text{Área de } C} = \frac{\pi R^2/4}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

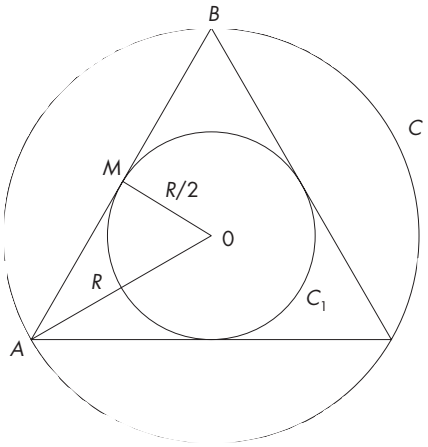


Figura 3

Segunda solución

El extremo *A* de la cuerda *AB* es un punto fijo y *B* es obtenido al azar. La condición pedida de que la cuerda tenga una longitud mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito, se verifica siempre que *B* esté en el arco *DBE* (figura 4). Luego:

$$p = \frac{\text{Longitud de } DBE}{\text{Longitud de } C} = \frac{2\pi R/3}{2\pi R} = \frac{1}{3}$$

Tercera solución

Se considera que la cuerda *AB* se mueve aleatoria y perpendicularmente al diámetro *FK*. La longitud de la cuerda *l* será mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito siempre que el centro *M* de *AB* esté entre *G* y *H* (ver figura 5). Luego la probabilidad será ahora:

$$p = \frac{\text{Longitud de } GH}{\text{Longitud de } FK} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

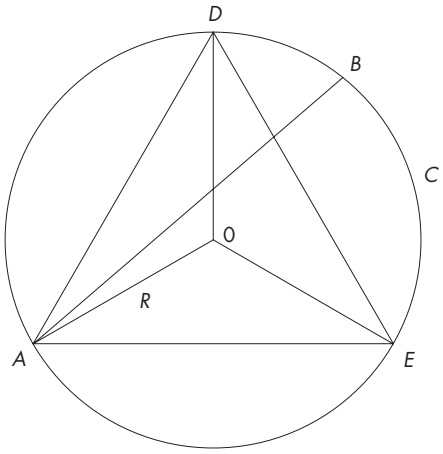


Figura 4

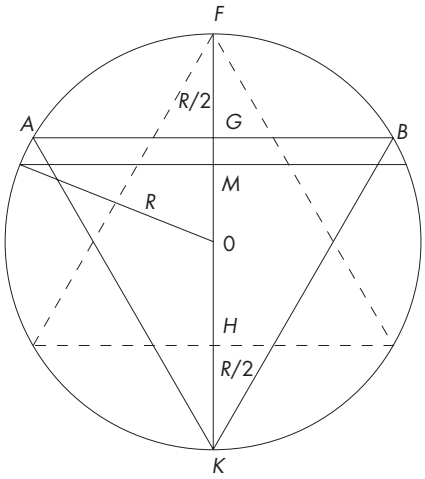


Figura 5

Como es conocido, la paradoja proviene de que no se trata de un único problema, sino de tres. Los resultados son distintos ya que son distintos (puntos, segmentos, etc.) los que se toman al azar. Didácticamente, estas paradojas deben fomentar el espíritu crítico del alumno y servir para afianzar los conocimientos adquiridos.

Todo empezó con una aguja

Veamos ahora algo de la génesis histórica de la Probabilidad Geométrica. Comprobaremos que podemos utilizar la Historia de la Probabilidad como un banderín de enganche para muchos de nuestros alumnos.

Todo empezó con el noble francés Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1701-1788). Fue un estrecho colaborador en la *Enciclopedia* y tradujo entre otros a Newton.

Firme observador de todos los seres de la Naturaleza, [Buffon] consideraba al hombre como un integrante de la misma al que había que estudiar no sólo desde un punto de vista fisiológico, sino también en su espíritu, con sus esperanzas, sus miedos y sus pasiones.

Desde su puesto de supervisor del Jardín del Rey, emprendió la redacción de su obra capital, su *Historia Natural*. Es un tratado moderno de 44 tomos que intenta abordar la Naturaleza de una manera íntegra. Contiene un tratado sobre la Tierra (pensó que el origen del planeta era una enorme colisión), una parte dedicada al estudio anatómico del hombre y otra dedicada a todo lo referente al cruce de especies, su reproducción, etc. Buffon puede ser considerado el precursor de la Biología y es junto con Linneo el más importante naturalista del siglo XVIII

Firme observador de todos los seres de la Naturaleza, consideraba al hombre como un integrante de la misma al que había que estudiar no sólo desde un punto de vista fisiológico, sino también en su espíritu, con sus esperanzas, sus miedos y sus pasiones.

En cuanto al estudio de los miedos de la naturaleza humana, en su *Essai d'Arithmétique Morale*, un suplemento a la *Historia Natural*, propone despreciar las probabilidades pequeñas, concretamente menores que 1/10000, ya que, según sus tablas de mortalidad, la probabilidad de que un hombre de 56 años muera en el transcurso del día era de 1/10189 y si, para un hombre de esa edad, dicha probabilidad no le causa temor y le parece pequeña, con igual motivo lo será 1/10000. Con argumentos como éste y apoyando la doctrina de que el dinero debe valer en proporción, no a su valor intrínseco, sino al uso que se puede hacer de él o la satisfacción (utilidad) que da, trató de resolver el llamado Problema de San Petersburgo, problema ligado a un juego con esperanza infinita (Ruiz, 1999).

Una de las pasiones más generalizadas entre los humanos del siglo XVIII eran los juegos de azar. En palabras de Leibniz:

> Los hombres nunca son tan ingeniosos como en la invención de juegos: el espíritu se encuentra en ellos a sus anchas.

El conde francés se propone por tanto, analizar los juegos de azar y comprobar

su influencia en el propio hombre y en la sociedad. Buffon observa que:

> El Análisis ha sido el único instrumento que hasta la fecha se ha utilizado en la Ciencia de la Teoría de Probabilidades, como si la Geometría no fuera indicada para estos fines, cuando en realidad basta un poco de atención, para observar que la ventaja del Análisis sobre la Geometría es tan sólo accidental, y que el azar es tan propio del Análisis como de la Geometría. Para poner a la Geometría en sus derechos sobre la Ciencia del Azar, bastará inventar unos juegos que se basen en la extensión y sus relaciones.

En su *Essai d'Arithmétique Morale* propone el siguiente juego:

> *Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur un seul carreau; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints que les séparent; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints: on demande les forts de chacun de ces joueurs.*

Cuya traducción es:

> En una habitación embaldosada con baldosas iguales, con una forma cualquiera, se tira al aire una moneda. Uno de los jugadores apuesta a que la moneda caerá limpiamente sobre una sola baldosa; el segundo apuesta que caerá sobre dos de ellas, es decir, que cubrirá una de las juntas que las separan; un tercer jugador apuesta que la moneda caerá sobre dos juntas, un cuarto apuesta que la moneda cubrirá tres, cuatro o seis juntas: se requiere la probabilidad de cada jugador.

Buffon investiga este juego para distintos tipos de baldosas: cuadradas, hexagonales, etc. y se interesa por la forma de hacer de estos juegos, «juegos justos». Como un caso especial, Buffon propone el, posteriormente, llamado Problema de la Aguja:

> *Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air, une baguette, & que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. On peu joueur cet jeu sur un damier avec une aiguille à coudre o une épingle sans tête.*

Georges Louis Leclerc
Conde de Buffon

Como un caso especial, Buffon propone el, posteriormente, llamado Problema de la Aguja…

Que lo podemos traducir como:

> Supongamos que en una habitación, el suelo se haya dividido en líneas paralelas, se tira un palo y uno de los jugadores apuesta a que el palo no ha cortado ninguna de las paralelas de el suelo, el otro por el contrario apuesta porque el palo cortará alguna de esas líneas, se pregunta por las probabilidades de ambos jugadores. Es posible jugar este juego con una aguja de coser o un alfiler sin cabeza.

Luego, sobre un plano se trazan rectas paralelas equidistantes, situadas unas de las otras a una distancia constante d. Se arroja al azar una aguja tan delgada que se considera como un segmento rectilíneo de longitud $l < d$. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas?

Determinamos la posición de la aguja mediante la distancia $OP = x$ de su punto medio a la recta más próxima y el ángulo agudo, φ, formado por OP y la aguja. Evidentemente $0 \leq x \leq d/2$ y $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (ver figura 6).

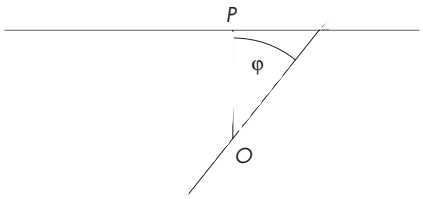


Figura 6

La probabilidad que necesitamos se calculará como cociente de casos favorables entre casos posibles. La medida de los casos posibles será el área de rectángulo $OABC$ con $OA = \pi/2$ y $OC = d/2$. Para obtener los casos favorables tenemos en cuenta que la aguja corta a la paralela si $x < (l/2)\cdot\cos\varphi$ y en ese caso el punto (x, φ) se halla dentro del área sombreada bajo la curva $x = (l/2)\cdot\cos\varphi$ (ver figura 7).

Luego en resumen, la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\text{Área de } OAD}{\text{Área de } OABC} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{l}{2}\cos\varphi \, d\varphi}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}$$

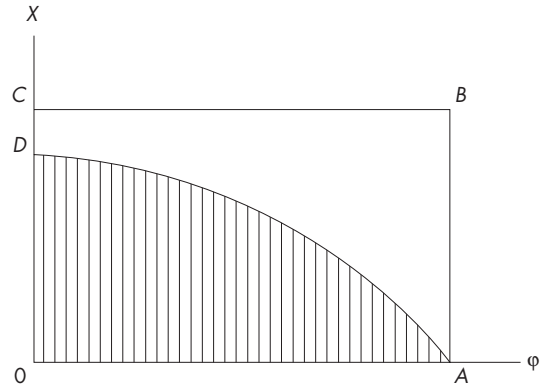


Figura 7

Si $l > d$ entonces la aguja puede cortar a más de una paralela y la expresión de la probabilidad se complica. Como vemos, es posible utilizar la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. Con poco bagaje matemático, es posible resolver el Problema de la Aguja que en su momento formuló Buffon.

Una extensión del Problema de la Aguja fue realizada por Laplace en los siguientes términos:

Supongamos ahora que en vez de tener un solo sistema de líneas paralelas, tenemos dos, uno ortogonal del otro, de tal manera que ambos sistemas recubren el plano con un conjunto de rectángulos congruentes. Supongamos que la distancia entre dos líneas rectas consecutivas de un sistema es a, la distancia entre dos líneas rectas consecutivas de otro sistema es b, sea l la longitud de la aguja y supongamos que $l < a$, $l < b$. Supongamos que la aguja forma un ángulo ϑ con la línea de longitud a.

Se requiere la probabilidad de que la aguja lanzada al aire corte el perímetro de alguno de tales rectángulos.

Para que la aguja corte a una línea, el punto medio de la aguja debe estar dentro del área

$$ab - (a - l\cdot\cos\vartheta)(b - l\cdot\operatorname{sen}\vartheta) =$$
$$= l(a\cdot\operatorname{sen}\vartheta + b\cdot\cos\vartheta) - l^2\cdot\operatorname{sen}\vartheta\cdot\cos\vartheta$$

luego la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{\int_0^{\pi/2}\left[l\left(a\cdot\operatorname{sen}\varphi + b\cdot\cos\varphi\right) - l^2\cdot\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\varphi\right]d\varphi}{\int_0^{\pi/2} ab\,d\varphi} = \frac{2l\left(a+b\right) - l^2}{\pi ab}$$

Si tenemos un solo conjunto de líneas paralelas, eso es equivalente a tomar b tendiendo a infinito:

$$\lim_{b\to\infty}\frac{2l\left(a+b\right) - l^2}{\pi ab} = \frac{2l}{\pi a}$$

que es la expresión del Problema de la aguja de Buffon.

Una clave importante de estos problemas geométricos reside en la expresión «elegido al azar». En el fondo, la elección al azar de los elementos del conjunto geométrico que se considera, es equivalente a dar la ley de probabilidad según la cual se suponen distribuidos.

A vueltas con las cuerdas, los hilos y las agujas

Seguidamente profundizaremos un poco más en los conceptos claves de la Probabilidad Geométrica, recordando curiosos resultados.

Una clave importante de estos problemas geométricos reside en la expresión «elegido al azar». En el fondo, la elección al azar de los elementos del conjunto geométrico que se considera, es equivalente a dar la ley de probabilidad según la cual se suponen distribuidos. Siendo este conjunto geométrico continuo, sus elementos no podrán ser propiamente contados, por lo que habrá que definir la «medida» del conjunto.

Ningún problema presenta alcanzar ese objetivo cuando se trata de conjuntos continuos limitados por puntos: la medida del conjunto la da entonces la longitud de la línea, si el conjunto es lineal, o el área de la superficie o el volumen del cuerpo. Pero cuando los elementos son rectas o planos, la noción de medida no es tan intuitiva como en el caso anterior, ya que el entrecruzamiento que resulta, no deja ver los límites del conjunto.

Si nos limitamos al caso de rectas en el plano, sabemos que la totalidad de las rectas de un plano tiene dos dimensiones. Para delimitar completamente un conjunto continuo de rectas, será preciso para cada dirección determinar dos posiciones límites, fuera de las cuales no haya recta alguna que pertenezca al conjunto. Estas rectas límites serán tangentes a una cierta línea que será cortada por todas las rectas del conjunto. El conjunto tipo que habrá que medir será, pues, el de las rectas que corten a una línea dada.

Si suponemos que esta línea es cerrada y convexa y representamos por h la distancia entre las dos tangentes límites paralelas a la dirección dada, h será la medida relativa de las secantes paralelas a esa dirección, y las de todas las secantes se obtendrá integrando y será igual a la longitud de la curva L, es decir:

$$\int_0^{\pi} h\, d\theta = I$$

O sea, se puede demostrar que:

Teorema 1

La medida de los conjuntos de rectas que cortan a un segmento es proporcional a la longitud de este segmento.

La idea anterior la podemos formalizar un poco y así la podemos encontrar en Kendall y Moran (1963) o en Crofton (1869):

Teorema 2

Dada una figura convexa C_2 de longitud L_2 contenida en una figura convexa C_1 de longitud L_1, entonces la probabilidad de que una cuerda aleatoria de C_1 corte a C_2 es L_2/L_1. Además esta probabilidad es independiente de la posición de C_2 relativa a C_1.

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que:

Teorema 3

Si suponemos que C_2 es un segmento rectilíneo de longitud l. La probabilidad de que una cuerda elegida al azar de C_1 corte al segmento es de $2l/L_1$.

La demostración de este teorema es inmediata, sin más que considerar el teorema anterior 2 y que un segmento de longitud l puede ser considerado como límite de una región convexa, como un rectángulo de anchura infinitesimal y largura l, por tanto, de perímetro convergente a $2l$.

El Problema de la Aguja de Buffon puede ser tratado a partir de los anteriores resultados como un caso particular. Así:

Corolario 1 (Problema de la aguja)

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la aguja es encerrada en un círculo C_1 de diámetro unidad cuyo centro es el punto medio de la aguja, este círculo cortará una paralela cuya intersección será una cuerda al azar del círculo, entonces la probabilidad de que esta cuerda corte a la aguja es $2l/\pi$.

¿Y si en vez de lanzar una aguja o un hilo, lanzamos una lámina delgada en forma de polígono convexo, de dimensiones lo suficientemente pequeñas como para que no pueda interceptar simultáneamente dos de las rectas paralelas trazadas en el suelo?

La demostración es inmediata a partir del teorema anterior 3.

Relacionado con lo anterior, el matemático francés Cauchy (1850), demostró el siguiente teorema:

Teorema 4

Dado un segmento rectilíneo de longitud l " 1 en el plano y su proyección sobre una línea en una dirección dando un ángulo ϑ con ella, o sea

$$Proy(\vartheta) = l \cdot |\cos\vartheta|$$

Entonces el valor medio de $Proy(\vartheta)$ es

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{2l}{\pi}$$

Basándonos en él, podemos extender el Problema de la Aguja de Buffon cambiando algo tan rígido como una aguja por un hilo o línea de longitud l, enroscada en una forma determinada:

Corolario 2 (Problema de la aguja)

Sobre un conjunto de líneas paralelas separadas una distancia de una unidad, esto se puede hacer sin perder generalidad, dejamos caer un hilo o línea de longitud l, entonces el número esperado de intersecciones es $2l/\pi$, independiente de la forma de la línea.

Mediante este método se puede medir la longitud de cualquier curva observada a través de un microscopio.

¿Y si en vez de lanzar una aguja o un hilo, lanzamos una lámina delgada en forma de polígono convexo, de dimensiones lo suficientemente pequeñas como para que no pueda interceptar simultáneamente dos de las rectas paralelas trazadas en el suelo? Se puede probar fácilmente el siguiente teorema:

Teorema 5

Supongamos un polígono convexo de perímetro L y de dimensiones lo suficientemente reducidas para que no rebase la distancia entre paralelas d. Entonces, la probabilidad de que el contorno del polígono intercepte una de las rectas paralelas es $L/\pi d$.

Luego, como hemos visto, el Problema de la Aguja da lugar a algunas reflexiones francamente curiosas, lancemos agujas, hilos o láminas poligonales convexas.

Pero hay más, unida a la Probabilidad Geométrica está la Geometría Integral, uno de cuyos exponentes máximos es el gran matemático español Luis Antonio Santaló Sors. Nacido en Gerona en 1911, se trasladó a Argentina por causa de la Guerra Civil y siguiendo el consejo de Rey Pastor. Fue en este país iberoamericano, donde desarrolló gran parte de su labor investigadora, recibiendo en nuestro país en 1983 el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica. Desgraciadamente no son muchas las ramas de la Matemática donde los españoles podamos «hacer patria». Una de ellas es la Geometría Integral, estrechamente unida a la Probabilidad Geométrica y al nombre de Santaló. La Geometría Integral consiste, esencialmente, en el uso de la teoría de la medida (o de la integración), para el estudio de propiedades geométricas de figuras en el espacio euclideo, principalmente conjuntos convexos.

Otra utilización didáctica del Problema de la Aguja tiene que ver con la estimación de π. Si utilizamos la frecuencia relativa de intersecciones como un estimador de la probabilidad, esto es, si la aguja es tirada n veces y en r de estas tiradas obtenemos al menos una intersección, podemos considerar que $\hat{p} = r/n$ es un estimador de p y es posible estimar π a través de lanzamientos de una aguja. Así lo hizo en el año 1850 el científico suizo Richard Wolf, quien obtuvo una estimación de π de 3,1596, valor que difiere del real en menos de 0,02, lanzando una aguja de longitud 36 mm la friolera de 5.000 veces obteniendo 2532 éxitos, con una distancia entre paralelas de 45 mm. Aunque si estos 5.000 lanzamientos marean, conviene recordar que Wolf hizo y recogió en papel, el resultado de mas de ¡¡¡250.000!!!, sí, ¡¡¡250.000!!! lanzamientos de dados, y lo que asombra más, sin que estudiosos posteriores de sus escritos hayan encontrado la razón última de tan extraordinario empeño. Seguro que hoy, en nuestras clases, con menos trabajo, y utilizando técnicas de Montecarlo podemos simular gran número de lanzamientos y encontrar estimaciones del número π.

Conclusiones

A modo de resumen final queremos decir que con este artículo hemos pretendido:

a) Utilizar la Geometría para motivar y afianzar las nociones básicas de la Probabilidad.

b) Utilizar la Historia de las Matemáticas como un recurso válido en nuestras clases diarias.

c) Dar a conocer a nuestros alumnos la figura de insignes matemáticos españoles, como es el caso del profesor Santaló.

Seguro que esta lista de reflexiones quedará aumentada con las que seguramente rondarán ahora por la cabeza de cada uno de nosotros.

La Geometría Integral consiste, esencialmente, en el uso de la teoría de la medida (o de la integración), para el estudio de propiedades geométricas de figuras en el espacio euclideo, principalmente conjuntos convexos.

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Estudios Empresariales.
Universidad de Cádiz.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

BERTRAND, J. (1907): *Calcul des Probabilités*, París.

BUFFON, G.L. (1777): «Essai d'Arithmétique Morale», dentro del cuarto volumen del *Supplément à l'Histoire Naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy*, París.

CAUCHY, A. (1850): «Mémoire sur la rectification des courbes et de la quadrature des surfaces courbes», *Memorias de la Academia de Ciencias de París*, n.° 22, 3-13.

CROFTON, M. W. (1869): «On the Theory of Local Probability, applied to Straight Lines drawn at random in a plane; the methods used being also extended to the proof of certain new Theorems in the Integral Calculus», *Philosophical Transactions*, n.° 158, 181-199.

GUTIERREZ CABRIA, S. (1992): *Filosofía de la Probabilidad*, Tirant Lo Blanch, Valencia.

KENDALL, M. G. y P. A. P. MORAN, (1963): *Geometrical Probability*, Charles Griffin and Company Limited, Londres.

RAMOS ROMERO, H. M. (1994): *Introducción al Cálculo de Probabilidades. Tomo I: Probabilidad y Variable aleatoria*, Copistería S. Rafael, Cádiz.

RUIZ GARZÓN, G. (1999): «La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica», *Suma*, n.° 32, 5-9.

VAN FRAASSEN, B.C. (1989): *Laws and Symmetry*, Oxford University Press, New York.

SUMA 37
junio 2001, pp. 75-82

Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul

Miguel Ángel Moreno Redondo

ARTÍCULOS

El objetivo de este artículo será el de facilitar a los alumnos la comprensión y memorización del tema de los espacios vectoriales mediante una bella analogía existente a nuestro alrededor. Para tal fin haremos uso de los colores y de la mezcla de sus pigmentos.
Aclararemos conceptos como el de combinación lineal de vectores (*mezcla de colores*), el de dependencia e independencia lineal, el de sistema *generador* (*conjunto de colores con los que se puede pintar un cuadro*), el de base (*en el cuadro* Guernica *de Picasso, la base estaría formado por el blanco y el negro*) y el de dimensión (*la dimensión del* Guernica *sería 2, la de* Las meninas *de Velázquez sería 3*)

ES JUSTO RECONOCER que el desencanto y la desesperación se apoderaron de nosotros cuando en época estudiantil, hicimos por primera vez una aproximación al tema de los espacios vectoriales, a sus definiciones con aparente significado estéril y a teoremas cuyas demostraciones exigen una técnica y un rigor matemático que en ese momento no teníamos asentado. Transcurridos unos años, nos convertimos en profesores y ayudados por la seguridad que proporciona el haber resuelto gran cantidad de problemas que tratan esta estructura algebraica, disfrutamos sin lugar a dudas de la elegante formalidad matemática con la que impartimos este tema. Hoy por hoy, haciendo uso del lugar privilegiado en el que nos encontramos (pues fuimos cocineros antes que frailes), no nos equivocaremos si decimos que el tema que nos ocupa exige enriquecer el proceso de enseñanza de los alumnos, y nuestra labor como docente no puede ser otra que la de intentar dar respuesta a las preguntas que formulamos a continuación:

¿Cómo ayudar al alumno a comprender y a memorizar tanta cantidad de información? ¿Hay alguna manera de facilitar esta tarea? ¿Qué posibles analogías con los espacios vectoriales existen a nuestro alrededor?

El objetivo del presente artículo será el de facilitar a los alumnos la comprensión y la memorización de conceptos y resultados de los espacios vectoriales mediante una analogía existente a nuestro alrededor. Para obtener tal fin haremos uso de los colores y de la mezcla de sus pigmentos.

Definiciones y teoremas

Antes de desarrollar con mayor profundidad este artículo convendría enunciar las definiciones y resultados sobre espacios vectoriales que trataremos posteriormente, sobre

todo, los referentes a combinación lineal, a sistemas linealmente dependientes, sistema generador, base, etc.

Por otra parte, no será necesario seguir leyendo el contenido de este apartado (pudiendo pasar directamente al epígrafe *Planteamiento*), si se encuentra en alguna de estas dos situaciones:

i. Los conceptos y resultados indicados anteriormente son de dominio del lector.

ii. Los conceptos y resultados son totalmente nuevos para el lector (más tarde, al finalizar de leer el artículo, podrá entenderlos con mayor facilidad).

Combinación lineal

Se dice que un vector v es combinación lineal de los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ del cuerpo K, tales que $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$.

Linealmente independientes

Se dice que los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ son linealmente independientes o bien que el sistema de vectores $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es libre si la igualdad $0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ sólo se satisface cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Linealmente dependientes

Se dice que los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ son linealmente dependientes si no son linealmente independientes.

Generador

Decimos que un sistema de vectores $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es un sistema generador del espacio vectorial E si todo vector v de E se puede escribir como combinación lineal de los vectores de S.

Base

Decimos que un sistema de vectores $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base del espacio vectorial E si los vectores de S son linealmente independientes y generadores de E.

Dimensión

Decimos que un espacio vectorial tiene dimensión n si n es el número de vectores de una cualquiera de sus bases.

Teorema

Sea S un sistema de vectores. Los vectores de S son linealmente dependientes si, y sólo si, existe un vector de S que es combinación lineal de los demás.

Utilizaremos el conjunto de los colores, para facilitar a los alumnos el aprendizaje de conceptos como combinación lineal, sistemas linealmente dependiente e independiente, sistema generador, base y dimensión de un espacio vectorial.

Planteamiento

Como sabemos, el amplio espectro de colores que nuestra retina puede llegar a recibir, varía desde el amarillo, el azul, el rosa, el violeta y decenas de colores y tonalidades distintas, que por raro que parezca, se pueden obtener a partir de los pigmentos de los tres colores primarios: amarillo, azul y rojo. A título de ejemplo sirva que el color verde se obtiene mezclando el amarillo y el azul, el naranja mezclando el rojo y el amarillo, etc. Por otra parte, si sólo utilizamos los colores blanco y negro, podremos obtener todas las tonalidades posibles de grises, además de las dos siguientes obviedades: el blanco lo podemos obtener a partir del blanco, y el negro a partir del negro.

Entendido el párrafo anterior no resulta difícil comprender, que al genial pintor sevillano Velázquez le habrían bastado los tres colores primarios para obtener todos los colores del cuadro *Las meninas* y que sin uno solo de ellos le habría sido totalmente imposible. Por otra parte, y como un ejercicio propuesto a la intuición, plantearemos la siguiente pregunta: ¿qué dos colores le habrían bastado a Picasso para pintar el *Guernica*?

Utilizaremos el conjunto de los colores, para facilitar a los alumnos el aprendizaje de conceptos como combinación lineal, sistemas linealmente dependiente e independiente, sistema generador, base y dimensión de un espacio vectorial.

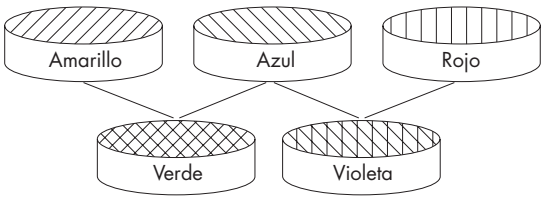


Figura 1. Los colores primarios amarillo, azul y rojo, nos proporcionan entre otros el verde y el violeta, tras la mezcla de sus pigmentos

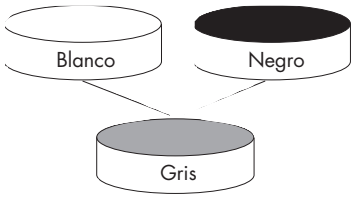


Figura 2. Los colores blanco y negro nos proporcionan una amplia gama de grises, entre ellos el gris claro (calificativo que alcanza al mezclarse en mayor proporción el blanco respecto al negro)

La interpretación que haremos será la de establecer una relación biunívoca entre los elementos vector y color, y la que resulta aún más interesante: la existente entre combinación lineal y mezcla de colores. Una vez establecidas estas identificaciones, volveremos a escribir en términos de colores los distintos enunciados que acostumbramos a utilizar. Por último, y sin lugar a dudas, principal atracción del artículo, veremos una lista de trece ejemplos que plasman la utilidad de este nuevo enfoque.

Analogías

A continuación presentamos el siguiente cuadro de equivalencias:

Terminología formal	*Terminología informal*
Espacio vectorial	Cuadro
E	Las meninas
V	El Guernica
Vector	Color
Vectores	Colores
Combinación lineal	Mezcla

Como podemos observar todo término de la columna de la izquierda tiene su respectivo término en la columna de la derecha, al que podríamos llamar además de término informal, término dual. Cada término dual gozará de total significado en la construcción de los enunciados que más tarde veremos. Sirvan como aperitivo las siguientes observaciones:

La interpretación que haremos será la de establecer una relación biunívoca entre los elementos vector y color, y la que resulta aún más interesante: la existente entre combinación lineal y mezcla de colores.

- Al igual que un vector forma parte de la estructura de espacio vectorial, un color formará parte del espectro de colores que baña cuanto nos rodea.
- No hay que sorprenderse tampoco de la analogía entre *E* y el cuadro de Velázquez *Las meninas* o entre *V* y el *Guernica*, pues al igual que la combinación lineal de las sucesivas potencias de *x* nos proporciona el conocido espacio vectorial de los polinomios, la mezcla de colores nos ofrece la maravillosa posibilidad de pintar *Las meninas*.
- Por último, sería conveniente recordar que mientras *Las meninas* fue pintado con una amplia gama de colores, Picasso utilizó en el *Guernica* el blanco, el negro y distintas tonalidades de grises.

Figura 3. *Las meninas*, cuadro pintado por D. Velázquez en 1656. Los colores que lo componen son el amarillo, el azul y el rojo, además de una amplia gama de colores

Dualidades

Cada enunciado de los que a continuación se presentan expresados de una manera formal en términos de espacios vectoriales, aparece con su respectivo enunciado expresado en términos de colores. Si bien el primero, a cualquier iniciado en el tema le resultará algo confuso, el segundo lo percibirá de una forma nítida y clara.

Teorema 1. Sistema linealmente dependiente

- Dado un sistema de vectores *S*, decimos que los vectores de *S* son *linealmente dependientes* si, y sólo si, existe un vector de *S*, que es combinación lineal de los demás.

- Dado un sistema de colores *S*, decimos que los colores de *S* son *linealmente dependientes* si, y sólo si, existe un color de *S* que es mezcla de los demás.

Teorema 2. Sistema linealmente independiente

- Sea *S* un sistema de vectores. Los vectores de *S* son *linealmente independientes* si, y sólo si, ningún vector de *S* es combinación lineal de los demás.
- Sea *S* un sistema de colores. Los colores de *S* son *linealmente independientes* si, y sólo si, ningún color de *S* es mezcla de los demás.

Definición. Sistema generador

- Decimos que *S* es un *sistema* de vectores *generador* del espacio vectorial *E* si todo vector de *E* es combinación lineal de los vectores de *S*.
- Decimos que *S* es un *sistema* de colores *generador* del cuadro *Las meninas* si todo color de *Las meninas* es mezcla de los colores de *S*.

Definición. Base

- Decimos que *S* es una *base* de vectores del espacio vectorial *E* si los vectores de *S* son linealmente independientes y generadores del espacio vectorial *E*.
- Decimos que *S* es una *base* de colores del cuadro *Las meninas* si los colores de *S* son linealmente independientes y generadores del cuadro *Las meninas*.

Definición. Dimensión

- Decimos que un espacio vectorial tiene *dimensión n* si *n* es el número de vectores de una cualquiera de sus bases.
- Decimos que un cuadro tiene *dimensión n* si *n* es el número de colores de una cualquiera de sus bases

No nos costaría imaginar, lo que podría llegar a ser la interpretación de combinación lineal. La expresión $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ con $\lambda_i \geq 0$ puede significar que los colores e_1, e_2, ..., e_n deben mezclarse en cantidades λ_1, λ_2, ..., λ_n respectivamente para obtener el color *v*. En particular, veamos cómo podemos obtener algunos colores:

- El verde se podría obtener mezclando 1 parte de amarillo y 1 parte de azul.
- El verde muy oscuro se podría obtener mezclando 1 parte de amarillo y 3 partes de azul.
- El gris claro se podría obtener mezclando 3 partes de blanco y 1 parte de negro.

Los colores blanco y negro son un sistema generador del cuadro Guernica, *ya que con esos dos colores se pueden obtener todas las tonalidades posibles de grises, blanco y negro para poder pintarlo.*

Ejemplos

A continuación señalaremos una serie de ejemplos que por una parte, gozarán de significado gramatical propio, y que por otra, sumergidos en el contexto de los espacios vectoriales, aclarará a los alumnos los conceptos matemáticos del apartado anterior.

Ejemplo 1

Los colores blanco y negro son un sistema generador del cuadro *Guernica*, ya que con esos dos colores se pueden obtener todas las tonalidades posibles de grises, blanco y negro para poder pintarlo.

Ejemplo 2

Los colores blanco y negro son independientes, ya que el blanco no se puede obtener a partir del negro y viceversa (teorema 2).

Ejemplo 3

Los colores blanco y negro son base de los colores que se utilizan para pintar el *Guernica*, pues cualquier color del cuadro se puede obtener como mezcla del blanco y el negro (colores generadores) y además, ninguno de ellos dos se puede obtener a partir del otro (teorema 2, independencia). Por tanto: ni faltan, ni sobran.

Ejemplo 4

El amarillo y el azul son colores linealmente independientes, pues ni el amarillo se puede obtener a partir del azul, ni el azul a partir del amarillo.

Ejemplo 5

El amarillo, el azul y el verde no son colores linealmente independientes, pues el verde se obtiene mezclando el amarillo y el azul (el verde es combinación lineal del amarillo y el azul).

Ejemplo 6

El amarillo, el azul y el rojo son linealmente independientes pues ninguno de ellos se puede obtener a partir de los demás.

Figura 4. Guernica, cuadro pintado por P. Picasso en 1937. Los colores que lo componen son el blanco, el negro y distintas tonalidades de grises

Ejemplo 7

El amarillo, el azul, el rojo y el verde es un sistema linealmente dependiente pues, en particular, el verde se puede obtener a partir del verde o bien del amarillo y el azul (como vemos, no hay unicidad de coordenadas).

Ejemplo 8

El amarillo, el azul y el rojo (colores primarios), forman un sistema generador de los colores del cuadro *Las meninas*, pues cualquier color se puede obtener mezclando debidamente estos tres (combinación lineal).

Ejemplo 9

El amarillo y el azul no forman un sistema generador de los colores del cuadro *Las meninas*, pues en particular el rojo, no se puede obtener mezclando estos dos.

Ejemplo 10

El amarillo, el azul, el rojo y el verde forman un sistema generador de los colores del cuadro *Las meninas*, pues cualquier color se puede obtener mezclando debidamente estos cuatro y en particular los tres primeros (combinación lineal).

Ejemplo 11

El amarillo, el azul y el rojo forman una base de los colores del cuadro *Las meninas*, ya que son linealmente independientes y además generadores (ejemplos 6 y 8).

El cuadro
Las meninas
tiene dimensión 3, ya que 3 es el número de colores de la base formada por los colores amarillo, azul y rojo

El cuadro
Guernica
tiene dimensión 2, ya que 2 son los colores de la base formada por los colores blanco y negro

Ejemplo 12

El cuadro *Las meninas* tiene dimensión 3, ya que 3 es el número de colores de la base formada por los colores amarillo, azul y rojo (ejemplo 11).

Ejemplo 13

El cuadro *Guernica* tiene dimensión 2, ya que 2 son los colores de la base formada por los colores blanco y negro (ejemplo 3).

Justificaciones epistemológicas

Entre las dificultades epistemológicas que los alumnos encuentran a la hora de enfrentarse al aprendizaje de los espacios vectoriales, podríamos destacar las siguientes:

i. En primer lugar el alumno ha de ser receptor de un mar de nuevas definiciones sin aparente significado, de proposiciones o teoremas incomprensibles, y de conjuntos que en su vida ha oído nombrar.

ii. En segundo lugar, sabemos que hasta este preciso momento, todo lo enseñado tiene en mayor o menor medida, un nexo con la vida cotidiana, un ejemplito que por pequeño que parezca, deja en evidencia la utilidad de ese tema matemático impartido. Por desgracia, los ejemplos útiles sobre espacios vectoriales como sistemas de ecuaciones, aplicaciones al espacio afín y euclídeo, etc., no aparecen hasta haber avanzado considerablemente en la asignatura, sufriendo el riesgo de perder totalmente el interés y la dedicación del alumnado.

iii. En tercero y último, cabe citar el carácter formal y deductivo, que forzosamente se hace necesario si

queremos estudiar los espacios vectoriales a fondo y no simplemente sus útiles propiedades. Pero, ¿significa esto que es necesario renunciar a la cita tomada de Kant que promulga que todo conocimiento humano comienza por intuiciones, pasa por los conceptos y termina en las ideas? (Boyer, 1986).

Éstas, y otras que probablemente bailarán en nuestro subconsciente, se erigen como motivos suficientes para adoptar o al menos tener en cuenta la presente propuesta metodológica en la articulación del proceso de enseñanza.

Por otra parte, no se pretende que esta forma de interpretar los espacios vectoriales se haga al pie de la letra: jamás podríamos establecer una dualidad válida entre éstos y los colores de una forma totalmente matemática. El artículo sólo busca atravesar el primer umbral didácticamente hablando, es decir, facilitar la comprensión y memorización de los conceptos matemáticos relativos al tema.

Justificación curricular

En nuestro actual sistema educativo, la explicación con profundidad de los espacios vectoriales, sólo tiene cabida en las licenciaturas de ciencias y en los primeros cursos de las carreras técnicas, siendo excluida de la asignatura de Matemáticas en las modalidades de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología, desapareciendo por tanto todo planteamiento formal en beneficio de su instrumentalidad y aplicabilidad. Pero según Brihuega (1997) «la adquisición de los conocimientos matemáticos en esta etapa no puede reducirse a la posesión de sus resultados finales, también debe estar siempre presente el saber hacer matemáticas que va a permitir su aplicabilidad en las distintas situaciones a las que los estudiantes de Bachillerato se tendrán que enfrentar en su futuro profesional». Si estamos de acuerdo con este autor no podemos quedarnos impasibles, en caso de que la desaparición del currículo de esta formalidad matemática haya sido debida a una incorrecta o incompleta práctica pedagógica, buscando incansablemente nuevas líneas metodológicas que enriquezcan el proceso de enseñanza.

En definitiva, este artículo persigue facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje bien sea en el ámbito universitario como en un hipotético resurgimiento en la educación secundaria de los espacios vectoriales.

Justificación metodológica

En el preciso instante en el que enseñamos a los alumnos el tema de los espacios vectoriales, éstos han alcanzado según Inhelder y Piaget (1955), la madurez en el estadio de las operaciones formales. Pero al alumno, a pesar de ser dueño de las enormes posibilidades que ofrece este nivel cognitivo, se le hace sumamente difícil incorporar a su esquema mental los conceptos y resultados de este tema, exigiendo por tanto de los docentes una solución a este problema.

…al alumno se le hace sumamente difícil incorporar a su esquema mental los conceptos y resultados de este tema, exigiendo por tanto de los docentes una solución a este problema.

La analogía que establecemos en este artículo, servirá de puente para facilitar a los alumnos el estudio de este tema. Ésta deberá apoyarse necesariamente en una serie de conocimientos previos como son los colores y la mezcla de sus pigmentos, y de esta forma, la enseñanza de los espacios vectoriales deja de ser un salto al vacío, para convertirse en un aprendizaje significativo. El camino que se propone seguir podría ser el siguiente:

i. Enseñar definiciones y resultados elementales sobre espacios vectoriales.

ii. Si la enseñanza ha derivado en aprendizaje (mi experiencia me inclina a pensar que nunca ocurre en una primera instancia), hemos concluido con éxito.

iii. Evaluar los conocimientos previos que el alumno posee en cuanto a colores, mezcla de sus pigmentos, etc. Si la evaluación es negativa, recordárselos en breves minutos.

iv. Explicar la analogía (5 minutos).

v. Hacer uso de los ejemplos (10 minutos).

El tiempo que se invierte en desarrollar los puntos *iii*, *iv* y *v* con los alumnos, tiene sobrada justificación si se tiene en cuenta que no más de quince minutos bastan para fijar los pilares de este tema.

Observaciones pedagógicas

La experiencia en clase y unas encuestas evaluadoras de este proceso de enseñanza-aprendizaje efectuadas a alumnos de COU y de la carrera de Ingeniería Industrial, permitieron llegar a las siguientes conclusiones:

- Ayudados por una parte de la enorme intuición que poseen los alum-

nos, y por otra, de la enorme curiosidad que despiertan temas tan dispares entre sí como los espacios vectoriales y los colores, resulta gratificante ver como en segundos establecen el paralelismo entre ambas ideas. Sobre todo, cuando un mundo nuevo escrito en términos matemáticos, cambia su fisonomía, se viste de color y algo tan abstracto como la definición de base de un espacio vectorial, se reduce simplemente a responder a la pregunta: ¿Cuántos colores necesitamos, sin que sobre alguno, para pintar un cuadro?

- Resulta innecesario, aunque sí conveniente, explicar a los alumnos el conjunto de dualidades del epígrafe *Dualidades*, para llegar a comprender los ejemplos.
- La motivación vuelve a aflorar en el alumnado cuando logran superar los momentos de incertidumbre o confusión, usando esta forma de enfocar los espacios vectoriales.
- Los alumnos utilizan los ejemplos como un apoyo para el entendimiento de los distintos conceptos matemáticos, y en ningún caso esta técnica les aleja de la rigurosidad matemática que el tema exige.
- Parece pertinente que este enfoque se transmita una vez explicadas todas las definiciones y teoremas en términos matemáticos, pues en caso contrario y sólo a corto plazo, corremos el riesgo de que los alumnos reduzcan el conjunto de los distintos espacios vectoriales, reduciéndolos a conjuntos visibles o tangibles (curioso ¿verdad?: lo visible o tangible es irreal, y lo invisible o intangible real).
- La utilización de esta línea metodológica, resulta aconsejable sobre todo en aquellos alumnos con dificultades para la abstracción y la memorización de conceptos.

Miguel Ángel Moreno
IES Virgen de Soterraño.
Barcarrota (Badajoz).
Sociedad Extremeña de
Educación Matemática
«Ventura Reyes Prósper»

Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

BRIHUEGA, J. (1997): «Las matemáticas en el Bachillerato», *Suma*, n.° 25, 113-122.

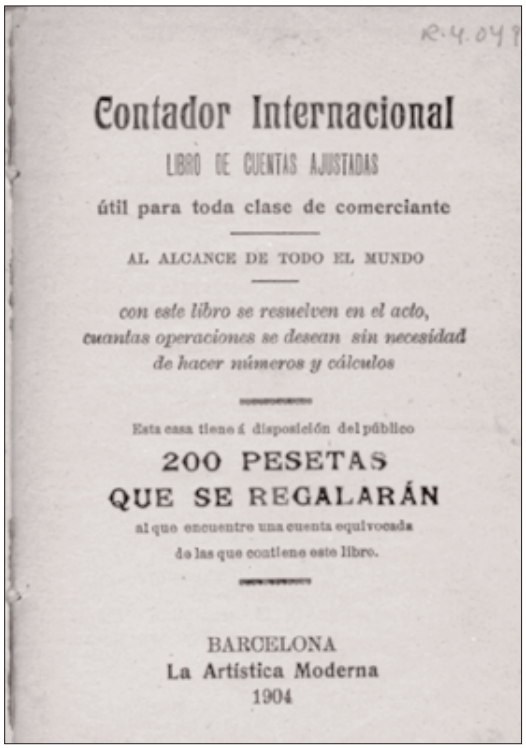
GARCÍA, J. y M. LÓPEZ (1992): *Álgebra lineal y geometría*, Marfil, Alcoy.

GASCÓN, J. (1997): «Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad», *Suma*, n.° 26, 11-21.

INHELDER, B. y J. PIAGET (1955): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Paidós, Buenos Aires

KLINE, M. (1973): *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo veintiuno, Madrid.

TRIANES, M. y J. GALLARDO (1998): *Psicología de la educación y del desarrollo*, Pirámide, Madrid.


R-4.047

Contador Internacional

LIBRO DE CUENTAS AJUSTADAS

útil para toda clase de comerciante

AL ALCANCE DE TODO EL MUNDO

con este libro se resuelven en el acto, cuantas operaciones se desean sin necesidad de hacer números y cálculos

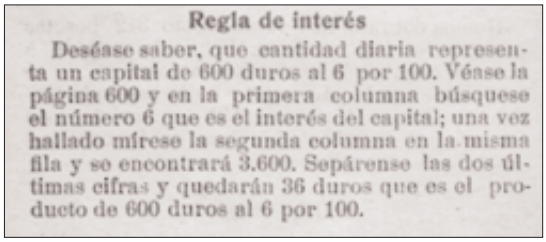
Esta casa tiene á disposición del público

200 PESETAS

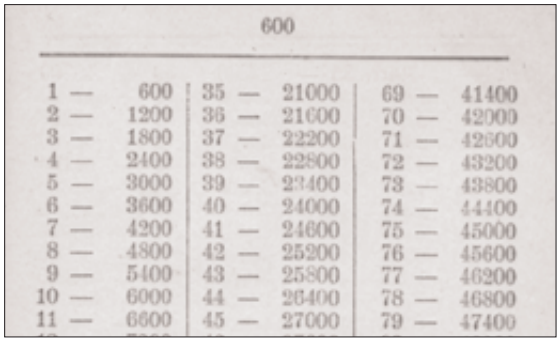
QUE SE REGALARÁN

al que encuentre una cuenta equivocada de las que contiene este libro.

BARCELONA
La Artística Moderna
1904

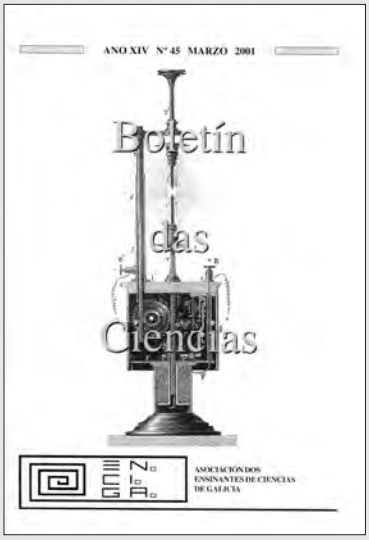

Regla de interés

Deséase saber, que cantidad diaria representa un capital de 600 duros al 6 por 100. Véase la página 600 y en la primera columna búsquese el número 6 que es el interés del capital; una vez hallado mírese la segunda columna en la misma fila y se encontrará 3.600. Sepárense las dos últimas cifras y quedarán 36 duros que es el producto de 600 duros al 6 por 100.


600

1 — 600	35 — 21000	69 — 41400
2 — 1200	36 — 21600	70 — 42000
3 — 1800	37 — 22200	71 — 42600
4 — 2400	38 — 22800	72 — 43200
5 — 3000	39 — 23400	73 — 43800
6 — 3600	40 — 24000	74 — 44400
7 — 4200	41 — 24600	75 — 45000
8 — 4800	42 — 25200	76 — 45600
9 — 5400	43 — 25800	77 — 46200
10 — 6000	44 — 26400	78 — 46800
11 — 6600	45 — 27000	79 — 47400

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES



SUMA 37
junio 2001, pp. 83-94

Algunas dificultades en los problemas aditivos

Alicia Bruno
Antonio Martinón
Fidela Velázquez

En este artículo se presentan los resultados de una investigación sobre problemas de suma y resta con números positivos en la que se han considerado cuatro clases de problemas: cambio, igualación, comparación y cambio-comparación, siendo estudiada esta última clase por primera vez en este trabajo. La dificultad que tienen los alumnos para resolver los problemas está relacionada con las formas de expresar la diferencia (en los problemas de comparación e igualación) y la variación (en los problemas de cambio y de cambio-comparación), así como con el orden en el que figuran los datos en los enunciados. Esto permite pensar que la expresión utilizada para la diferencia y la variación, y también el orden de los datos, resulta relevante en la comprensión del enunciado del problema, lo que motiva que tenga tan clara influencia en su nivel de dificultad.

ARTÍCULOS

LOS PROBLEMAS aditivos simples de enunciado verbal, que son los de suma y resta que se resuelven con $x + y = z$ o $x - y = z$, han sido intensivamente estudiados. En las panorámicas sobre investigaciones de Fuson (1992) y Verschaffel y De Corte (1996) se puede encontrar una amplia bibliografía.

La experiencia y, desde luego, los resultados de las investigaciones nos dicen que cada estudiante tiene éxito distinto en problemas diferentes y que estudiantes distintos tienen éxito diferente en cada problema. Para analizar y explicar estas diferencias se han considerado algunas características de las situaciones problemáticas, lo que ha dado lugar a varias clasificaciones en las que se contemplan diferentes clases de problemas. Son bien conocidas las clases de los problemas de combinación, cambio, comparación e igualación (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983). En este trabajo estamos interesados en ciertos aspectos de los problemas que pensamos tienen influencia en su dificultad. De cara a ilustrar esos aspectos consideremos los tres enunciados siguientes:

(1) Antes Andrés tenía 2 pesetas. Después ganó 3 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

(2) Antes Andrés tenía 2 pesetas. Ahora tiene 3 pesetas más que antes. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

(3) Antes Andrés tenía 2 pesetas. Antes tenía 3 pesetas menos que ahora. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?

Los tres problemas se corresponden con una misma situación: antes tenía 2, aumenta lo que tiene en 3 y ahora tiene 5; se diferencian en el modo de expresar lo que aumenta. Pues bien, esa expresión tiene gran importancia en el porcentaje de éxito que hemos obtenido en nuestra investigación: 94% en (1), 93% en (2) y 37% en (3). Ahora nos referimos de manera sucinta a los aspectos de los problemas que pensamos pueden explicar sus diferencias en el éxito.

En ciertas situaciones numéricas nos encontramos con dos *estados* que se comparan: un *estado menor a* («Juan tiene 2 pesetas») y un *estado mayor b* («Pedro tiene 5 pesetas»). Usaremos el *esquema* $a + d = b$, siendo d la *diferencia*. Hay dos formas básicas de expresar la diferencia. En los problemas de *comparación* la diferencia se expresa por medio de «más que» («Pedro tiene 3 pesetas más que Juan») o de «menos que» («Juan tiene 3 pesetas menos que Pedro»). En los problemas de *igualación* se dice cuánto debe aumentar el estado menor para igualar al mayor («Si Juan gana 3 pesetas tendrá lo mismo que Pedro») o lo que debe disminuir el mayor para igualar al menor («Si Pedro pierde 3 pesetas tendrá lo mismo que Juan»).

En otras situaciones tenemos un *estado inicial i* («Antes Juan tenía 2 pesetas»), una *variación v* («luego ganó 3 pesetas») y un *estado final f* («ahora Juan tiene 2 pesetas»). Estos problemas tienen un *esquema* $i + v = f$. Hay dos tipos de expresión de la variación. En los problemas de *cambio* la variación se expresa de manera *simple* («Juan ha ganado 2 pesetas» o «Juan ha perdido 2 pesetas»). En los problemas de *cambio-comparación* se expresa la variación con «más que» o «menos que», de forma similar a los problemas de comparación («Ahora Juan tiene 3 pesetas más que antes»). No conocemos ninguna investigación que se refiera a esta última clase de problemas.

Resumimos en la tabla 1 las anteriores cuatro clases de problemas, que son las que hemos considerado en la investigación que aquí se presenta. La anterior distinción entre esquema y expresión no es habitual. Sería más coherente con esa distinción el uso de una terminología como variación-cambio, variación-comparación, diferencia-cambio y diferencia-comparación, pero, para facilitar su lectura, hemos optado por adaptarnos a la terminología más usual en las publicaciones sobre este tema.

Nuestra investigación se realizó con alumnos de edades entre 8 y 12 años, en tercero, cuarto, quinto y sexto de Educación Primaria en España y consistió en analizar los niveles de dificultad de los problemas de las cuatro clases mencionadas, en particular en relación con las formas de expresión de la variación y la diferencia. Fuson y Willis (1986) ya observaron que los problemas de comparación son, en general, más difíciles que los de igualación; es decir, la expresión de la diferencia tiene influencia en la dificultad. En esta investigación probamos, además, que la expresión de la variación, en los problemas de cambio y en los de cambio-comparación, es relevante. Varias investigaciones han probado la importancia de otras expresiones en los enunciados de los problemas (De Corte y Verschaffel, 1991; Teubal y Nesher, 1991).

Nuestra investigación se realizó con alumnos de edades entre 8 y 12 años, en tercero, cuarto, quinto y sexto de Educación Primaria en España y consistió en analizar los niveles de dificultad de los problemas de las cuatro clases mencionadas…

Hemos evaluado los resultados de nuestra investigación de acuerdo con ciertas características que consideramos decisivas y que están relacionadas con la expresión de la diferencia y la variación, las cuales podemos resumir así (se detallan más adelante): *I* (el uso de un «lenguaje inconsistente») y *R* (el referente es la incógnita). La combinación de estas dos características (*IR*) puede aparecer en una forma fuerte (*f*) o débil (*d*), según cuál sea el orden de los datos en el enunciado. Los problemas con la característica *IR*(*f*) son los que tienen más bajo porcentaje de aciertos en las clases cambio-comparación y comparación. La clase de los problemas de cambio-comparación tiene, por tanto, elementos distintivos que la hacen diferente de la clase de cambio y, desde luego, de las de comparación e igualación.

Los porcentajes de éxito que los alumnos logran en los problemas propuestos nos llevan a afirmar que la forma de expresar la variación y la diferencia, así

Expresión	*Esquema: i + v = f*	*Esquema: a + d = b*
Simple	Cambio	Igualación
	Antes Juan tenía 4 pta. Luego ganó 3 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?	Juan tiene 4 pta. Si gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que Pedro. ¿Cuántas pta tiene Pedro?
Más/Menos	Cambio-comparación	Comparación
	Antes Juan tenía 4 pta. Ahora tiene 3 pta más que antes. ¿Cuántas pta tiene ahora?	Juan tiene 4 pta Pedro tiene 5 pta más que Juan. ¿Cuántas pta tiene Pedro?

Tabla 1. Las cuatro clases de problemas analizadas en la investigación

como el orden de los datos, es decisiva en el nivel de éxito. Nuestra explicación es la siguiente: ciertas formas de expresar la variación y la diferencia, así como el orden en el que se presenten los datos, hacen que resulte más difícil al alumno la comprensión del enunciado del problema e imaginar la situación numérica a la que se refiere, lo que le impide tener éxito en su resolución. Es decir, nuestra explicación se basa en que (en estos problemas simples aditivos con números positivos) el nivel de éxito está directamente relacionado con la comprensión del enunciado.

Hacemos tres últimas observaciones. La primera: los problemas de combinación (la adición de dos estados parciales es el estado total) no se consideran en este estudio, como tampoco otras muchas que se han descrito en la literatura (Bruno y Martinón, 1996, 1997). La segunda: hay muchos contextos en los que es posible encontrar problemas aditivos (temperatura, cronología, longitud, etc.), pero en esta investigación, sin embargo, hemos preferido que todos los problemas sean del contexto «tener dinero» («Juan tiene 2 pesetas», «Juan ha ganado 2 pesetas», etc.), para fijar esa variable y, también, porque el ámbito monetario resulta familiar a los alumnos. La tercera: de cara a simplificar la escritura, escribiremos «pta» en lugar de «pesetas», mientras que las letras J, P, E, T significan nombres de personas.

Tipos de problemas y características relevantes

En esta sección introducimos la terminología que usamos, describimos con algún detalle los tipos de problemas propuestos a los alumnos y precisamos sus características más relevantes.

Antes de hablar de problemas aditivos preferimos referirnos a situaciones o historias aditivas simples (Rudnisky, Etheredge, Freeman y Gilbert, 1995), que son aquellas en las que se describe una situación en la que interviene una suma o resta de dos números. Las que hemos considerado en nuestra investigación son de números positivos, es decir en las que aparece una suma $x + y = z$ o una resta $x - y = z$, siendo x, y, z positivos. Consideramos cuatro clases de historias aditivas y, por tanto, cuatro clases de problemas aditivos: comparación, igualación, cambio y cambio-comparación. Se describen en los siguientes párrafos. Asociados a cada historia o situación aditiva encontramos tres problemas, según cuál sea la incógnita. La historia «J tiene 2 pta y P tiene 5 pta, luego P tiene 3 pta más que J», da lugar a los siguientes tres problemas:

- J tiene 2 pta y P tiene 5 pta. ¿Cuántas pta más tiene P que J?
- J tiene 2 pta y P tiene 3 pta más que J. ¿Cuántas pta tiene P?
- P tiene 3 pta más que J. P tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene J?

Es bien conocido que dos problemas correspondientes a una misma historia pero con incógnitas distintas poseen porcentajes de éxito diferentes (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983), lo que en nuestra investigación se confirma.

Consideramos cuatro clases de historias aditivas y, por tanto, cuatro clases de problemas aditivos: comparación, igualación, cambio y cambio-comparación.

Es bien conocido que dos problemas correspondientes a una misma historia pero con incógnitas distintas poseen porcentajes de éxito diferentes

Comparación (Co)

Consideremos los estados a («J tiene 2 pta») y b («P tiene 5 pta»). Ambos se relacionan mediante la *diferencia* $d = b - a$ («P tiene 3 pta más que J»). Diremos que este tipo de historias tiene el *esquema* $a + d = b$, donde, para evitar confusiones, tomaremos siempre $d > 0$; es decir, a es el *estado menor* y b es el *estado mayor* ($a < b$). Diremos que una historia aditiva (y sus problemas asociados) es de *comparación* si su esquema es $a + d = b$ y la diferencia d se expresa de alguna de las siguientes maneras:

- *Más:* cuando se dice cuánto el estado mayor es «más que» el menor.
- *Menos:* cuando se dice cuánto el estado menor es «menos que» el mayor.

Ejemplo: «J tiene 2 pta y P tiene 5 pta»; la comparación puede expresarse de las siguientes maneras: «P tiene 3 pta más que J» (Más) y «J tiene 3 pta menos que P» (*Menos*). Hay tres problemas, según cuál sea la incógnita: a (*estado menor*), d (*diferencia*) o b (*estado mayor*). Así, «J tiene 3 pta menos que P. P tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene J?» es uno de esos tres problemas.

Igualación (Ig)

En las historias con esquema $a + d = b$ la diferencia d también puede expresarse de las siguientes formas:

- *Añadir*: cuando se dice lo que se ha de añadir al estado menor para igualar al mayor.

- *Quitar:* cuando se dice lo que se ha de quitar al estado mayor para igualar al menor.

Ejemplo: «J tiene 2 pta y P tiene 5 pta». Luego, «Si J gana 3 pta, entonces tiene lo mismo que P» (*Añadir*) y «Si P pierde 3 pta, entonces tiene lo mismo que J» (*Quitar*). Las historias de este tipo se llaman de *igualación*. También en este caso hay tres problemas asociados a una historia. En el ejemplo «Si P gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que R. R tiene 6 pta. ¿Cuántas pta tiene P?» la incógnita es el estado menor.

Cambio (Cb)

Ahora consideramos un *estado inicial i* («esta mañana J tenía 2 pta») que sufre una *variación v* («J ha ganado 3 pta») y se obtiene un *estado final f* («J tiene ahora 5 pta»), de modo que $v = f - i$. Diremos que este tipo de historias tiene esquema $i + v = f$. Si la variación se expresa de forma simple («J ha ganado», «J ha perdido»), entonces diremos que es una historia de *cambio* (*Cb*). Consideremos el siguiente ejemplo: «Por la mañana J tenía 2 pta y por la noche tenía 5 pta». Entonces decimos «J ha ganado 3 pta a lo largo del día» (*Simple*). Según cuál sea el signo de *v* hablaremos de *cambio creciente* (*CbC*) si $v > 0$ («J ha ganado 3 pta») o de *cambio decreciente* (*CbD*) si $v < 0$ («J ha perdido 3 pta»). En los problemas de esta clase la incógnita puede ser *i* (*estado inicial*), *v* (*variación*) o *f* (*estado final*). En el ejemplo «Antes J tenía 5 pta y ahora tiene 2 pta. ¿Cuántas pta ha perdido?» la incógnita es la variación *v*.

Cambio-Comparación (CbCo)

Una historia de *cambio-comparación* (*CbCo*) es una situación aditiva con esquema $i + v = f$ en la que la variación *v* se describe usando las palabras «más que» o «menos que», expresiones utilizadas para la diferencia en las historias de *comparación*. Ejemplo: «Por la noche J tiene 3 pta más de lo que tenía por la mañana» (*Más*) y «Por la mañana J tenía 3 pta menos de lo que tenía por la noche» (*Menos*). Los tres problemas asociados a cada historia se determinan según cuál sea la incógnita (estado inicial, variación, estado final). Así, «J tiene por la mañana 2 pta. Por la noche tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene más por la noche que por la mañana?». En esta clase también se distinguen las historias de *Cambio creciente-Comparación* (*CbCCo*) y *Cambio decreciente-Comparación* (*CbDCo*).

Orden de presentación de los números en el enunciado

En los problemas con esquema $x + y = z$, los datos en el enunciado pueden presentarse siguiendo el orden *x*, *y*, *z* (*x*, *y*; *x*, *z*; *y*, *z*) o el orden opuesto (*y*, *x*; *z*, *x*; *z*, *y*). Hemos identificado los problemas con orden opuesto marcándolos con *. Por ejemplo, los siguientes problemas tienen diferentes orden en los datos:

- Antes P tenía 6 pta y ahora tiene 4 pta. ¿Cuántas pta más de lo que tiene ahora tenía antes?
- (*) P tiene ahora 4 pta y antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta más de lo que tiene ahora tenía antes?

Cada problema será clasificado conforme a las siguientes categorías: Tipo de historia, Tipo de expresión, Incógnita y Orden de los datos.

Tipos de problemas

Cada problema será clasificado conforme a las siguientes categorías:

- Tipo de historia: comparación (*Co*), igualación (*Ig*), cambio creciente (*CbC*), cambio decreciente (*CbD*), cambio creciente-comparación (*CbCCo*), cambio decreciente-comparación (*CbDCo*).
- Tipo de expresión: variación simple (Simple), comparación más (Más), comparación menos (Menos), igualar añadir (Añadir), igualar quitar (Quitar).
- Incógnita: estado inicial (Inic), variación (Var), estado final (Final), estado menor (Menor), diferencia (Dif), estado mayor (Mayor).
- Orden de los datos: orden del esquema, orden opuesto (*).

Por ejemplo, la historia de cambio creciente simple (*CbC-Simple*) «Antes J tenía 2 pta; ahora tiene 5 pta; luego ha ganado 3 pta», da lugar a los siguientes tres problemas:

- *CbC-Simple-Inic*. Después de ganar 3 pta, ahora J tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- *CbC-Simple-Var*. Antes J tenía 2 pta y ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta ganó J?
- *CbC-Simple-Fin*. Antes A tenía 4 pta. Después ganó 3 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Tipos de problemas en la investigación

Los enunciados de los 39 problemas que hemos considerado en nuestra

investigación se recogen en el apéndice y la terminología usada figura en la tabla 2. De los 39 problemas, 9 son de cambio, 6 de igualación, 6 de comparación y 18 de cambio-comparación. A continuación analizamos algunas características relevantes de los problemas.

Característica I*: lenguaje inconsistente*

En las publicaciones sobre problemas, se suele decir que un problema tiene *lenguaje inconsistente* (*I*) cuando las «palabras clave» usadas en el enunciado sugieren un cálculo diferente del que realmente debe hacerse. Por ejemplo, en el problema:

- *Co-Menos-Mayor*. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que E. ¿Cuántas pta tiene E?

se debe sumar 2 + 5, pero la expresión «menos que» puede llevar a ciertos alumnos a restar. De modo similar, en el problema

- *CbC-Simple-Inic*. Después de ganar 3 pta, ahora J tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?

debemos restar 5 – 3, aunque el término «ganado» puede sugerir una suma. Es decir, diremos que un problema es de lenguaje inconsistente cuando se debe sumar y aparecen expresiones como «menos que» o «perder», o si se debe restar y se usan expresiones como «más que» o «ganar». En la tabla 3 se indican con *I* los problemas de nuestra investigación que tienen lenguaje inconsistente.

…un problema tiene lenguaje inconsistente (I) cuando las «palabras clave» usadas en el enunciado sugieren un cálculo diferente del que realmente debe hacerse.

	CbC-Inic	*CbC-Var*	*CbC-Fin*
Simple	I	I	
	CbD-Inic	*CbD-Var*	*CbD-Fin*
Simple	I		
Simple*	I		
	CbCCo-Inic	*CbCCo-Var*	*CbCCo-Fin*
Más	IR(d)	I	
Menos			IR(f)
	CbDCo-Inic	*CbDCo-Var*	*CbDCo-Fin*
Más		I	IR(f)
Más*		I	IR(d)
Menos	IR(d)		
Menos*	IR(f)		
	Ig-Menor	*Ig-Dif*	*Ig-Mayor*
Añadir	I	I	R
Quitar	R		I
	Co-Menor	*Co-Dif*	*Co-Mayor*
Más	IR(d)	I	
Menos			IR(f)

Tabla 3. Características de los problemas

Cambio (Cb)			***Igualación (Ig)***	
Cb Creciente (CbC)	***Cb Decreciente (CbD)***			
CbC-Simple	***CbD-Simple***	***CbD-Simple****	***Ig-Añadir***	***Ig-Quitar***
CbC-Simple-Inic	CbD-Simple-Inic	CbD-Simple*-Inic	Ig-Añadir-Menor	Ig-Quitar-Menor
CbC-Simple-Var	CbD-Simple-Var	CbD-Simple*-Var	Ig-Añadir-Dif	Ig-Quitar-Dif
CbC-Simple-Fin	CbD-Simple-Fin	CbD-Simple*-Fin	Ig-Añadir-Mayor	Ig-Quitar-Mayor
Cambio-Comparación (CbCo)			***Comparación (Co)***	
Cb Creciente (CbCCo)	***Cb Decreciente (CbDCo)***			
CbCCo-Más	***CbDCo-Más***	***CbDCo-Más****	***Co-Más***	
CbCCo-Más-Inic	CbDCo-Más-Inic	CbDCo-Más*-Inic	Co-Más-Menor	
CbCCo-Más-Var	CbDCo-Más-Var	CbDCo-Más*-Var	Co-Más-Dif	
CbCCo-Más-Fin	CbDCo-Más-Fin	CbDCo-Más*-Fin	Co-Más-Mayor	
CbCCo-Menos	***CbDCo-Menos***	***CbDCo-Menos****	***Co-Menos***	
CbCCo-Menos-Inic	*CbDCo-Menos-Inic*	*CbDCo-Menos*-Inic*	*Co-Menos-Menor*	
CbCCo-Menos-Var	CbDCo-Menos-Var	CbDCo-Menos*-Var	Co-Menos-Dif	
CbCCo-Menos-Fin	CbDCo-Menos-Fin	CbDCo-Menos*-Fin	Co-Menos-Mayor	

Tabla 2. Tipos de problemas considerados en la investigación

Característica R*: el referente es la incógnita*

En los problemas de comparación la relación entre los dos estados se expresa tomando uno de ellos como *referente*. Por ejemplo, en el problema:

- *Co-Más-Mayor*. T tiene 2 pta. M tiene 5 pta más que T. ¿Cuántas pta tiene M?

el referente es lo que tiene T. Si la comparación se expresa con «menos», como en el problema:

- *Co-Menos-Mayor*. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que M. ¿Cuántas pta tiene M?

el referente es ahora lo que tiene M, que coincide con la incógnita. En los problemas de cambio-comparación también hay un referente. En el problema:

- *CbCCo-Menos-Fin*. Antes A tenía 3 pta. Antes tenía 5 pta menos que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?

el referente es el número de pta que tiene ahora. En los problemas de cambio no consideraremos que haya referente.

En ciertos problemas ocurre que el r*eferente es la incógnita*. Entonces diremos que tienen la característica *R* o que son *R*-problemas. En la tabla 3 se indican con R los R-problemas de nuestra investigación.

Característica IR*: lenguaje inconsistente y el referente es la incógnita*

Usamos el símbolo *IR* cuando un problema tiene las dos características anteriores: *I* y *R*. Esto sólo puede ocurrir en ciertos problemas de cambio-comparación y de comparación, en los que la incógnita no es ni la variación ni la diferencia (ver tabla 3). En estos problemas, y sólo en ellos, el *referido* es el estado conocido, mientras la incógnita es el referente. En el ejemplo

- *CbCCo-Más-Inic*. Ahora L tiene 3 pta más que *antes*. *Ahora* tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía *antes*?

el referido es lo que L tiene ahora y el referente es lo que tenía antes. Consideremos además los siguientes problemas, que son también de característica *IR*:

- *CbDCo-Menos-Inic*. Ahora M tiene 4 pta menos que *antes*. *Ahora* tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- *CbCCo-Menos-Fin*. *Antes* A tenía 3 pta. Antes tenía 5 pta menos que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- *CbDCo-Más-Fin*. *Antes* P tenía 8 pta. *Antes* tenía 3 pta más que *ahora*. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- *Co-Más-Menor*. T tiene 5 pta más que M. T tiene 7 pta. ¿Cuántas pta tiene M?
- *Co-Menos-Mayor*. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que E. ¿Cuántas pta tiene E?

En los problemas CbDCo-Más-Fin, CbCCo-Menos-Fin y Co-Menos-Menor la *IR*-característica aparece de forma fuerte (*f*), ya que se usan las expresiones repetitivas «Antes... Antes... ahora ... ahora» y «T... T... E... E». Por otro lado, en los problemas CbCCo-Más-Inic, CbDCo-Menos-Inic y Co-Más-Menor la característica IR está en forma débil (*d*): «Ahora... antes. Ahora... antes» y «T... M. T... M». Consideramos de la máxima importancia la diferencia entre las formas fuerte y débil de la característica *IR* ya que, como veremos más adelante, los enunciados en forma fuerte son más difíciles de comprender para los alumnos que los de la forma débil.

Debe observarse que si se cambia el orden de los datos en el enunciado de CbDCo-Más-Fin [*IR*(*f*)], entonces el problema se convierte en CbDCo-Más*-Fin [*IR*(*d*)]:

- *CbDCo-Más*-Fin*. Antes R tenía 3 pta más que ahora. Antes tenía 8 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cuando se cambia el orden de presentación de los datos en CbDCo-Menos-Inic [*IR*(*d*)], entonces se convierte en el problema CbDCo-Menos*-Inic [*IR*(*f*)]:

- *CbDCo-Menos*-Inic*. Ahora P tiene 5 pta. Ahora tiene 4 pta menos que antes. ¿Cuántas pta tenía antes?

Por lo tanto, es claro que si se cambia el orden de presentación de los datos en el enunciado de un problema con característica *IR*(*f*), entonces se obtiene uno de característica *IR*(*d*), y viceversa.

Algunos autores (por ejemplo Verschaffel, 1994) dicen que un problema tiene lenguaje inconsistente cuando tiene la *IR*-característica, lo que supone un uso más estricto de esta terminología.

Se pasaron varios test a 267 estudiantes de tercero, cuarto, quinto y sexto de la Educación Primaria (8-12 años) a los que se encuestó sobre los 39 problemas aditivos…

La investigación: resultados y discusión

Se pasaron varios test a 267 estudiantes de tercero, cuarto, quinto y sexto de la Educación Primaria (8-12 años) a los que se encuestó sobre los 39 problemas aditivos a los que nos hemos referido en las secciones previas. Constituían 15 grupos de dos escuelas públicas de Santa Cruz de Tenerife. Hubo diez tests

diferentes, cada uno con seis problemas. Los tests fueron aleatoriamente distribuidos en cada grupo y cada alumno respondió sólo a uno de ellos. De cara a evitar la posible influencia del orden de los problemas, de cada test se hicieron diferentes formatos cambiando el orden de los problemas. La respuesta usual de los estudiantes fue escribir una operación (suma, resta, producto o división) o simplemente la solución, sin ofrecer detalles de las operaciones. Las respuestas fueron clasificadas como bien, mal o en blanco.

El principal objetivo de la investigación fue la confirmación de que la clase de los problemas de cambio-comparación, que hasta ahora no había sido estudiada, contiene suficientes elementos propios que la distinguen de las otras tres (cambio, igualación y comparación) y que le confieren interés didáctico. No se trata sólo de una distinción formal entre clases de problemas, sino que la manera de expresar la variación en los problemas de cambio-comparación y cambio es determinante de la dificultad, y que esta dificultad viene influida por las características a las que ya hemos hecho referencia.

El principal objetivo de la investigación fue la confirmación de que la clase de los problemas de cambio-comparación contiene suficientes elementos propios que la distinguen de las otras tres…

En la tabla 4 se recoge el porcentaje de éxito alcanzado en cada problema y la característica que posee. La observación de la tabla nos dice que los resultados son muy diferentes. Así, los problemas de cambio creciente (CbC) y los de cambio creciente-comparación (CbCCo) de incógnita *fin* muestran éxitos de 94%, 93% y 37%, según que la expresión de la variación se haga en las formas *simple*, *más* o *menos*, respectivamente. En el caso de los problemas de cambio decreciente-comparación (CbDCo) expresados en forma *más*, los porcentajes de éxito se sitúan en el 70%, 95% y 29% según que la incógnita fuera *inic*, *var* o *fin*, respectivamente. Se requiere, por tanto, un análisis algo detallado, lo que hacemos a continuación.

Resultados generales

Es evidente que no se puede establecer un nivel estricto de dificultad entre las cuatro clases de problemas que estamos considerando. La tabla 4 muestra con claridad la relación de las características *I*, *R* e *IR*, especialmente la última, con la mayor dificultad. Se puede apreciar que los problemas *IR(f)* son generalmente los de menor éxito, particularmente en los problemas de cambio-comparación,

		%	Car	%	Car	%	Car
Cambio		CbC-Inic		CbC-Var		CbC-Fin	
	Simple	77	I	75	I	94	
		CbD-Inic		CbD-Var		CbD-Fin	
	Simple	78	I	100		91	
	Simple*	81	I	94		94	
Cambio Comparación		CbCCo-Inic		CbCCo-Var		CbCCo-Fin	
	Más	65	IR(d)	78	I	93	
	Menos	80		90		37	IR(f)
		CbDCo-Inic		CbDCo-Var		CbDCo-Fin	
	Más	70		95	I	29	IR(f)
	Más*	91		64	I	45	IR(d)
	Menos	47	IR(d)	94		84	
	Menos*	21	IR(f)	82		79	
Igualación		Ig-Menor		Ig-Dif		Ig-Mayor	
	Añadir	57	I	75	I	91	R
	Quitar	85	R	98		50	I
Comparación		Co-Menor		Co-Dif		Co-Mayor	
	Más	63	IR(d)	74	I	80	
	Menos	80		89		59	IR(f)

Tabla 4. Porcentajes de éxito (%) y características (Car) de los problemas

mientras que los *IR*(*d*) tienen porcentajes mayores. La mayor influencia de la forma fuerte sobre los bajos resultados se aprecia mejor si nos fijamos en los problemas (*): CbDCo-Más-Fin [*IR*(*f*)] tiene un porcentaje de éxito de 29% y CbDCo-Más*-Fin [*IR*(*d*)] de 45%; de modo similar, el problema CbDCo-Menos*-Inic [*IR*(*s*)] tiene el 21%, mientras que CbDCo-Menos-Inic [*IR*(*d*)] tiene el 47%. La influencia de la característica *IR* en los problemas de comparación no es tan marcada como en los problemas de cambio-comparación.

Orden de los datos

El orden de los datos en el enunciado tiene clara influencia sobre el éxito en los problemas de cambio-comparación, aunque poco o nada en los de cambio, tal como se ve en la tabla 4. Ya hemos indicado que el orden de los datos en los problemas *IR* determina que esa característica sea en forma fuerte o débil, lo que tiene repercusión directa en los porcentajes de éxito.

Estos resultados nos permiten formular conjeturas sobre problemas que no hemos considerado en nuestra investigación. Concretamente, pensamos que los problemas CbCCo-Menos*-Fin y Co-Menos*-Mayor, ambos *IR*(*d*), son más sencillos de resolver que sus correspondientes *IR*(*f*), los problemas CbCCo-Menos-Fin y Co-Menos-Mayor, respectivamente. De modo similar, creeemos que los problemas CbCCo-Más*-Inic y Co-Más*-Menor, ambos IR(f), son más difíciles que sus similares *IR*(*d*): CbCCo-Más-Inic y Co-Más-Menor, respectivamente.

Cambio

Los problemas de cambio son los que mejores resultados tienen, entre 75% y 100%. Puede que la mayor atención en la escuela a este tipo de problemas explique parcialmente estos porcentajes. Los más bajos valores están relacionados con la característica *I*, lo que confirma un resultado que Martínez y Aguilar (1994) obtienen en su investigación. Debe notarse, sin embargo, que los problemas de característica *IR* o simplemente *R* no existen en la clase de cambio.

Cambio-comparación

Los tres problemas de esta categoría que poseen resultados de éxito claramente inferiores a los otros (37%, 29% y 21%) tienen la característica *IR*(*f*). Los tres siguientes con porcentajes más bajos (65%, 47% y 45%) son los de característica *IR*(*d*).

En los problemas de cambio creciente–comparación, el más difícil tras el *IR*(*f*) y el *IR*(*d*) es el que tiene la característica *I*: 78%. En los de cambio decreciente-comparación, existe una pauta diferente, ya que tras los *IR*(*f*) y los *IR*(*d*) viene un problema con característica *I*, pero a él no le sigue el otro con esa misma característica, que llega a alcanzar un porcentaje del 95% de éxito, lo que no podemos explicar claramente.

El orden de los datos en el enunciado tiene clara influencia sobre el éxito en los problemas de cambio-comparación, aunque poco o nada en los de cambio…

Comparación

Los dos problemas de comparación con más bajo éxito (63% y 59%) son los de característica *IR*. También son los que tienen más bajos porcentajes en el estudio de Martínez y Aguilar (1994).

Igualación

En esta clase, los más bajos porcentajes (50%, 57% y 75%) se corresponden con problemas que poseen la característica *I*, resultado que coincide con lo obtenido por Martínez y Aguilar (1994). Los dos *R*-problemas (Ig-Quitar-Menor e Ig-Añadir-Mayor) no tienen bajos porcentajes de éxito. En esta clase de problemas, por tanto, los problemas con la característica *I* son más difíciles de resolver que los de la característica R. Obsérvese que el problema con mayor porcentaje de éxito no tiene ninguna de las características *I* y *R*.

Problemas similares

Hay ciertos grupos de problemas que muestran cierta semejanza, ya que tienen porcentajes de éxito similares y, además, sus enunciados pueden obtenerse uno de otro intercambiando ciertas palabras. Así ocurre, por ejemplo, con los problemas CbCCo-Menos-Inic (80%), CbDCo-Menos*-Fin (79%) y Co-Menos-Menor (80%). En efecto, si en el problema:

- *CbCCo-Menos-Inic*. Antes E tenía 4 pta menos que ahora. Ahora tiene 9 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?

reemplazamos «antes» y «ahora» por «ahora» y «antes», respectivamente, y las formas verbales se modifican apropiadamente, se convierte en

- *CbDCo-Menos*-Fin*. Ahora J tiene 2 pta menos que antes. Antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

	%		%		%
CbCCo-Más-Inic	65	CbDCo-Más*-Fin	45	Co-Más-Menor	63
CbCCo-Más-Var	78	CbDCo-Más*-Var	64	Co-Más-Dif	74
CbCCo-Más-Fin	93	CbDCo-Más*-Inic	91	Co-Más-Mayor	80
CbCCo-Menos-Inic	80	CbDCo-Menos*-Fin	79	Co-Menos-Menor	80
CbCCo-Menos-Var	90	CbDCo-Menos*-Var	82	Co-Menos-Dif	89
CbCCo-Menos-Fin	37	CbDCo-Menos*-Inic	21	Co-Menos-Mayor	59

Tabla 5. Ternas de problemas similares

Si en este último problema, «ahora» y «antes» son reemplazados por «R» y «L», respectivamente, se obtiene:

- *Co-Menos-Menor.* R tiene 3 pta menos que L. L tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene R?

Existen otras posibilidades similares de conjuntos de problemas, como se muestra en las tablas 5 y 6, aunque no siempre los porcentajes de éxito están tan próximos como en el ejemplo anterior.

	%		%
CbDCo-Menos-Inic	47	CbDCo-Más*-Fin	45
CbDCo-Más-Fin	29	CbDCo-Menos*-Inic	21
CbDCo-Más-Inic	70	CbDCo-Menos*-Fin	79
CbDCo-Más*-Inic	91	CbDCo-Menos-Fin	84

Tabla 6. Parejas de problemas similares

Conclusiones

El principal objetivo de la investigación que presentamos en este artículo fue poner de relieve que la *forma de expresar* ciertas sentencias de los enunciados de los problemas también tiene influencia en la resolución.

Una situación aditiva simple puede expresarse de diversas formas. En las situaciones asociadas al esquema $i + v = f$ (estado inicial + variación = estado final), hay tres maneras de expresar la variación (simple, más que, menos que); los resultados de nuestra investigación muestran que la expresión usada es relevante en el nivel de éxito. Análogamente, si el esquema es $a + d = b$ (estado menor + diferencia = estado mayor), entonces hay cuatro formas de expresar la diferencia (más que, menos que, añadir, quitar) y esa expresión se relaciona con la dificultad del problema. Con el fin de confirmar nuestra idea sobre la importancia de la expresión hemos considerado cuatro clases de problemas aditivos con números positivos, tres de las cuales (cambio, comparación e igualación) eran bien conocidas y una cuarta (cambio-comparación) ha sido estudiada en este trabajo por primera vez. Los problemas de cambio y de cambio-comparación tienen un esquema común ($i + v = f$) pero la expresión de la variación es diferente; también los problemas de comparación y de igualación poseen un mismo esquema ($a + d = b$), pero la diferencia se expresa de maneras distintas. Además, la expresión para la variación y la diferencia son similares en los problemas de cambio y de igualación, y también en los problemas de cambio-comparación y en los de comparación.

Con el fin de estudiar la influencia de la expresión hemos considerado algunas características de los problemas relacionadas con dicha expresión. La característica *I* se refiere a un «lenguaje inconsistente», que aparece cuando se usan palabras en el enunciado que pueden sugerir una suma cuando lo correcto es restar, o una resta cuando lo correcto es sumar. La característica *R* indica que el referente es la incógnita. Los resultados de nuestra investigación muestran que ambas características tienen relevancia en la resolución de los problemas, pero es, sobre todo, la conjunción de ambas (*IR*) la que posee una muy destacada influencia, especialmente cuando el orden de los datos en el enunciado hace que adopte la forma fuerte *IR*(*f*).

Los resultados nos permiten establecer que la clase de los problemas de cambio-comparación tiene entidad propia. Por otro lado, los problemas de cambio no tienen la *IR*-característica, mientras que ésta sí aparece en los de cambio-comparación, y consecuentemente los hace más difíciles. Por otro lado, los problemas de cambio-comparación

difieren de los de comparación en que los *IR*-problemas están entre los de menor éxito. Hay otros, sin embargo, con la característica I que tiene éxito similar en ambas clases. Por tanto, se puede decir que la característica *IR* es una condición particularmente negativa en los problemas de cambio-comparación, pero de menor influencia en los de comparación e igualación.

En el ámbito de las clases de problemas estudiadas en esta investigación, creemos que la comprensión de la situación numérica que se describe en el enunciado del problema, de tal forma que resulte posible algún tipo de representación mental, es suficiente para la correcta resolución del mismo. Consecuentemente, pensamos que los menores porcentajes de éxito en ciertos problemas se explican porque tienen enunciados que hacen difícil comprender la situación numérica, de manera que el alumno no es capaz de imaginar esa situación y, entonces, responde al problema, si lo hace, haciendo con los datos la operación que le parece más razonable (usando las palabras clave). Este hecho ya había sido descrito por otros autores en los problemas de comparación y nuestra investigación nos lleva a extender esos resultados a los de cambio-comparación.

Parece necesario complementar esta investigación con los aspectos cognitivos en el proceso de resolución de los problemas por parte de los alumnos. Concretamente, será de mucho interés estudiar los esquemas conceptuales que usan los alumnos y averiguar si utilizan el mismo esquema ante los problemas de cambio-comparación que ante los de cambio, o si, por el contrario, es el mismo que utilizan ante los de comparación. La clarificación de este punto sería decisivo para precisar si, en la resolución de los problemas, lo dominante es la estructura del problema (el esquema) o la forma de expresar la situación.

Podemos obtener de nuestra investigación algunas consecuencias para la enseñanza. Con lo que hemos dicho resulta claro que lo decisivo es que el alumno comprenda el enunciado del problema y que logre hacer una representación mental de la situación numérica. En este sentido, diferentes investigaciones han mostrado que el uso de diagramas y gráficos, o el uso de material manipulativo, puede resultar muy valiosos para la comprensión de los problemas (Riley, Greeno y Heller, 1983). También resulta eficiente el trabajo directo sobre los enunciados, bien redactando con palabras propias un enunciado dado previamente (Verscahffel, 1994) o bien inventando problemas (Rudnitsky y otros, 1995).

Algunos autores (como Rudnitsky et al., 1995) consideran que el conocimiento de las diferentes clases de problemas debe formar parte del currículo escolar y que los alumnos deben ser capaces de identificarlos como de cambio, igualación o comparación. Sin necesidad de llegar tan lejos, sí nos parece adecuado para mejorar la habilidad de los alumnos para resolver problemas que conozcan que una misma situación numérica puede ser expresada de muy diferentes maneras.

…sí nos parece adecuado para mejorar la habilidad de los alumnos para resolver problemas que conozcan que una misma situación numérica puede ser expresada de muy diferentes maneras.

Finalmente, las conclusiones de este trabajo refuerzan las ya comentadas en la literatura sobre la importancia que deben conceder los redactores de libros de texto a las expresiones usadas en los enunciados de los problemas. También los profesores deben ser conscientes de la relevancia de la expresión, no sólo a la hora de resolverlos, sino también al analizar las respuestas de los alumnos.

Referencias bibliográficas

BRUNO, A. y A. MARTINÓN (1996): «Problèmes additifs (1): d'etats; (2): de variations; (3): de comparaisons», *Math Ecole* (1) n.° 171, 17-20; (2) n.° 172, 24-27; (3) n.° 173, 33-37.

BRUNO, A. y A. MARTINÓN (1997): «Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos», *Educación Matemática*, n.° 9, 33-46.

CARPENTER, T. y J. MOSER (1982): «The development of addition and subtraction problem-solving skills», en T. CARPENTER, J. MOSER y T. Romberg (eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, LEA, New Jersey, 9-24.

DE CORTE, E. y L. VERSCHAFFEL (1991): «Some factors influencing the solution of addition and subtraction problems», en K. DURKIN, y B. SHIRE (eds.): *Language in Mathematical Education. Research and practice*, Open University Press, Buckinghampp, 117-130.

FUSON, K. C. (1992): «Research on whole number addition and subtraction», en D. A. GROUWS (ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 243-275.

FUSON, K. C. y G. B. WILLIS (1986): «First and Second Grader's Performance on Compare and Equalize Word Problems», en *Proceedings of the 10th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, University of London, Institute of Education, 19-24.

MARTÍNEZ MONTERO, J. y M. AGUILAR VILLAGRÁN (1996): «La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a las de cambio y comparación», *Suma*, n.° 21, 35-39.

RILEY, M., J. GREENO y J. HELLER (1983): «Development of children's problem-solveng ability in arithmetic», en P. GINSBURG, (ed.): *The development of*

mathematical thinkig, Academic Press. Orlando, Florida, 153-196. .

RUDNITSKY, A., S. ETHEREDGE, S. J. M. FREEMAN y T. GILBERT (1995): «Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 26, 467-486.

TEUBAL, E. y P. NESHER,(1991): «Order of mention vs order of events as determining factors in additive word problems: A developmental approach», en K. DURKIN y B. SHIRE (eds.): *Language in Mathmatical Education. Research and practice*, Open University Press, Buckingham, 131-139.

VERSCHAFFEL, L. (1994): «Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 25, 141-165.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E. (1996): «Number and Arithmetic», en A. J. BISHOP y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, Dordrechet, 99-137.

Alicia Bruno
Antonio Martinón
Fidela Velázquez
Sociedad Canaria
de Profesores
de Matemáticas
«Isaac Newton »

Anexo: enunciados de los problemas

Cambio creciente

- CbC-Simple-Inic. Después de ganar 3 pta, ahora J tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbC-Simple-Var. Antes J tenía 2 pta y ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta ganó J?
- CbC-Simple-Fin. Antes A tenía 4 pta. Después ganó 3 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cambio decreciente

- CbD-Simple-Inic. Después de perder 3 pta, ahora R tiene 4 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbD-Simple*-Inic. Ahora R tiene 4 pta, después de perder 3 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbD-Simple-Dif. Antes J tenía 5 pta y ahora tiene 2 pta. ¿Cuántas pta perdió J?
- CbD-Simple*-Dif. Ahora E tiene 2 pta y antes tenía 5 pta. ¿Cuántas pta perdió E?
- CbD-Simple-Fin. Antes J tenía 9 pta. Después perdió 4 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbD-Simple*-Fin. Antes de perder 4 pta, J tenía 9 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cambio creciente-Comparación

- CbCCo-Más-Inic. Ahora L tiene 3 pta más que antes. Ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbCCo-Más-Var Antes L tenía 4 pta y ahora tiene 7. ¿Cuántas pta más tiene ahora que antes?
- CbCCo-Más-Fin. Antes P tenía 5 pta. Ahora tiene 4 pta más que antes. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbCCo-Menos-Inic. Antes E tenía 4 pta menos que ahora. Ahora tiene 9 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbCCo-Menos-Var. Antes L tenía 5 pta y ahora tiene 9. ¿Cuántas pta menos tenía antes que ahora?
- CbCCo-Menos-Fin. Antes A tenía 3 pta. Antes tenía 5 pta menos que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Cambio decreciente-Comparación

- CbDCo-Más-Inic. Antes L tenía 3 pta más que ahora. Ahora tiene 2 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Más*-Inic. Ahora J tiene 2 pta. Antes tenía 3 pta más que ahora. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Más-Var. Antes P tenía 6 pta y ahora tiene 4 pta. ¿Cuántas pta más tenía antes que ahora?
- CbDCo-Más*-Var. P tiene ahora 4 pta y antes tenla 6 pta. ¿Cuántas pta más tenía antes que ahora?
- CbDCo-Más-Fin. Antes P tenía 8 pta. Antes tenía 3 pta más que ahora. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbDCo-Más*-Fin. Antes R tenía 3 pta más que ahora. Antes tenía 8 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbDCo-Menos-Inic. Ahora M tiene 4 pta menos que antes. Ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Menos*-Inic. Ahora P tiene 5 pta. Ahora tiene 4 pta menos que antes. ¿Cuántas pta tenía antes?
- CbDCo-Menos-Var. Antes M tenía 9 pta y ahora tiene 5 pta. ¿Cuántas pta menos tiene ahora que antes?
- CbDCo-Menos*-Var. M tiene ahora 5 pta y antes tenía 9 pta. ¿Cuántas pta menos tiene ahora que antes?
- CbDCo-Menos-Fin. Antes A tenía 6 pta. Ahora tiene 2 pta menos que antes. ¿Cuántas pta tiene ahora?
- CbDCo-Menos*-Fin. Ahora J tiene 2 pta menos que antes. Antes tenía 6 pta. ¿Cuántas pta tiene ahora?

Igualación

- Ig-Añadir-Menor. Si P gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que R. R tiene 6 pta. ¿Cuántas pta tiene P?
- Ig-Añadir-Dif. T tiene 3 pta y M tiene 8. ¿Cuántas pta tiene que ganar T para tener lo mismo que M?
- Ig-Añadir-Mayor. R tiene 4 pta. Si R gana 2 pta, entonces tiene lo mismo que P. ¿Cuántas pta tiene P?
- Ig-Quitar-Menor. Si C pierde 5 pta, entonces tiene lo mismo que A. C tiene 7 pta. ¿Cuántas pta tiene A?
- Ig-Quitar-Dif. C tiene 2 pta y A tiene 7. ¿Cuántas pta tiene que perder A para tener lo mismo que C?
- Ig-Quitar-Mayor. A tiene 4 pta. Si C pierde 2 pta, entonces tiene lo mismo que A. ¿Cuántas pta tiene C?

Comparación

- Co-Más-Menor. T tiene 5 pta más que M. T tiene 7 pta. ¿Cuántas pta tiene M?
- Co-Más-Dif. R tiene 2 pta y A tiene 7 pta. ¿Cuántas pta más tiene A que R?
- Co-Más-Mayor. T tiene 2 pta. M tiene 5 pta más que T. ¿Cuántas pta tiene M?
- Co-Menos-Menor. R tiene 3 pta menos que L. L tiene 5 pta. ¿Cuántas pta tiene R?
- Co-Menos-Dif. P tiene 4 pta y A tiene 6 pta. ¿Cuántas pta menos tiene P que A?
- Co-Menos-Mayor. T tiene 2 pta. T tiene 5 pta menos que E. ¿Cuántas pta tiene E?

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Aspectos didácticos de matemáticas. 8

CONTENIDOS

- *Geometría y realidad*. CLAUDI ALSINA
- *El álgebra escolar no es sólo cuestión de contenidos*. MARÍA ÁNGELES ORTIZ
- *Hacer matemáticas: el juego como recurso*. JOSÉ MARÍA GAIRÍN
- *Utilización didáctica del vídeo en matemáticas*. ANTONIO PÉREZ SANZ
- *Recursos de hoy y de ayer para enseñar matemáticas*. JOSÉ LUIS ÁLVAREZ

BOLETÍN DE PEDIDO

Deseo me envíen contra reembolso de 1.200 pesetas más gastos de envío, el libro *Aspectos didácticos de Matemáticas. 7.*

Nombre: . . . . . .

Dirección: . . . . . .

Población: . . . . . C.P.: . . . . . Provincia: . . . . . .

CIF o NIF (a efectos de emitir la obligatoria factura): . . . . . .

Remitir a:
Instituto de Ciencias de la Educación. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761991. Fax: (976) 761345

SUMA 37
junio 2001, pp. 95-98

Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento

Marcelino J. Ibañes Jalón

ARTÍCULOS

En este artículo se expone un ejemplo de cómo una demostración de un teorema geométrico puede sugerir el descubrimiento de otros resultados.

TRADICIONALMENTE, los profesores de Matemáticas solemos decir en clase que las demostraciones sirven para convencernos de que el resultado que estamos considerando es verdad. Sin embargo, Bell (1976) advierte tres funciones de la demostración matemática: *Verificación o justificación*, concerniente con la verdad de la proposición. *Iluminación*, de tal forma que se espera que una buena demostración proporcione ideas de *por qué* la proposición es cierta. Y, *Sistematización*, esto es, la organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas, así como los resultados derivados de estos.

De Villiers (1993) desarrolla las ideas de Bell y critica la posición tradicional, mostrando casos en los que la verificación no juega un papel primordial y es superada por otras funciones de la demostración. El modelo de De Villiers distingue las siguientes funciones: *Verificación*, concerniente a la *verdad* de una afirmación. *Explicación, profundizando en* por qué es verdad. *Sistematización*, la *organización* de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas. *Descubrimiento* o invención de nuevos resultados. Y *Comunicación*, la *transmisión* del conocimiento matemático.

Ibañes (1997) adapta este modelo para los estudiantes de bachillerato, y analiza el reconocimiento por parte de éstos de las diversas funciones de la demostración en un teorema.

Aquí, nos centraremos en la función de descubrimiento, exponiendo un ejemplo de demostración geométrica que sugiere nuevas proposiciones. Consideremos el siguiente resultado:

Teorema

Los puntos medios de los lados de un *romboide* definen un *rectángulo*.

Demostración

Del triángulo *ABC* de la figura 1 se deduce que PQ//*AC*, y del triángulo *ACD* se deduce que *SR//AC*; por lo tanto, *PQ//RS*. De la misma forma se prueba que *PS//QR*. Luego *PQRS* es un paralelogramo. Además, puesto que $AC \perp BD$ se tiene que $PQ \perp PS$, y, por consiguiente, *PQRS* es un rectángulo.

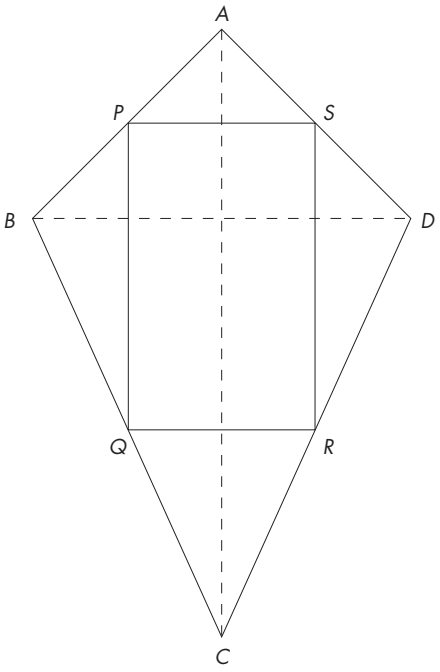


Figura 1

Como hace notar De Villiers (1996), la causa de que *PQRS* sea un paralelogramo es la perpendicularidad de las diagonales del romboide; pero, en la demostración no se ha utilizado el hecho de que el romboide tiene un eje de simetría (AC). Esta observación permite enunciar un nuevo teorema:

Teorema

> Los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero ortodiagonal* (cuadrilátero con diagonales perpendiculares) definen un rectángulo. (Figura 2)

De esta manera, tenemos un primer ejemplo en el que la demostración de un teorema nos ha permitido descubrir un nuevo resultado; pero, nuestro objetivo es obtener un gran número de nuevos teoremas. Para ello, vamos a aplicar las estrategias de descubrimiento que suelen utilizarse en Matemáticas. Polya (1966) menciona *la generalización, la particularización y la analogía*; nosotros, también consideraremos la *dualidad*. Para aplicarlas con éxito al enunciado de un teorema, puede ser útil reflexionar sobre su demostración haciendo las siguientes preguntas que

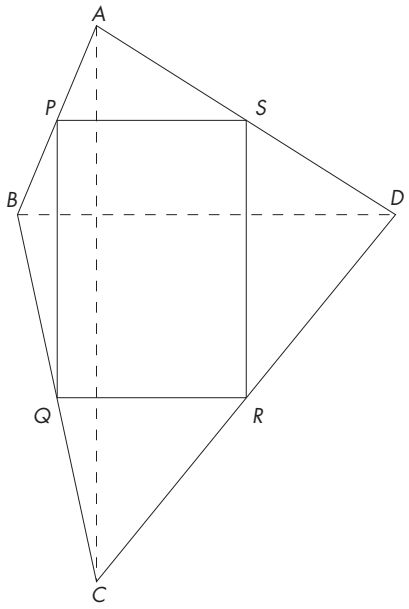


Figura 2

corresponden, respectivamente, a cada una de ellas:

- ¿Cómo afectaría a la demostración prescindir de algunas condiciones?
- ¿Cómo afectaría a la demostración añadir nuevas condiciones?
- ¿Cómo afectaría a la demostración sustituir algunas condiciones por otras análogas?
- ¿Cómo afectaría a la demostración sustituir algunas condiciones por sus duales?

A continuación, ponemos en práctica estas ideas en un proceso que está inspirado en De Villiers (1996), donde se encuentran algunos de los teoremas que se citan a continuación. Partimos del enunciado [1]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares). (Figura 3)

Su demostración es parecida a la expuesta en el teorema de más arriba, por lo que se propone al lector. Únicamente, destacaremos que, ahora, la causa de que *PQRS* sea un rombo es que el rec-

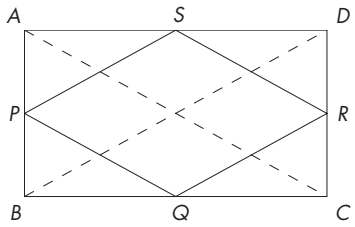


Figura 3

tángulo tiene las diagonales iguales. Considerando como duales los conceptos diagonales iguales y diagonales perpendiculares, si nos preguntamos: ¿cómo afectaría a la demostración sustituir en el cuadrilátero de partida *ABCD* «diagonales iguales» por «diagonales perpendiculares»?, enseguida llegaríamos a la conclusión de que también deberíamos hacer la misma sustitución en el cuadrilátero obtenido *PQRS*. Por lo tanto, a partir de [1], se obtiene, por *dualidad*, [2]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares), se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales). (Figura 4)

De la misma manera, se pueden aplicar también las otras estrategias de descubrimiento, ayudándonos de las correspondientes preguntas. Así, generalizando [1] y [2] se obtienen, respectivamente, [3] y [4]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero equidiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales), se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares). (Figura 5)

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero ortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales perpendiculares), se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales). (Figura 2)

Obsérvese que [3] y [4] son *duales*.

Particularizando estos dos últimos resultados se obtienen, respectivamente, [5] y [6]:

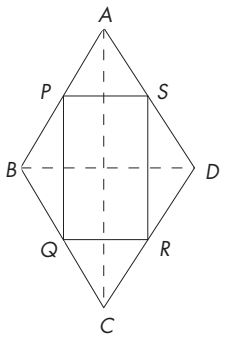


Figura 4

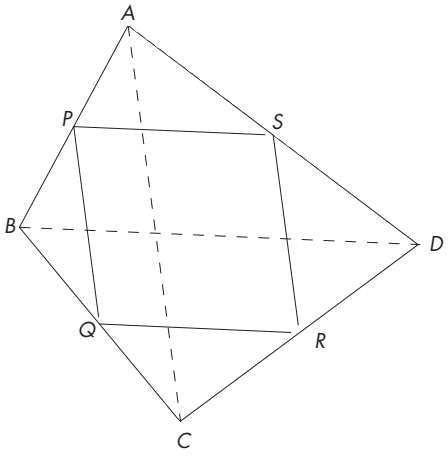


Figura 5

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *trapecio isósceles* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares). (Figura 6)

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *romboide* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares), se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales). (Figura 1)

Obsérvese también que [5] y [6] son *duales*.

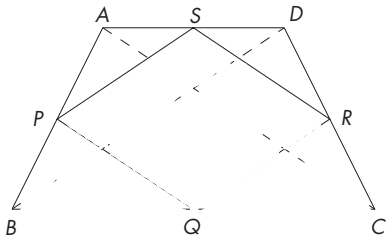


Figura 6

Una clase especial de particularización es la *conjunción*. Por conjunción de [1] y [2], se obtiene [7]:

> Al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un *cuadrado* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares), se obtiene un *cuadrado*. (Figura 7)

Y, por conjunción de [3] y [4], se obtiene [8]:

> Al unir los puntos medios de los lados de un *cuadrilátero equiortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares), se obtiene un *cuadrado* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares). (Figura 8)

Todo el proceso anterior se resume en el esquema de la figura 9.

Finalmente, debe destacarse que algunos de estos teoremas no son fácilmente imaginables, por lo que, posiblemente, no se hubieran podido enunciar de no seguir este camino. Así pues, gracias al análisis cuidadoso de las demostraciones, y aplicando las estrategias de descubrimiento citadas, se han descubierto nuevos resultados, y se podrían obtener algunos más; entre ellos, el conocido teorema de Varignon:

Teorema

> Al unir consecutivamente los puntos medios de un *cuadrilátero* cualquiera se obtiene un *paralelogramo*. (Figura 10)

Referencias bibliográficas

BELL, A. W. (1976): «A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 7, 23-40.

IBAÑES, M. (1997): «Alumnos de Bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones», *Uno*, n.° 13, 95-101.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

VILLIERS, M. de (1993): «El papel y la función de la demostración en Matemáticas», *Epsilon*, 26, 15-30.

VILLIERS, M. de (1996): *Some Adventures in Euclidean Geometry*, University of Durban-Westville, South Africa.

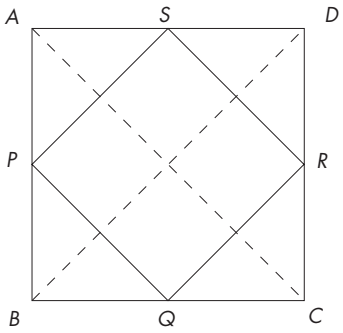


Figura 7

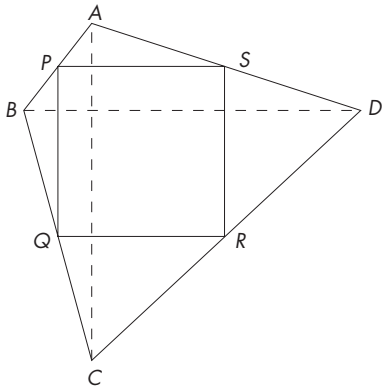


Figura 8

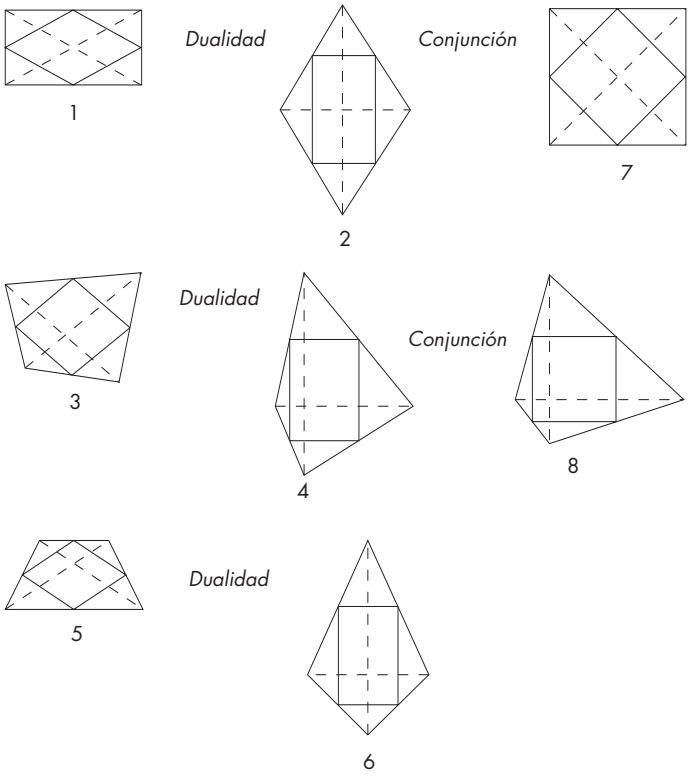


Figura 9

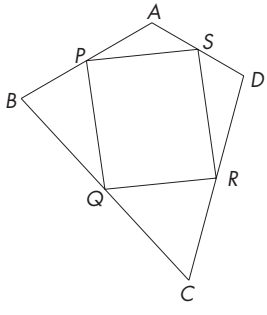


Figura 10

Marcelino J. Ibañes
IES Vega del Prado.
Valladolid

SUMA 37
junio 2001, pp. 99-104

La Creación de los Números

Luis Balbuena Castellano

MISCELÁNEA

ACTO 1

Entran en el escenario dos angelitos transportando una caja. Humos-música-juego de luces.

De la caja sale 1. Se apaga todo.

Conseguir el efecto de que ha pasado el tiempo.

Vuelven a encenderse las luces.

La Unidad (1) se pasea por el escenario o permanece acurrucada mientras se oye una música tipo «carros de fuego». Se despereza despacio. El uno, en grande, va en el traje, bien pintado o recortado.

1. Qué bien me encuentro... Todos me dicen que soy la mejor... Todos me respetan porque saben que sin mi no serían nada. Miren, ahí viene Dos. Fue el primero que engendré. Aunque es un enano, es el mayor de mis hijos. A veces pienso que le falta un agüita,… Hola Dos.
2. Hola, mamá. ¿Es cierto lo que me han contado?
1. ¿Qué te dijeron, hijo mío?
2. Que habías sido capaz de engendrar también nada menos que a 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Entran uno a uno por la izquierda del escenario

1. No me fue difícil. Me repetía una y otra vez y así los engendré a todos.
2. Entonces, ¿eres hermafrodita?
1. Algo así, algo así.
2. Y, ¿no puedes engendrar a más?
1. No. Hasta ahí llegué y dudo que pueda seguir.

Ruidos. Todos salen corriendo atravesando el escenario hacia la derecha.

El Cero, el Uno y el Dos

Graves autores contaron
que en el país de los ceros
el uno y el dos entraron,
y desde luego trataron
de medrar y hacer dinero.

Pronto el uno hizo cosecha
pues a los ceros honraba
con amistad muy estrecha,
y, dándoles la derecha,
así el valor aumentaba.

Pero el dos tiene otra cuerda:
¡todo es orgullo maldito!,
y con táctica tan lerda
los ceros pone a su izquierda
y así no medraba un pito.

En suma: el humilde uno
llegó a hacerse millonario
mientras el dos inoportuno,
por su orgullo cual ninguno
no pasó de perdulario

La Unidad se mueve de un lado para otro expectante, nerviosa.

Alguien vestido de blanco y aspecto hindú, colocado en el entresuelo. Foco iluminándolo.

Fakir. Escúchame Unidad! No es bueno que estés sola. Te voy a enviar un compañero. Cuida de él. No le maltrates. Ámale. Y ya sabes, haciendo bien el amor podréis crecer y multiplicar la estirpe, que buena falta hace...

1. Pero, ¿cómo se hace el amor? ¿cómo?, por favor, ¡no te vayas sin decirme cómo...!

Más ruido y aparece, en medio de bruma, el Cero.

Entra tímido. La Unidad lo mira con curiosidad. Se intenta acercar. El Cero le huye. Una vez más y otra…

1. Eh, ¿cómo te llamas?

0. Cero.

1. Qué nombre tan raro. ¿Y tengo que amarte? Sí, tengo que hacer el amor contigo.

0. ¡Oh, qué horror! Jamás he estado con dama alguna. ¡Socorro! Me quieren violar…

1. Ven acá, no seas tímido. No te haré daño.

Se acercan tímidamente dando vueltas uno alrededor del otro.

1. Oye, Cero ¿tú sabes que tenemos que hacer el amor para aumentar la estirpe? Eso fue lo que me dijo un ser misterioso. ¡Pero no me explicó cómo hemos de hacerlo!

0. Ni idea. Ya te he dicho que jamás he estado con dama alguna.

Se coloca Cero por la izquierda. Entra Dos.

2. Mamá, ¿quién es ese gordinflón? ¿Es acaso uno de los nuestros?

1. ¿Recuerdas el ruido de antes? Presentía que algo iba a pasar. Y lo que pasó es que alguien, desde arriba (*señala el entresuelo*), me avisó de que me enviaría un compañero para… bueno (*carraspea*), bueno, cuando seas mayor ya lo entenderás.

1 se acerca lentamente a Cero mientras repite varias veces:

1. ¿Cómo se hará? ¿Cómo se hará?...

1 se mueve lentamente y se sitúa a la derecha de Cero, algo lejos y se va acercando poco a poco.

2. ¡Alto! ¡Alto! Pero, ¿qué es lo que veo? (*dirigiéndose al público*) ¿Ven ustedes lo mismo que yo? Esto es impresionante. Mírenlos, qué acaramelados y lo que es más grandioso, ahí está el fruto de su amor. Mírenlo ahí, ¿lo ven? Y no han tenido que pasar nueve meses ni diez lunas. ¡Oh, qué alegría! ¡Tengo un hermanito! ¡Tengo un hermanito! (*Dando saltos y en tono cantarín*). *Música.*

Entran los otros, 3, 4, 5,… por la izquierda.

2. Yo también quiero, yo también quiero…

   Y yo, y yo,…

Empiezan a formar números y más números mientras se van colocando sucesivamente a la derecha de cero y bailan. Música.

Se cierra el telón.

[Telón]

Acto 2

1. ¡Ah! Ahora si que soy feliz del todo. Podemos llegar a ser tantos como queramos, sin límite alguno. Menos mal que Aquel (*señalando el entresuelo*) me envió a Cero (*señalándolo*). Es gordito pero «funciona» muy bien. Hemos creado una gran familia ¡la de los números naturales! Pero, ¡si vieran cómo se pone cuando lo coloco a mi izquierda! A veces lo hago para hacerlo enfadar. Ahí viene…

0. ¡Estoy aburrido!

1. ¿Qué te pasa cariñito mío? (*Se coloca a su derecha*)

0. Oye, te he dicho que no te pongas por ese lado. Me haces sentir insignificante.

1. Pero, ¿no me vas a decir por qué te aburres? ¿has visto cómo me divierto yo? Antes de que tu vinieras, sí que era un aburrimiento pero ahora, …uuu… hm.

0. Bueno, bueno... (*Se quita a un lado*). Mira, me aburro porque esto es siempre igual. Nos reproducimos como las hormigas pero nada más.

1. ¿Y qué más quieres?

0. Tú no lo entiendes... A mí me gustaría que entre tú y yo hubiese algo más.

Entra Cinco por la izquierda.

5. ¿Qué te pasa, Cero? Te veo cara de enfadado.

0. Tu madre no me comprende. Me gustaría engendrar algo diferente. Estoy cansado de tanto número natural. Pero no sé cómo lo tengo que hacer. Si es que hay algún método…

Uno se vuelve a colocar a la izquierda del Cero.

0. Me tienes aburrido. ¿Cómo te tengo que decir que no te coloques a ese lado? Ya sé, voy a colocar este palo entre tú y yo ¡así me dejarás tranquilo de una vez!

Toma una coma del suelo y la coloca entre él y 1 formando 0,1. La Unidad empieza a gemir.

0. ¿Oh?, pero… ¿Qué está pasando?

5. (*Mirando cada vez con más asombro*). ¡Eh chicos!, vengan, ¡rápido!¡rápido!

Entran 2, 3, 4,… por la izquierda.

2. ¿Qué pasa?

5. ¿Ustedes ven lo mismo que yo? ¿y ustedes? (*mirando al público*) ¡Miren qué hermosa criatura!

2. ¡Oh, es verdad! ¡es verdad! ¡Tengo un hermanito! ¡Tengo un hermanito...!

Música… baile,… otros decimales pasándose la coma unos a otros…

[Telón]

Acto 3

Colgado, un cuadro del Cero. Mesa a un lado preparada para la fracción.

La Unidad está sentada detrás de la mesa sobre la que hay un álbum muy grande. Es un bloc de dibujo en el que están dibujados, o hechos con ordenador, unos números grandes, para que el público los pueda ver.

1 ¡Quién me lo iba a decir a mí! (*Señalando el cuadro*) ¡Ese gordito es una mina! ¡es una joya!. A mi familia, la de los números naturales, ahora le tenemos que añadir otra también muy, muy numerosa: le he puesto de nombre los números decimales. Es algo raro pero le va bien. Es una familia curiosa.

Fíjense, si colocamos a mi gordito a la izquierda pero con aquel palito, que él tan sabiamente usó, podemos formar una familia tan numerosa como la de los números naturales. Vean las fotos que hice de algunos de ellos.

Muestra los números 0'1, 0'001, 0'00001, pasando las hojas de un álbum.

Estos somos el gordito y yo. ¡Quedamos bien verdad! Formamos una pareja que ni el Banderas con la «Melenas Grifienta» esa que se trajo de Hollywood... (*actualizar con la pareja de moda...*)

Enseña el 0'2, 0'211, 0'22335,…

¿Ven? Son infinitos

Pero, la curiosidad mayor es que si en lugar del gordito me pongo yo delante del palito ¡tenemos otra infinidad de decimales!

Es grandioso.

Vean algunos de ellos conmigo.

Enseña los números 1,1, 1,001, 1,0002, 1,253, 1,0012, 1,859532,…

Entra Cero.

1. ¡Hola cariñito mío! ¡Mi gordito relleno y sabroso! ¿Tienes alguna otra brillante idea?

0. ¡Yo qué sé! Pregúntale a Aquel. (*Señala el entresuelo*).

En ese momento entran en el escenario, siempre por la izquierda, el 2 y el 5 jugando. El 5 intenta coger al 2. Éste se sube a la mesa y el 5 se acerca agachado por debajo de la mesa de forma que desde butacas se ve 2/5. Cuando forman el 2/5 se quedan quietos. Mientras, entran en el escenario los otros, 3, 4, 5,… y al ver a 2/5 se quedan mirando y gritan:

Todos. ¡Tengo un hermanito! ¡Tengo un hermanito! (*Imitando el tonillo del 2*).

El 0 y el 4 se colocan a la derecha de 2/5 formando 0,4.

1. ¡Miren que preciosidad! ¡Son gemelos! ¡Exactamente iguales! ¡Con la ilusión que a mí me hacía tener gemelos!

De repente se empieza a oír viento y ruidos. Salen todos del escenario por la derecha excepto 1 y 0.

1. ¿Qué ocurre, gordito mío? ¡Estoy nerviosa!

0. ¡Tranquila! Mira allá.

Miran hacia la derecha.

Entra 3 por la derecha, retrocediendo despacio, como si lo empujaran.

0. Eh, tres ¿qué te pasa?

3. No sé, me está arrastrando una fuerza que no puedo controlar...

Hace mutis por el foro.

Cero pasa al centro del escenario. Gesticula como si pensara.

Aparece Tres por la derecha igual que antes.

3. ¡Socorro! Hagan algo, no puedo más, estoy caminando en sentido opuesto y esto me tiene agotado ¡ayúdenme! ¡hagan algo!

Desaparece por la izquierda del escenario.

Cero sigue meditando. La Unidad y Cero miran por donde se fue Tres como observándolo. Cero se acerca al centro del escenario y toma una tabla del suelo. Aparece Tres por el mismo lugar.

3. ¡Socorro! ¡Por favor, hagan algo! ¡Me muero!

Cero se acerca y le pone el palito delante para que aparezca –3 . Tres se para en seco.

¡Oh! ¿Qué es esto? Ya no me encuentro raro. ¡Estoy como en otro mundo! ¡Es maravilloso! Soy alguien nuevo, distinto. ¡Ya no soy Tres!

1. Claro, ahora eres Menos Tres

Entra Dos.

2. ¡Olé! ¿otro más? ¡chicos, vengan! ¡Tengo otro hermanito! ¡Tengo otro hermanito...!

Baile, música.

[Telón]

Acto 4

1. Pues sí. Ya les dije que mi gordito es de lo que no hay. Vieron lo que pasó. Con un simple palito horizontal (*lo toma del suelo*) va y crea nada menos que a los números negativos. Hasta a mí me sienta bien ¿a que sí? Miren. Con esto soy capaz de multiplicarme de nuevo hasta el infinito. ¡Ah! Con lo que a mí me gusta...

0. ¿Qué haces cariño?

1. Ya ves mi amor... diabluras. Si tú quisieras podríamos tener hijos sin parar, ¿verdad?

0. Sí, pero hay algo que me preocupa.

1. Déjate de preocupaciones y vente a mi lado. Anda. Olvida los problemas.

(Entra 2 despistado)

0. No. Déjame ahora. Llevo un buen rato pensando...

1. Pero, pensando ¿en qué? ¿Vamos a tener más hijos? ¿Sí? ¿Cómo? ¡Dímelo ya!

2. ¿Voy a tener más hermanitos?

0. No, no es eso.

Se va Dos.

1. Dime qué es lo que te preocupa

0. Mira Unidad, creo que como buenos padres que somos, tendríamos la obligación de buscar una casa para nuestros hijos. Ves cómo están ahí, de un lado para otro, como locos. Parecen gallinas sin nidal... ¡dan pena! Eso es lo que me preocupa.

1. Sí. Te comprendo, pero nuestro sino es procrear, procrear y pro-

Actores
Chica (Uno):
Laura Bello del Pino
Chico (Cero):
Nephtalí Melgarejo Correa

crear y después que cada cual se busque la vida....

0. No. Hay que hacer algo. Se me ha ocurrido una idea en la que tú me puedes ayudar y mucho. (*Saca una cuerda que tiene una marca –puede ser un trozo de cinta de color– en el lugar donde se colocará el cero y una en cada lugar de los números a un metro de distancia unas de otras*). Mira, yo me coloco aquí, donde está esta señal. Toma tú la cuerda y colócate ahí, a mi izquierda. Esta va a ser nuestra casa a partir de ahora. ¿Te gusta?

1. ¡Oh, sí!, me gusta. Sobre todo porque no tiene salón, ni cocina, ni platos que fregar. ¡Qué bien! Pero, y ¿dónde colocamos a nuestros hijos?

0. Llama a tu hija.

1. ¡Menos Uno! ¡Menos Uno! Ven

–1. ¿Qué quieres?

0. Toma esta cuerda y ponte a este otro lado y a la misma distancia de mí que tu madre.

–1. ¿Aquí?

0. Sí (*Dirigiéndose a 1*) ¿Ves cariño? Ya está colocada tu hija. (*Dirigiéndose a –1*) Ese será tu apartamento para siempre.

1. ¿Y los demás?

0. Llama al zoquete de tu hijo mayor.

1. ¡Dos! ¡Dos! Ven

2. ¿Tengo otro hermanito? ¿Tengo otro hermanito?

0. Nooooo. Esta vez te vamos a dar una casa para que no estés por ahí como un botarate buscando siempre hermanitos.

2. ¿Una casa? ¿Dónde? ¿Dónde?

0. Ponte allí, a la izquierda de tu madre. A la misma distancia que ella está de mí. No, más acá… No más allá… ¡Chacho, mide bien de una vez! Ahí.

2. ¿Esta es mi casa?

0. Sí, para siempre…

2. ¡Ya tengo casita.! ¡Ya tengo casita!…

Baile. Música.

[Telón]

Acto 5

La Unidad sola en el escenario.

1. ¡Qué felicidad! Hay que ver como ha crecido esta familia en tan poco tiempo. ¿Recuerdan cuando nací? Estaba solita en el mundo. Después fui creando a mis números naturales; al botarate de 2, luego

a 3, 4,…y así hasta que Aquel (señala el entresuelo) me anunció la llegada de Cero. Fue algo extraordinario. Pero, ya conocen la historia… Ahora hasta tenemos casa. ¡Quién me lo iba a decir a mí cuando estaba yo sola en el mundo de los números! Miren, ahí viene mi numerosa familia.

Pasan números cogidos a la cuerda, la recta real, de izquierda a derecha y salen del escenario.

Cuando pasa el Cero.

1. Cuchi, cuchi. (*Al Cero*) ¿Por qué no vienes conmigo?

0. No, mi amor ¡Ya tenemos bastante familia! Dejemos la fiesta en paz.

1 se queda sola de nuevo

1. La felicidad nunca puede ser completa. Desde que llegaron los números negativos mi vida ha cambiado. Mis hijos ya no me necesitan y Cero no quiere saber nada de mí. Tendré que hacer algo para no morir de aburrimiento y de tristeza.

Camina por el escenario cabizbaja y pensativa.

1. ¡Ya lo tengo! La casa que me hizo Cero no me gusta mucho porque sólo tiene una dimensión. Reconozco que es útil porque cada uno tiene su casa unifamiliar. Pensaré para construirme una casa distinta, con más dimensiones. ¡Un chalecito!

Camina por el escenario recogiendo barras del suelo y empieza a enlazarlas. Son unas varillas de madera de un metro de largas con agujeros para unir unas con otras con unas palometas que están a la vista.

Luis Balbuena
IES Viera y Clavijo
La Laguna.
Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
«Isaac Newton»

Construye un cuadrado de lado 1.

1. Esta casa que me he construido es un cuadrado cuyo lado tiene mi tamaño, ¿lo ven? tiene una unidad de lado. Miren qué graciosa es.

Dirigiéndose al público

¿Cuánto mide este lado?…

(*Esperando la respuesta del público*)

No lo oigo, ¿cuánto? ¡Uno! Eso es ¿Y este otro lado? (*se dirige al público*)… No oigo ¡Uno! Muy bien.

Y, si este lado mide uno y este otro también (*Al mismo tiempo entra 2 y mira lo que hace 1*) mide 1, ¿cuánto mide esta distancia?

Recoge del suelo una varilla que tiene el tamaño de la diagonal y la coloca.

¿Cuánto? ¿Dijeron raíz cuadrada de dos? Síiii, raíz cuadrada de dos.

Le coloca a 2 encima el símbolo de la raíz cuadrada que está en el escenario.

2. ¡Ya tengo otro hermanito! ¡Ya tengo otro hermanito!

Entran todos.

Todos. ¡Ya tengo otro hermanito!…

Algunos números naturales se colocan el símbolo de la raíz cuadrada.

Música, luces, ruidos.

[Telón]

Por fuera del telón y por la derecha sale la Unidad con el cartel de Fin y por la izquierda –1 con el símbolo de la raíz cuadrada.

La unidad al ver la raíz cuadrada de –1 duda en quedarse o marcharse. Por fin opta por sacar otro cartel que dice continuará.

Se levanta el telón y todos los números están colocados en la recta real. 1 y –1 tiran los carteles y se colocan en sus lugares respectivos de la recta.

FIN

SUMA 37
junio 2001, pp. 105-110

Isoperímetros: Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

EN EL NÚMERO 36 DE SUMA (*Isoperímetros: Ficha didáctica en Geometría. Métodos trigonométricos*) proponíamos una serie de actividades de introducción al Método Trigonométrico para el tratamiento de ciertos problemas de isoperímetros. El objetivo que perseguimos en esta nueva aportación es la utilización del Álgebra para resolver este tipo de problemas. Pretendemos mostrar cómo se puede abordar un *mismo problema* desde este otro bloque de contenidos del currículo de Matemáticas, y con otra profundidad, para incidir en el carácter cíclico que todo aprendizaje debe tener a lo largo de toda la ESO.

El problema

> Dispones de un listón de madera de tres metros de longitud para enmarcar una lámina con cuatro lados. ¿Cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

En la *Ficha didáctica de Geometría* se afirmaba que de entre todos los cuadriláteros de perímetro 3 metros, el cuadrado es el de mayor área. ¿Se justificaba la afirmación en la demostración realizada? Realmente, la demostración geométrica dada es sólo válida para paralelogramos. Ahora completaremos la demostración haciendo uso del Álgebra y de la teoría sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de Van Hiele.

Diagnóstico

Comenzamos planteando al alumnado distintas cuestiones con las que recordaremos los conceptos fundamentales con los que vamos a trabajar:

- ¿Qué es un cuadrilátero?
- ¿Qué es un rectángulo?
- ¿Qué es un cuadrado?
- ¿Qué significa la palabra perímetro?
- ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado?
- ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo? Si conoces el valor de un lado de un rectángulo, ¿puedes deducir el del otro?

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

- ¿Cuál es el perímetro de un cuadrilátero? Si conoces el valor de un lado de un cuadrilátero, ¿puedes deducir los de los otros?

De entre las distintas láminas que podríamos enmarcar con un listón de 3 metros, ¿tienen todas igual área?

Primera orientación dirigida

Un heurístico recomendable para abordar un problema es *empezar por un caso sencillo*. Si la lámina que queremos enmarcar es rectangular, ¿cuál es la de mayor superficie?

Figura 1

En este momento conviene organizar la clase en grupos de cuatro. Llamemos a y b a las longitudes de los lados del rectángulo. ¿Pueden tomar a o b valores negativos? ¿Por qué? ¿Puede ser $2a$ mayor que 3? ¿Puede ser $2a$ igual a 3? ¿Por qué? ¿Puede ser $2b$ mayor que 3? ¿Puede ser $2b$ igual a 3? ¿Por qué?

Por tanto, observa que los valores de a y b estarán comprendidos entre 0 y 3/2

Recordemos que en Matemáticas para escribir «mayor que» convenimos en utilizar el símbolo «>», para escribir «menor que» utilizamos «<» y para escribir «mayor o igual» y «menor o igual» escribimos respectivamente «≥» y «″».

Utilizando esta notación podremos decir que si a y b son las longitudes de los lados de un rectángulo de perímetro 3 metros, entonces $0 < a < 3/2$ y $0 < b < 3/2$.

Puesto que el listón del que disponemos mide 3 metros, resulta que $2a + 2b = 3$; conociendo a podemos determinar b, puesto que de la igualdad anterior obtenemos que:

$$b = \frac{3 - 2a}{2}$$

Así pues, el área de un rectángulo de perímetro igual a 3 metros, de lados a y b, es

$$S = a\left(\frac{3 - 2a}{2}\right)$$

Otro heurístico aplicado frecuentemente en la resolución de problemas consiste en *organizar la información en una tabla*. Dando valores a a se rellena la siguiente tabla en la que aparecen áreas asociadas a distintas dimensiones:

Lado a	1/6			3/4			
Lado b							
Área							

Si $a = 3/4$, ¿qué forma tiene la lámina? ¿Qué parece que ocurre con el valor de su área?

Los heurísticos utilizados ya han dado su fruto: ¡la elaboración de una conjetura! No se puede avanzar en la resolución de un problema si no hay una intuición a validar. ¿Qué conjetura puede establecerse?

Conjetura 1

Entre los rectángulos de perímetro igual a 3 m, el cuadrado de lado 3/4 es el que tiene mayor área.

El área de un rectángulo de perímetro 3 metros y lados a y b es ab, donde sabemos que $2a + 2b = 3$. Observa que el área del cuadrado de perímetro 3 metros es $(3/4)^2$. Para probar que la conjetura que hemos hecho es cierta, tenemos que justificar que $ab \leq (3/4)^2$ siempre que $2a + 2b = 3$.

Observar que si a y b verifican que $2a + 2b = 3$, entonces

$$b = \frac{3 - 2a}{2}$$

y queremos probar si se verifica que:

$$a\left(\frac{3 - 2a}{2}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad [*]$$

Si operamos, la desigualdad [*] será cierta si se verifican las siguientes desigualdades:

$$8a(3 - 2a) \leq 3^2$$

$$24a - 16a^2 \leq 3^2$$

$$0 \leq 16a^2 - 24a + 3^2$$

$$0 \leq (4a - 3)^2 \qquad [**]$$

¿Se verifica la desigualdad [**]?

Razonemos ahora «directamente»:

Puesto que el cuadrado de cualquier número es siempre mayor o igual que cero, resulta que $0 \leq (4a - 3)^2$ y por tanto $0 \leq 16a^2 - 24a + 3^2$. Sumando en ambos miembros de la desigualdad anterior $24a - 16a^2$ se tiene $24a - 16a^2 \leq 3^2$.

Sacando factor común $8a$ en el miembro de la izquierda, obtenemos que

$$8a(3 - 2a) \leq 3^2$$

Dividiendo los dos miembros de la desigualdad anterior entre 4^2, tendremos que

$$a\left(\frac{3 - 2a}{2}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

que es justamente la desigualdad que queríamos probar.

¿Cuándo y sólo cuándo se verifica la igualdad?

Acabamos de justificar que el área de cualquier rectángulo de perímetro 3 metros es siempre menor o igual que el área del cuadrado de lado 3/4. Luego el cuadrado de lado 3/4 metros es el «rectángulo» de perímetro 3 metros que tiene mayor área.

Primera explicitación

Cada grupo redactará un informe en el que se organice todo el trabajo realizado y se expliquen claramente los resultados obtenidos. Dicho informe será expuesto por un miembro del grupo en clase.

Orientación libre

Se pretende *generalizar* el resultado anterior, con lo que se completa el primer heurístico utilizado: *trabajar sobre un caso más sencillo y, después, generalizar*. Si el perímetro de la lámina rectangular que queremos enmarcar es P metros, ¿cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

Conjetura 2

De entre todos los rectángulos de perímetro *P* metros, el cuadrado de lado *P*/4 metros es el que tiene mayor área.

El área de un rectángulo de perímetro P metros y lados a y b es ab, donde podemos decir que $2a + 2b = P$. Observa que el área del cuadrado de perímetro P metros es $(P/4)^2$.

Para probar la veracidad de esta nueva conjetura tendremos que justificar que $(P/4)^2 \geq ab$ siempre que $2a + 2b = P$.

Si a y b verifican que $2a + 2b = P$, entonces:

$$b = \frac{P - 2a}{2}$$

y observemos que entonces queremos probar si se verifica que:

$$a\left(\frac{P - 2a}{2}\right) \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2 \qquad [*]$$

Si operamos, la desigualdad [*] será cierta si se verifican las siguientes desigualdades:

$$8a(3 - 2a) \geq P^2$$

$$24a - 16a^2 \geq P^2$$

$$0 \geq 16a^2 - 24a + P^2$$

$$0 \geq (4a - P)^2 \qquad [**]$$

¿Se verifica la desigualdad [**]?

Segunda explicitación

Ídem a primera explicitación.

Hemos justificado que entre todos los rectángulos de perímetro fijo P metros, el cuadrado es el que tiene mayor área. Nuestro interés está en demostrar que el mismo resultado se obtiene entre todos los cuadriláteros de perímetro fijo P metros. Una herramienta útil en el trabajo con polígonos es «triangularizarlos» para así trabajar con triángulos. Esto es lo que vamos a hacer nosotros para simplificar el problema. Abordamos ahora el siguiente problema que «a priori» pueda parecer que no tiene mucho que ver con el que teníamos. Cambiaremos las dimensiones para evitar confusiones.

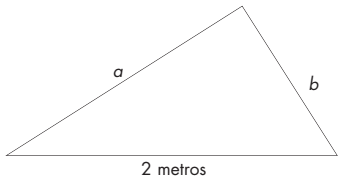
Problema

Queremos enmarcar ahora una lámina triangular que tiene un lado que mide 2 metros con un listón de madera de 5 metros. ¿Cuál es la lámina de mayor superficie que puedes enmarcar?

Tercera orientación dirigida

Construyamos un triángulo de perímetro 5 metros con base fija de 2 metros de longitud (figura 2). Llamemos a y b a los otros dos lados del triángulo. Observa que como $a + b + 2 = 5$, entonces $b = 3 - a$.

Figura 2



Recuerda la Fórmula de Herón

El área de un triángulo de lados a, b y c es

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.

Para las láminas triangulares que estamos considerando, ¿cuál es el semiperímetro? Observa que el área de cada una de estas láminas triangulares, en función del lado a es:

$$Área = \sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - a\right)\left(\frac{5}{2} - 3 + a\right)\left(\frac{5}{2} - 2\right)}$$

$$Área = \sqrt{\frac{5}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

$$Área = \sqrt{\frac{5}{4}\left(a^2 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$Área = \sqrt{-\frac{5}{4}a^2 + \frac{15}{4}a - \frac{25}{16}}$$

Tratamos de nuevo de establecer una conjetura. Procedemos igual que antes elaborando una tabla. Para ello cada grupo va a dar seis valores a a, rellenando la siguiente tabla para láminas triangulares de distintas dimensiones:

Lado a						
Área						

Entre todos los triángulos posibles (con perímetro 5 metros y base 2 metros) parece intuirse que el isósceles (con lados iguales a 1,5 m) es el que tiene mayor área.

Conjetura 3

De entre todos los triángulos de perímetro 5 metros y base fija de 2 metros, el triángulo isósceles de lados iguales 3/2 metros es el que tiene mayor área.

Recordar

Si *l* es un número positivo, una elipse de focos *F*1 y *F*2 y semieje *l* es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a los focos es 2*l*.

Construyamos un triángulo de perímetro 5 metros con base fija 2 metros y llamamos *V*1 y *V*2 a los extremos de la base y *V*3 al otro vértice (figura 3).

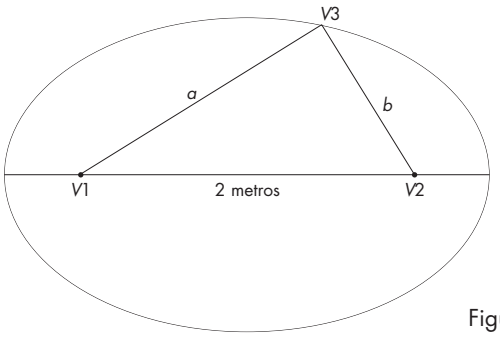


Figura 3

Si el perímetro del triángulo es 5 metros, entonces $a + b = 3$; es decir, la suma de las distancias desde *V*3 a *V*1 y respectivamente, a *V*2, debe ser igual a 3. Dicho de otro modo, si queremos construir un triángulo de perímetro 5 metros y base fija 2 metros, el vértice *V*3 será un punto de la elipse de focos los extremos de la base del triángulo y semieje 3/2 metros. Puesto que la longitud de la base es igual para todos los triángulos que construyamos de perímetro 5 metros y base 2 metros, y puesto que el área un triángulo es la mitad del producto de base por altura, entre todos estos triángulos, el de mayor área será el que tenga mayor altura. Es decir, cuando el triángulo sea isósceles y los lados iguales midan 3/2 metros, el triángulo tendrá mayor área.

Tercera explicitación

Ídem a explicitaciones 1 y 2.

Orientación libre

Pretendemos ahora generalizar el resultado anterior: de entre todos los triángulos de perímetro *P*' metros y base fija de d metros ¿cuál es el de área mayor?

De forma análoga a lo hecho antes, construyamos un triángulo de perímetro *P*' metros con base fija d metros y llamemos *V*1 y *V*2 a los extremos de la base y *V*3 al otro vértice (figura 4). Si el perímetro del triángulo es *P*' metros, entonces $a + b = P' - d$; es decir, la suma de las distancias desde *V*3 a *V*1 y, respectivamente, a *V*2, debe ser igual a $P' - d$. Puesto que la longitud de la base es fija, razonando igual que antes, el área será mayor cuando la altura sea mayor. Por tanto, entre todos los triángulos de perímetro *P*' metros y base fija de d metros, el triángulo isósceles de lados iguales $(P' - d)/2$ metros es el que tiene mayor área.

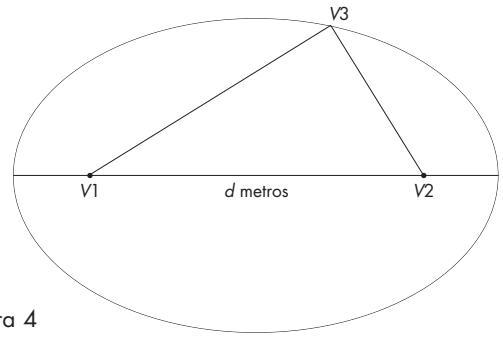


Figura 4

Cuarta orientación dirigida

Veamos ahora cómo justificar que de entre todos los cuadriláteros de perímetro 3 metros, el cuadrado es el de mayor área. Para resolver este problema isopérimetrico comenzaremos dándonos cuenta que el cuadrilátero de perímetro 3 metros con mayor área tiene que ser convexo.

Recordar

Un cuadrilátero es *convexo*, si todo segmento que conecte dos puntos situados en el interior está enteramente contenido en el interior del cuadrilátero.

Para entender mejor el concepto de convexidad, los alumnos pueden comparar los cuadriláteros de la figura 5 y decir cuales de ellos son convexos y cuales no.

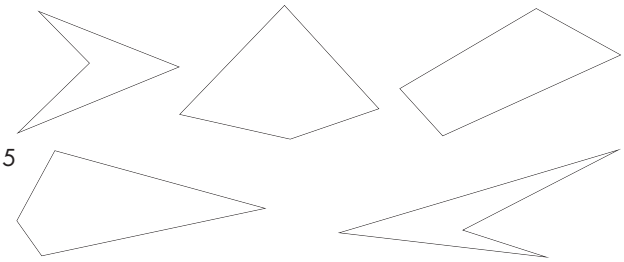


Figura 5

En primer lugar, hay que observar que a partir de un cuadrilátero no convexo, por simetría podemos generar otro nuevo cuadrilátero cómo se muestra en la figura 6.

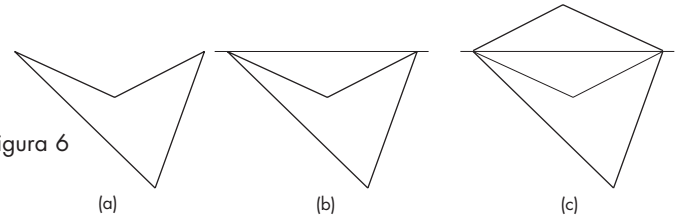


Figura 6

El alumnado realizaría el mismo proceso descrito en la figura 6 con los cuadriláteros no convexos de la figura 5.

¿Qué puedes decir de los cuadriláteros de las figuras 6a y 6c? ¿Son convexos? ¿Tienen igual perímetro? ¿Tienen igual área?

El cuadrilátero de perímetro 3 metros que tenga mayor área, ¿será convexo?, ¿por qué?

Veamos, pues, que de entre todos los cuadriláteros convexos, el de mayor área es el cuadrado.

Consideremos un cuadrilátero convexo de perímetro 3 y de lados *a*, *b*, *c* y *d* y vértices *V*1, *V*2, *V*3 y *V*4 (figura 7).

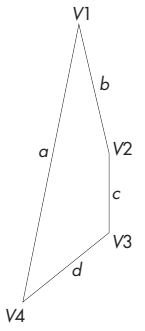


Figura 7

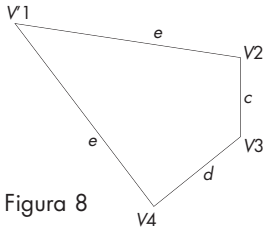


Figura 8

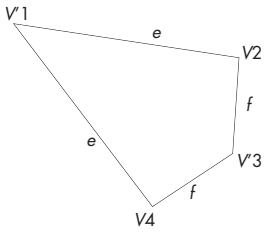


Figura 9

Paso 1: Consideremos el triángulo *V*1*V*2*V*4. Si este triángulo *V*1*V*2*V*4 es isósceles no realizamos este paso pues el triángulo *V*1*V*2*V*4 será el triángulo de mayor área entre todos los que tienen el mismo perímetro que él y base fija *V*2*V*4. En este caso el cuadrilátero del que partíamos es cómo el de la figura 8. En caso contrario, considerando como base de dicho triángulo el segmento *V*2*V*4, entre los triángulos de igual perímetro que el triángulo *V*1*V*2*V*4 y base fijada *V*2*V*4, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud $e = (a + b)/2$. Por tanto, si el triángulo *V*1*V*2*V*4 no es isósceles, el cuadrilátero de la figura 8 es un cuadrilátero que tiene el mismo perímetro y mayor área que el de la figura 7.

Paso 2: Razonemos ahora igual con el cuadrilátero de la figura 7. Consideremos el triángulo *V*2*V*4*V*3 de la figura 7. Si este triángulo *V*2*V*4*V*3 es isósceles no realizamos este paso y el cuadrilátero que obtenemos después de realizar el paso 1 es como el de la figura 9. En caso contrario, si la base del triángulo de vértices *V*2*V*4*V*3 es el segmento *V*2*V*4, entre los triángulos de igual perímetro que dicho triángulo y base fija *V*2*V*4, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud $f = (c + d)/2$. Por tanto, si el triángulo V2V4V3 no es isósceles, el cuadrilátero de la figura 9 es un cuadrilátero que tiene el mismo perímetro y mayor área que el de las figuras 7 y 8.

Paso 3: Consideremos ahora el triángulo *V*'1*V*4*V*'3 de la figura 9. Tomando como base de dicho triángulo el segmento *V*'1*V*'3, entre los triángulos de igual perímetro que el de vértices *V*'1*V*'3, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud:

$$l = \frac{f + e}{2} = \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, si el triángulo *V*'1*V*4*V*'3 no es isósceles el cuadrilátero de la figura 10 tiene el mismo perímetro y mayor área que los de las figuras 7, 8 y 9. Si el triángulo *V*1'*V*4*V*3' no es isósceles, no realizamos este paso.

Paso 4: Consideremos ahora el triángulo V'1V2V'3 de la figura 10. Considerando como base de dicho triángulo el segmento *V*'1*V*'3, entre los triángulos de igual perímetro que el de vértices *V*'1*V*2*V*'3 y base fija *V*'1*V*'3, el que encierra mayor área es el isósceles con lados iguales de longitud

$$l = \frac{f + e}{2} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, si el triángulo *V*'1*V*2*V*'3 no es isósceles, el cuadrilátero de la figura 11 es un cuadrilátero que tiene el mismo perímetro y mayor área que los de las figuras 7, 8, 9, 10 y 11. Si el triángulo *V*'1*V*2*V*'3 es isósceles, no realizamos este paso. Observar que el cuadrilátero de la figura 11 tiene los cuatro lados iguales (rombo).

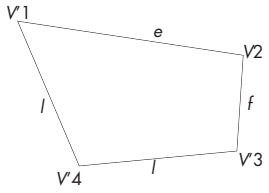


Figura 10

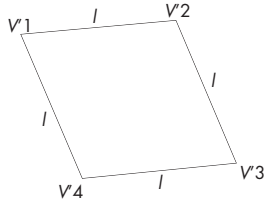
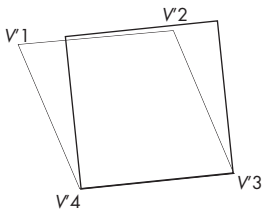


Figura 11

Paso 5: Si el cuadrilátero de la figura 11 no es un cuadrado, construyamos un cuadrado de perímetro 3 metros sobre uno de los lados del rombo de la figura 11 (ver figura 12). Observar que el cuadrado construido sobre uno de los lados de la figura 11 tiene mayor altura que el rombo y por tanto mayor área. En consecuencia cualquier cuadrilátero de perímetro 3 metros tiene área menor o igual que el cuadrado de perímetro 3 metros. En consecuencia, entre todos los cuadriláteros de perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

Figura 12



Cuarta explicitación

Ídem a explicitaciones 1, 2 y 3.

Orientación libre

Planteamos ahora generalizar el razonamiento anterior para probar que entre todos los cuadriláteros de perímetro fijo *P* metros, el cuadrado de lado *P*/4 metros, es el de mayor área. El razonamiento es completamente análogo al hecho.

Quinta orientación dirigida

Una vez que hemos comprobado que de entre todos los cuadriláteros de perímetro 3 metros es el cuadrado de lado 3/4 metros el de mayor área, podríamos preguntarnos si entre todos los pentágonos de perímetro 3 metros, el pentágono regular es el de mayor área, o si entre todos los hexágonos de perímetro 3 metros, el hexágono regular es el que tiene mayor área, etc. Sin embargo, no es este momento el adecuado para dar respuesta a estas cuestiones.

Otras preguntas interesantes que podemos formularnos son las siguientes:

- ¿Tiene mayor área que el héxagono regular de perímetro 3 m el pentágono regular de perímetro 3 m?
- ¿Tiene mayor área que el octógono regular de perímetro 3 m el héxagono regular de perímetro 3 m?
- En general, ¿qué relación existe entre las áreas de dos polígono regulares con distinto número de lados y de perímetro fijo 3 m?
- Entre todos los polígonos regulares de perímetro 3 metros, ¿existe alguno que tenga área máxima?

Llamemos *Pol*(*n*) al polígono regular de *n* lados de perímetro 3 metros. Obsérvese que para construir un polígono tiene que ser $n \geq 3$. Considerando el centro de dicho polígono, podemos descomponerlo en *n* triángulos isósceles iguales y como hicimos en la *Ficha Didáctica de Geometría, obtener que el área de Pol*(*n*) es

$$n\frac{lado \cdot apotema}{2}$$

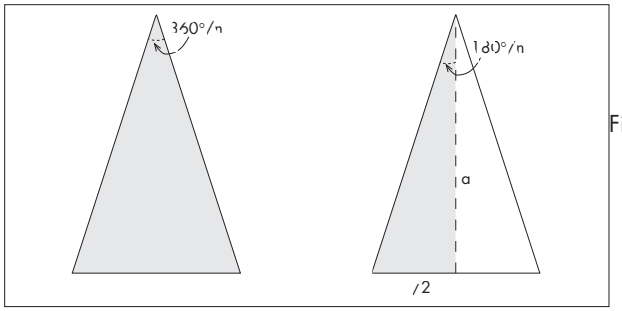


Figura 13

Como el polígono es regular, el lado es 3/*n*, y entonces

$$\acute{A}reaPol(n) = \frac{3 \cdot apotema}{2}$$

Como

$$\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{3}{2n}}{apotema}$$

resulta que

$$apotema = \frac{3}{2n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

y, en consecuencia

$$\acute{A}reaPol(n) = \frac{3^2}{4n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

Utilizando lo que acabamos de deducir, completar la siguiente tabla:

Polígono	*Perímetro*	*Número de lados*	*Longitud del lado*	Área
Triángulo equilátero	3 metros			
Cuadrado	3 metros			
Pentágono regular	3 metros			
Hexágono regular	3 metros			
Héptágono regular	3 metros			

Ordenando, de mayor a menor, las áreas de los distintos polígonos regulares de perímetro 3 metros de la tabla anterior, ¿qué se puede deducir?

Conjetura 4

Para dos polígonos regulares de perímetro 3 metros, el que tiene mayor área es el que tiene mayor número de lados.

Si $3 \leq m < n$, entonces: $60^\circ = \frac{180^\circ}{3} \geq \frac{180^\circ}{m} > \frac{180^\circ}{n} > 0$

Por lo tanto:

$$\tan\left(\frac{180^\circ}{m}\right) > \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) > 0$$

Además

$$\begin{cases} 3 \leq n < m \\ 0 < \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \tan\left(\frac{180^\circ}{m}\right) \end{cases} \Rightarrow 4n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 4m\tan\left(\frac{180^\circ}{m}\right)$$

Luego

$$\acute{A}reaPol(n) = \frac{3^2}{4n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} > \frac{3^2}{4m\frac{\tan(180^\circ)}{m}} = \acute{A}reaPol(m)$$

Acabamos de justificar el siguiente resultado:

Para dos polígonos regulares de perímetro 3 metros, el que tiene mayor área es el que tiene mayor número de lados.

Orientación libre

Hacer lo mismo para polígonos de perímetro fijo *P* metros.

SUMA 37
junio 2001, pp. 111-112

Las gráficas de la prensa

Fernando Corbalán

MATES Y MEDIOS

ES DIFÍCIL que un profesor de matemáticas no haya encontrado algún «error» en alguna gráfica de la prensa (y si no lo ha hecho en las de la televisión es por la fugacidad del medio). Y no me estoy refiriendo a los famosos duendes de la imprenta (ahora informáticos porque los ordenadores son omnipresentes en las redacciones) que explican casi todo lo que va mal en un periódico, sino a severos problemas de fondo que no son el efecto de un despiste ocasional, sino causa habitual de disfunciones en las gráficas. Porque dando por supuesto la perspicacia del profesorado de matemática, lo cierto es que los errores menores abundan en las gráficas de prensa y no son raros los errores de bulto.

Creo que esa constatación nos tiene que llevar de entrada a dos reflexiones complementarias. La primera, puesto que los periodistas no son unos personajes atrasados, sino una muestra representativa de lo más culto de la sociedad, es la extensión y profundidad del anumerismo social. En el que es de suponer que el colectivo de profesores al que pertenecemos –no es cuestión de que todo sean flores– tiene alguna culpa, puesto que desde hace bastante tiempo todos los ciudadanos pasan varios años en nuestras manos en las obligatorias clases de matemáticas. Entendiendo el anumerismo como correlato matemático del analfabetismo: conocer los números, las operaciones y algunas nociones aisladas de otras partes de las matemáticas, pero no ser capaces de sacar ninguna consecuencia práctica de esos conocimientos en la vida diaria.

Y la segunda reflexión es que uno de nuestros objetivos como profesores tiene que ser lograr que nuestros alumnos y alumnas también vean ahora esos errores que nosotros detectamos sin necesidad de que los llevemos de la mano y lo continúen haciendo cuando pasen a ser ciudadanos, cuando dejen el sistema escolar (en la línea de lo que recogía un informe del ICMI de que la educación matemática debería capacitar para manejar la masa de datos con que nos bombardea la sociedad de la información). E incluso que presionen a los medios para que les den una mejor información, que incluye el hecho de que sea correcta matemáticamente hablando. Porque hay que decir que en los periódicos no tienen un gran interés en el tema. Por ejemplo, cuando se les dice que del hecho de que no se midan bien las unidades de los ejes hace que cambien los ritmos de crecimiento suelen responder que con que se vea que

sube y baja ya vale, que el hecho de que sea más o menos rápido da lo mismo.

Las gráficas serán cada día más frecuentes en los periódicos, porque es una forma rápida de transmitir una gran cantidad de información gastando poco espacio. Y como uno de los problemas actuales en todos los medios es la superabundancia de información, que hace un problema la selección y trasmisión de la misma con la mayor economía posible, las gráficas palian el problema. Porque, efectivamente, una gráfica bien hecha y leída por alguien que sea capaz de decodificarla proporciona de forma rápida, de un solo golpe de vista, una imagen global inmediata.

Y si la educación matemática debe servir para entender el mundo que nos rodea, es de primera necesidad que los actuales alumnos aprendan a entender las gráficas, y las gráficas de la prensa son un medio de lo más adecuado. Pero no hay que dar por supuesto que las gráficas se entienden sin un entrenamiento adecuado. Recuerdo lo que le oí hace muchos años a Claude Janvier referido a las gráficas cartesianas (que creo que es ampliable a todas las demás). Decía que los profesores damos por supuesto que nuestros alumnos entienden las gráficas, pero que la realidad es que mientras estamos explicando algún concepto –como puede ser el de derivada– nos van siguiendo con dificultad pero sin descolgarse del todo, hasta que decimos que todo eso queda claro en la gráfica y sin mayor explicación dibujamos un gráfico cartesiano y en ese momento el alumno medio dice , «¡puf, ahora si que ya no entiendo nada!». Es decir, que las gráficas suponen un código sofisticado difícil de entender, cuya comprensión hay que entrenar dedicándole tiempo y haciéndolo de forma planificada (como casi todo lo que tiene que ver con la enseñanza que queramos que tenga un efecto duradero).

La presencia masiva de medios informáticos en los periódicos, junto con la formación de grandes grupos multimedia, ha hecho aparecer en los diarios la infografía, con lo que hay en la misma lámina diversas presentaciones del mismo tema. Y paralelamente hay nuevos tipos de gráficos junto con los cartesianos (sobre todo pictogramas y diagramas de sectores), con lo que no cabe duda de que se ha mejorado la presentación y el atractivo, pero también han multiplicado las posibilidades de errores.

Mi propuesta educativa sobre gráficas incluye proporcionar al alumnado una carpeta o dossier con tipos variados de gráficos (con y sin errores) junto con una guía para detectar los errores en las mismas –del tipo de la que aparece a continuación– con los que iniciar un inventario personal que cada alumno tendrá que ir completando con las que vaya viendo en periódicos y revistas e incorporando a su dossier personal. Que puede (y debería) continuar durante años hasta que llegue a desarrollar el reflejo condicionado de analizar con detalle las gráficas (al menos las que le interesen) para ver su corrección. En cuanto a la plasmación práctica, puede ser planteado como un juego de pistas en el que cada cierto tiempo (una vez al mes por ejemplo) se pongan en común las nuevas gráficas interesantes que se hayan encontrado para que todo el mundo pueda detectar los errores (o los hallazgos) de las mismas.

Hay que decir que una guía del tipo de la que hay a continuación ya ha aparecido en varios medios de comunicación, pero sus consecuencias prácticas no son muy grandes, por desgracia. Se impone aquí, como en tantos otros aspectos del devenir social, una concienciación de capas amplias de la población que presionen a los medios de la importancia de una información matemática correcta. Para así intentar lograr que disminuyan drásticamente los errores matemáticos (y en particular los de gráficas), como ya ha pasado con las faltas de ortografía.

GUÍA DE URGENCIA PARA LAS GRÁFICAS DE LA PRENSA

La que aparece a continuación es una Guía para detectar y corregir los posibles errores en las gráficas de la prensa (o utilizando terminología médica, una guía para el diagnóstico y tratamiento de las gráficas).

1. Estudia con atención la gráfica para ver si entiendes a qué se refiere y qué fenómeno representa. Observa las unidades, los puntos destacados, las uniones entre ellos, si las variables son continuas o discretas... Si no estás muy seguro de entenderla, coméntala con algún amigo o guárdala para cuando estés más entrenado.
2. No consideres de entrada que la gráfica es correcta. Mírala detenidamente para ver si encuentras alguna incorrección. Pueden ser, entre otras, de los tipos siguientes: uniones de puntos por segmentos; distintas unidades en un mismo eje; que no aparezca ninguna unidad en alguno de los ejes; que la suma no sea 100 cuando hay porcentajes; que no haya relación entre las medidas y los sectores que las representan, que no haya relación entre la longitud de las barras y las magnitudes que representan; que no sean proporcionales las medidas de los pictogramas y las magnitudes que representan.
3. Si hay algún error (o errata) en la gráfica, haz de nuevo la gráfica corrigiéndolo y mira si el efecto es el mismo.
4. Si consideras que alguna gráfica no es apropiada (por el tipo elegido, las unidades o cualquier otro factor), haz otra que consideres más pertinente para formarte una mejor idea de la información.
5. Si hay más de una gráfica sobre un mismo fenómeno (en el mismo o en diferentes periódicos), estudia las concordancias o discordancias entre ellas, tanto en los datos como en la forma.
6. Estudia las concordancias o discordancias entre la información que proporcionan los titulares o el texto de la noticia y la que da la gráfica.

SUMA 37
junio 2001, pp. 113-115

Cubo de Muñoz

Grupo Alquerque*

MUCHOS SON LOS JUEGOS con los que nos entretenemos en nuestra infancia y que conservan su atracción e interés a medida que nos hacemos mayores. En algunas personas se convierten en un verdadero hobby, como vemos en el caso de los puzzles. Algunos de esos puzzles para adultos que se encuentran en cualquier tienda de juegos, tienen aplicación didáctica en Matemáticas, sobre todo en el apartado correspondiente a la geometría. Los más corrientes son, en el aspecto plano el Tangram Chino y los Pentominós, y en la parte espacial los Policubos, que permiten construir un cubo, siendo sin duda el más conocido el Cubo Soma.

Todos estos puzzles espaciales están formados por piezas construidas cada una de ellas a partir de varios cubitos (en total constan de 27); piezas que al unirse permiten obtener un cubo de lado triple al de los cubitos que las forman.

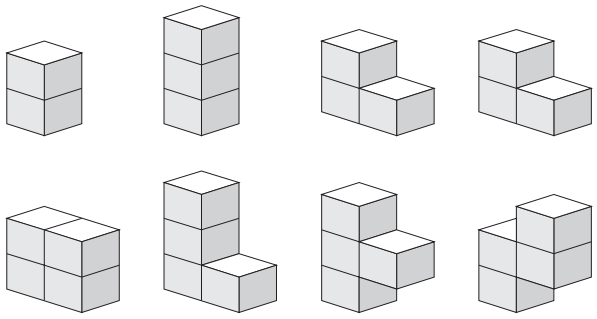
El Cubo Soma, formado por los seis tetracubos menos regulares (es decir, todos menos el 2x2x1 y el 4x1x1) y el tricubo no lineal, es el más conocido por encontrarse en los comercios con facilidad (no sabemos si los demás están comercializados) y porque además hay una gran colección de figuras que se pueden construir con él, desde formas geométricas hasta figuras de animales, muebles, arquitecturas, etc. Sin embargo, existen muchas otras disecciones del cubo que se pueden encontrar, bien en los libros (Corbalán, 1994) o a través de Internet. Entre ellos podemos encontrar aquellos cuyas piezas tienen varias alturas, pues se sitúan en más de un plano de los tres superpuestos que forman el cubo, como les ocurre a los cubos de Media-Hora, Lesk, Steinhaus o Nob; por otro lado, hay policubos en los que todas sus piezas son planas, entre los que quizás el más conocido sea el de O'Berine que está formado por nueve piezas iguales al tricubo en ángulo, o el Cubo Diabólico que es progresivo, es decir, sus piezas tienen todas distinto número de cubos, desde dos hasta siete.

* Los componentes del Grupo Alquerque de Sevilla son Juan Antonio Hans Martín (C.C. Santa María de los Reyes), José Muñoz Santonja (IES Macarena), Antonio Fernández-Aliseda Redondo (IES Camas), José Blanco García (IES Alcalá del Río) y Josefa M.ª Aldana Pérez (C.C. Inmaculado Corazón de María –Portaceli–).

JUEGOS

Nosotros comenzamos a diseñar particiones del cubo a partir del uso en clase del Cubo Soma. Uno de nuestros alumnos pretendía construir con las piezas del Soma una plancha rectangular, algo que evidentemente es imposible, pues varias de sus piezas tienen más de una altura. Con el fin de satisfacer las ansias de ese alumno, se diseñó el que llamamos Cubo de Hans formado por un tricubo, dos tetracubos, dos pentacubos y un hexacubo (Fernández-Aliseda y otros, 2000) que, aparte de la plancha rectangular de 3x9x1 y del cubo de lado 3, permite construir muchas otras figuras. Este cubo se encuentra, además, comercializado por la SAEM Thales dentro de la serie de materiales que ha comenzado a producir.

Para incluir en estas páginas un ejemplo de división del cubo no conocida, hemos seleccionado el Cubo de Muñoz. Los que conozcan los materiales de los que hemos hablado al principio, sabrán que si los doce pentominós se construyen con cubos, se obtienen los doce pentacubos planos con los que se pueden construir varios poliedros. Basados en esa idea, elegimos los policubos planos con menos de cinco cubitos, y así este cubo está formado por el dicubo, los dos tricubos y los cuatro tetracubos planos que pueden formar parte del cubo de lado 3 (es decir, sin los cuatro cubos puestos en línea). Como se necesitaban tres cubitos más para formar el cubo grande, se repite la pieza correspondiente al tricubo en ángulo. Las piezas son por tanto las siguientes:



Esta sencilla disección permite varias soluciones diferentes para el cubo 3x3x3, y construir muchas figuras distintas y fáciles, entre ellas hemos seleccionado las que aparecen en la página siguiente, algunas que se pueden construir también con el Soma y otras nuevas.

Lo interesante de este tipo de material es no tanto trabajar con cubos conocidos, como que sean los propios alumnos quienes diseñen sus propias disecciones. Es apropiado proponerlo como proyecto de trabajo con las siguientes partes:

1) *Fase de diseño*. En primer lugar los alumnos crearían sus propios policubos. Desde el punto de vista de la motivación esto es primordial pues están trabajando con algo que han creado ellos mismos y, además, no pueden copiarse unos de otros. Se pueden imponer las restricciones que se quieran a la hora de diseñar las disecciones del cubo: que las piezas sean planas o no (no es aconsejable que una pieza tenga cubos en las tres alturas posibles pues aunque simplifica el reconstruir el cubo dificulta el apartado 3 del proyecto); que no haya piezas con menos de tres cubos; que el número total de piezas sea cinco o seis; etc. Aspectos interesantes en esta fase son el dibujar a escala las piezas y la elección de una notación clara para reconstruir el cubo, algo que no es nada trivial.
2) *Fase de construcción*. A la hora de construirlo se pueden hacer las piezas con bloques *multilink*, pero nuestra experiencia nos aconseja utilizar cubitos de madera (que se pueden comprar a granel en alguna carpintería, especialmente si el carpintero es amigo o padre de algún alumno) que uniéndolos con cola blanca quedan perfectamente (y mucho más presentables y duraderos si después se pintan y barnizan).
3) *Fase de manipulación*. En la que los alumnos, además de reconstruir el cubo de lado 3, inventan y dibujan a escala figuras –y sus soluciones– con el cubo que han construido. En esta fase influye mucho la disección que se haya escogido.
4) *Fase de juego*. Los alumnos se intercambian los cubos y han de conseguir en primer lugar el cubo 3x3x3 y luego las figuras propuestas por sus compañeros.
5) *Fase de trabajo matemático*. Una vez familiarizados con las distintas disecciones del cubo se pueden realizar actividades matemáticas como las siguientes:

   a) ¿Cuántos monocubos, dicubos, tricubos, tetracubos,… distintos hay?

   b) Tomando como unidad la del lado de los cubitos base, calcular el área y el volumen de cada uno de los policubos que forman el cubo elaborado por el alumno.

   c) Tomando como unidad el cubo 3x3x3, ¿qué fracción del total representan cada uno de los policubos?

   d) …Y muchas otras cuyo desarrollo excede del espacio de esta sección sobre juegos y que merecen un tratamiento específico.

Este proyecto puede plantearse como una actividad interdisciplinar entre las áreas de Educación Plástica y Visual, Tecnología y Matemáticas.

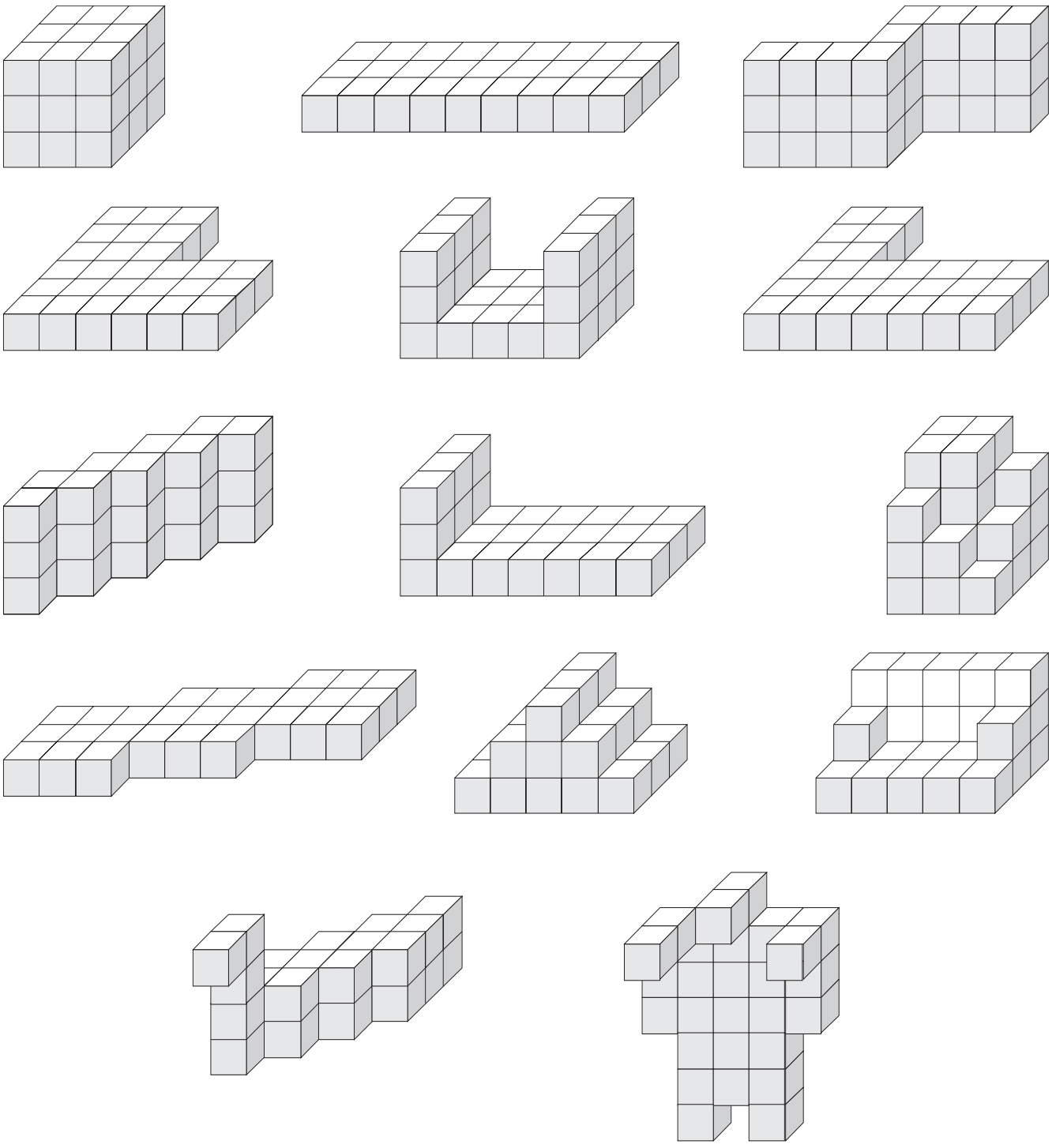
Existen actividades a mitad de camino entre utilizar una disección ya existente y crear una nueva, por ejemplo utilizar los pentacubos planos que antes hemos comentado

que permitían construir poliedros. Se le da a los alumnos un dicubo y los doce pentacubos, y han de elegir cinco piezas para que junto al dicubo puedan formar un cubo de lado tres. Para ello primero tienen que descartar los que no pueden entrar a formar parte de ese cubo y después seleccionar, entre los que quedan, las piezas que son encajables.

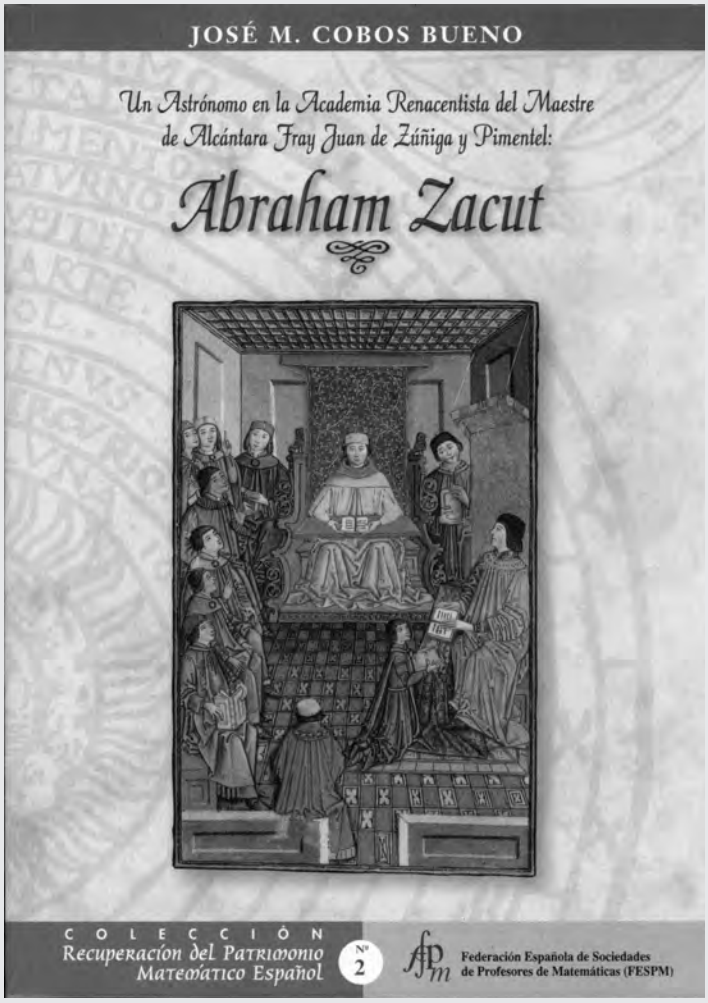
Referencias

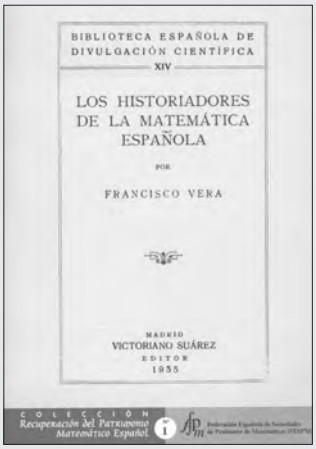
CORBALÁN YUSTE, F. (1994): *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*, Síntesis, Madrid.

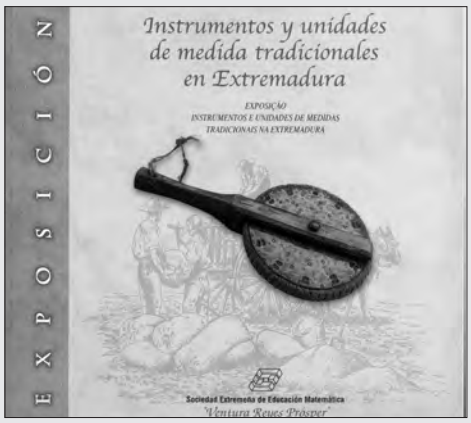
FERNÁNDEZ-ALISEDA, A., J.A. HANS, J. MUÑOZ, J. BLANCO y J. ALDANA (2000): «Bricolaje matemático: una alternativa en la búsqueda de recursos didácticos», *Epsilon*, n.° 46-47, Sevilla, 61-70.



PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN







SUMA 37
junio 2001, pp. 117-124

Matemáticas interactivas en Internet

Falvio Piñeiro Sarille

RECURSOS EN INTERNET

LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS y en concreto el ordenador e Internet, nos ofrecen magníficas posibilidades para tratar de forma diferente las Matemáticas en el aula.

En la Red podemos encontrar todo tipo de recursos relacionados con Matemáticas, y para cualquier etapa educativa: actividades y software, ejercicios y problemas (con su solución comentada en algunos casos), apuntes, exámenes, publicaciones en formato digital... El problema con el que nos encontramos es la enorme cantidad de información existente en la red. Si utilizamos un buscador para localizar páginas que contengan la palabra matemáticas, por ejemplo Altavista, nos encontramos con que en 75.000 de éstas aparece de alguna manera. Este hecho no debe desanimarnos. Nos pueden ayudar los buscadores realizando peticiones de búsqueda más finas, o consultando páginas que contengan recursos ya clasificados, como

http://www.redemat.com

En algunas ocasiones necesitamos interactividad por lo que buscamos páginas diferentes de las que contienen información con apuntes, ejercicios o incluso actividades. Al manipular o interactuar vemos lo que ocurre en cada instante y si tenemos en cuenta el atractivo que supone el uso del ordenador, podemos intentar trabajar con nuestros alumnos algunos aspectos concretos del currículo de forma diferente.

El uso de este recurso didáctico favorece los siguientes aspectos:

- Facilita la motivación de los alumnos.
- Ayuda al profesor a procurar una mejor atención a la diversidad dentro del aula.
- Favorece y aumenta la autoestima de los alumnos al comprobar sus propios progresos durante el proceso de aprendizaje.
- Puede modificar en algunos casos la visión negativa de la asignatura que tienen algunos alumnos.

Existen numerosos recursos de este tipo para todas las etapas educativas. Este artículo pretende dar una visión general de las posibilidades que ofrece esta herramienta de trabajo y en concreto este tipo de páginas.

Una pequeña muestra aparece a continuación atendiendo a diferentes etapas educativas, seguida de un cuadro resumen de recursos con su dirección en Internet.

Infantil

¿Quieres aprender y reconocer los números? ¿Además quieres sonido? En la página

http://www.elosiodelosantos.com

puedes encontrar, entre otras actividades manipulativas, una llamada «Los Primeros Números» para aprender los números con dos opciones diferentes. Al pasar el puntero del ratón sobre los números (que pueden aparecer ordenados o no, según desee el usuario), éstos aumentan de tamaño. En la opción «aprender», al hacer un clic sobre

Figura 2. www.elosiodelosantos.com

Figura 1. www.elosiodelosantos.com

una cifra, el tamaño de esta aumenta considerablemente durante un segundo, viéndose el texto correspondiente a ese número y escuchándose su nombre. En la otra opción llamada «preguntar» nos preguntan uno de los números que aparecen en la pantalla. Si la respuesta es correcta, el tamaño del numero aumenta durante un tiempo determinado para luego desaparecer. Esta página contiene además otros recursos para otros niveles educativos que podemos ver en el cuadro adjunto.

Primaria

Para aprender y mejorar las habilidades con las operaciones básicas, podemos utilizar la página

http://www.aplusmath.com

que nos ofrece muchas utilidades interactivas. Aunque está escrita en inglés es muy fácil moverse por su contenido, y los juegos que contiene son fácilmente manipulables. Podemos acceder directamente desde su página de inicio a sus cuatro secciones:

- «FlashCards» contiene actividades relacionadas con adición, multiplicación, raíces cuadradas y redondeo existiendo la posibilidad de crear nuestras propias actividades sobre fracciones, prioridad de operaciones, álgebra, superficies y fracciones equivalentes.
- «Juegos» interactivos relacionados con las operaciones básicas.
- »Ayuda para el trabajo en casa» (suma, resta, división y división entera).
- «Hojas de trabajo» para imprimir con las respuestas relacionadas también con las operaciones básicas.

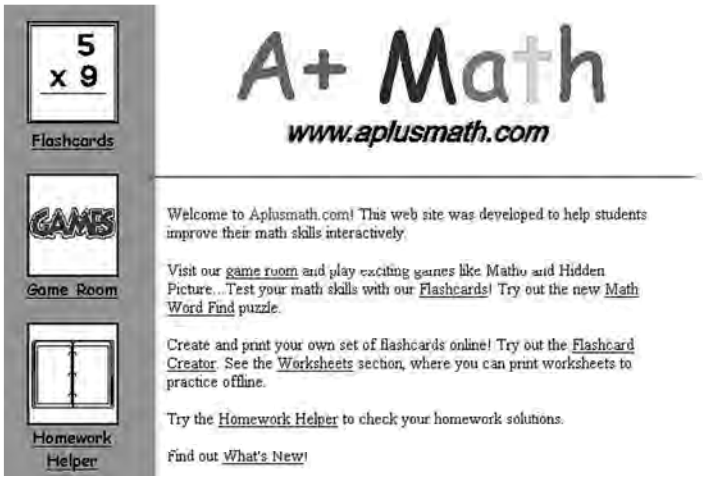


Figura 3

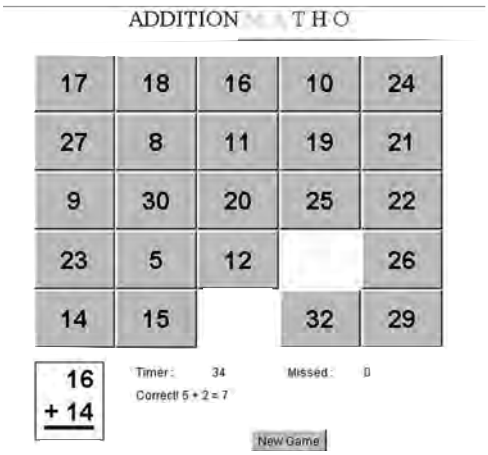


Figura 4. www.aplusmath.com

Secundaria

En la página Educaplus

http://www.educaplus.net

tenemos la posibilidad de utilizar un recurso sobre movimientos rectilíneos: introducción, vectores, suma de vectores, posición de un punto, vector de posición, trayectoria, distancia y desplazamiento, rapidez y velocidad, aceleración, ecuaciones, relatividad del movimiento. Por otra parte, podremos hacer un estudio gráfico de la pendiente de una curva, gráficas relacionadas con espacio, velocidad aceleración y tiempo.

En la página del Departamento de Matemáticas del IES Marqués de Santillana

http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/
/matem/inddep.htm

podemos encontrar recursos sobre temas geométricos clásicos y sobre otros de interés matemático aplicables al Taller de Matemáticas. Disponemos también de una unidad didáctica interactiva sobre funciones cuyos objetivos y metodología aparecen comentados en la misma página, abarcando su contenido desde una introducción al concepto de función hasta interpolación, simetrías y funciones importantes.

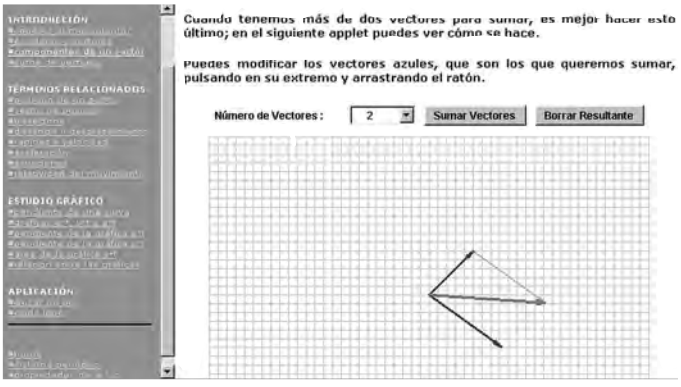


Figura 5. www.educaplus.net

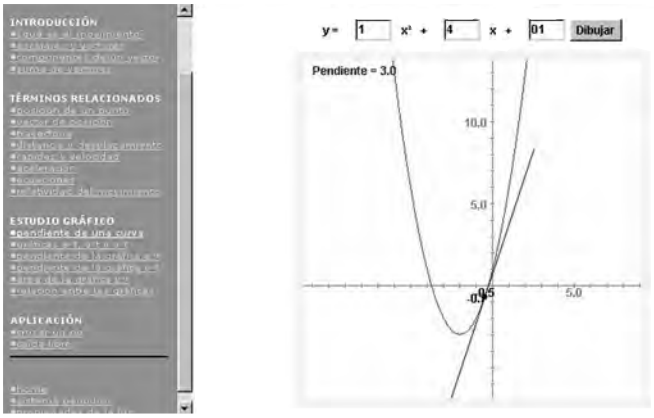


Figura 6. www.educaplus.net

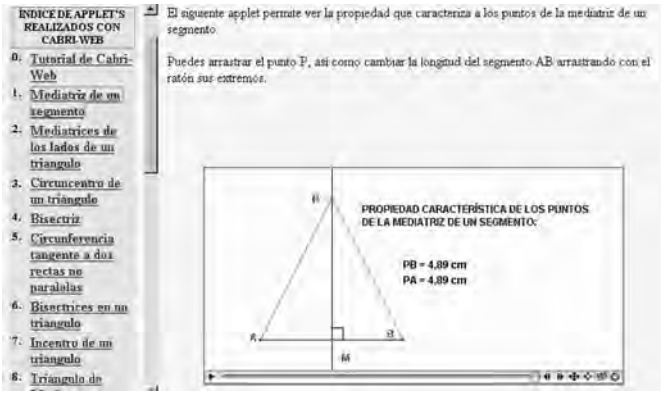


Figura 7. Página del Departamento de Matemáticas del I.E.S. Marqués de Santillana

Otros recursos interactivos disponibles en esta página nos permiten trabajar con los siguientes temas: mediatriz de un segmento, mediatrices de los lados de un triángulo, circuncentro de un triángulo, bisectriz, circunferencia tangente a dos rectas no paralelas, bisectrices de un triángulo, incentro de un triángulo…

Bachillerato

En las páginas del Departamento de Matemáticas del IES María Moliner

http://www.terra.es/personal2/matemoliner/

disponemos de unidades didácticas interactivas utilizando como base los applets del Proyecto Descartes (comentado en el cuadro adjunto). Disponemos de los siguientes temas: continuidad de funciones, vectores y números complejos.

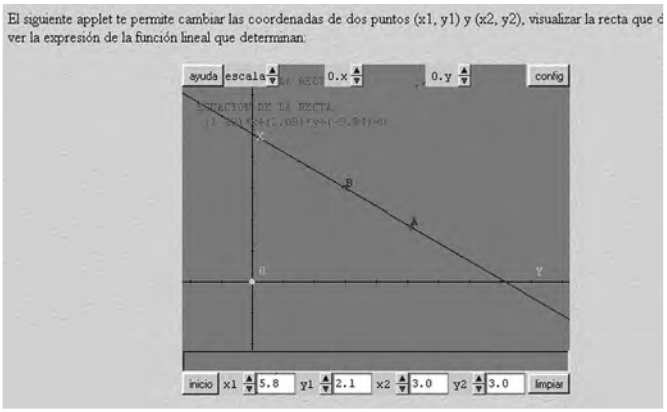


Figura 8. Página del Departamento de Matemáticas del IES Marqués de Santillana

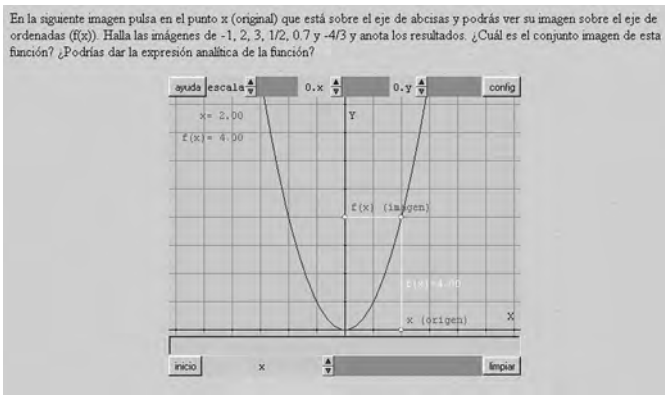


Figura 9. Página del Departamento de Matemáticas del IES Marqués de Santillana

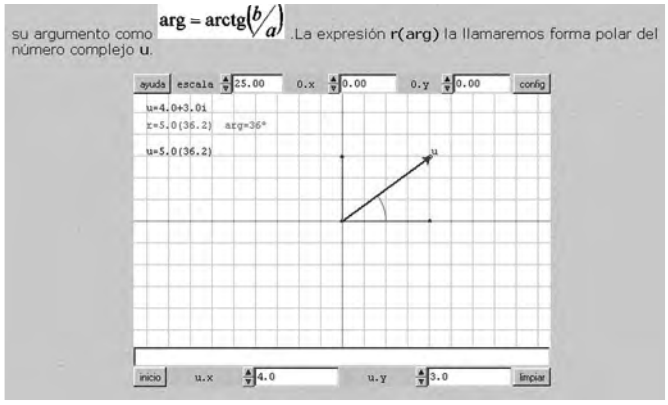


Figura 10. Página del Departamento de Matemáticas del IES María Moliner

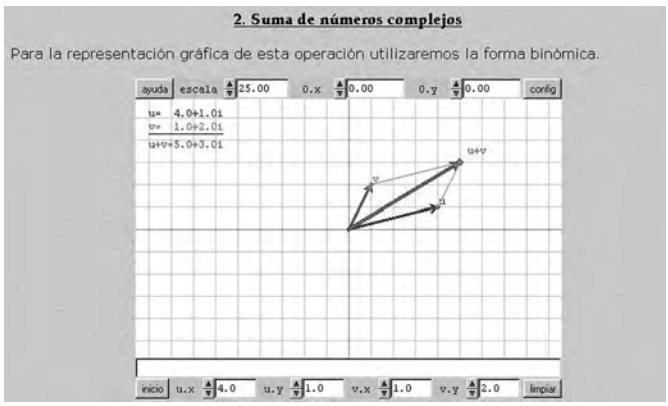


Figura 11. Página del Departamento de Matemáticas del IES María Moliner

El tema de continuidad de funciones comienza por el estudio de funciones particulares, continuando con la definición de continuidad y su interpretación geométrica para finalmente trabajar con los distintos tipos de discontinuidades.

En cuanto a la unidad didáctica de vectores está dedicada a movimientos en el plano: vector de posición, vector fijo, vector libre, traslación de un punto y de una figura, suma de vectores y finalmente traslaciones y suma de vectores.

La última unidad, pensada para el Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, está dedicada a los Números Complejos y dividida en formas, representación y operaciones.

Otra sección dentro de estas páginas está dedicada a la Matemática Recreativa. Según los autores de estas páginas «en todos estos juegos clásicos debes utilizar la lógica y el ingenio, bien para resolver puzzles o para ganar al ordenador». Estos contenidos recreativos aparecen clasificados en tres apartados: ilusiones ópticas, acertijos matemáticos y juegos on-line, siendo este último bastante extenso e interactivo.

Universidad

En la página *NonEuclid Hyperbolc Geometry Article + Software Applet* cuya dirección es

http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/

encontramos abundante documentación sobre Geometría no Euclídea, desde conceptos básicos (Geometría no Euclídea, Geometría Esférica, Geometría Hiperbólica, pseudoesfera, líneas paralelas, forma del espacio: espacio curvo), axiomas y conceptos avanzados. Contiene también una amplia sección dedicada a bibliografía y un

applet java con suficiente documentación para poder utilizarlo.

Las actividades que podemos realizar utilizando este applet java abarcan temas como ángulos, ángulos adyacentes, distintos tipos de triángulos, paralelogramos, polígonos y círculos.

Sin lugar a dudas la implementación de aplicaciones *java*, *javascirpt*, *cabrijava*, *cabriweb* o *Shockwave* en las páginas *web* nos permiten esta interactividad comentada en los párrafos anteriores. No nos debe preocupar qué tipo de programación usa el autor de la página que estemos visitando. Lo verdaderamente interesante es que funcione y la podamos aplicar en nuestras clases.

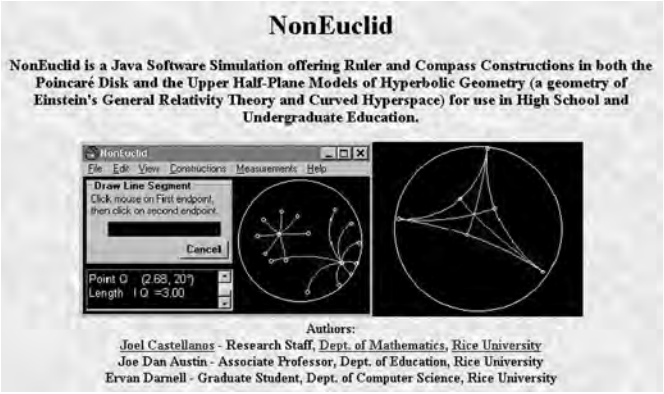


Figura 12. /math.rice.edu/~joel/NonEuclid/

Dirección	*Descripción*
http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/index.htm	Recursos, enlaces, agenda y trabajos. *Software* en inglés y catalán. Olimpiadas en Cataluña. Canguro Matemático. *Mathplets* (*applets* matemáticos: fracciones, integrales, vectores, transformaciones geométricas, trigonometría, reglas de cálculo, cálculo del día juliano, representación de funciones, geometría sólida constructiva, Descartes, Distribución Normal, cálculo simbólico, estadística).
http://www_sfb288.math.tu_berlin.de/eg_models/index.html	Página en inglés cuyo contenido se basa en una colección de modelos geométricos manipulables clasificados en curvas, matemáticas discretas, geometría elemental, construcciones geométricas, nudos, geometría no euclídea, sólidos y superficies.
http://sites.uol.com.br/sandroatini/	Página procedente de Brasil con contenido matemático clasificado en desafíos (problemas con solución), publicaciones y textos electrónicos, colección de *applets java* (ángulos, funciones trigonométricas, triángulos y varios), juegos, gráficos (representación gráfica de funciones utilizando un *applet java*), software, debate, actividades para los más pequeños
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4	Entretenimiento, currículo, experiencias, recursos y enlaces. *Software*, libros, Escher. Fibonacci: el Número de Oro. Problemas: taller de matemáticas. IRC: canal sobre educación. Historia: principales símbolos a través del tiempo. TVE2: La Aventura del Saber (Matemáticas), títulos de los 10 programas de 24 minutos de duración. Acertijos. Problemas de Selectividad Logse de Madrid en formato zip. Juegos: juego en java. Vídeo y Matemáticas.
http://www.mb.hs_wismar.de/Mitarbeiter/Pawletta/00Uwe/formel.html	Esta página contiene un *applet java* que permite realizar operaciones de cálculo simbólico: derivadas, integrales, Series de Fourier, Series de Taylor.
http://www.scienceacademy.com/maestro/index.html	Páginas interactivas con preguntas y respuestas sobre: sumas, restas, multiplicación, división, redondeo, escribir números, prioridad de operaciones, factores comunes, perímetros, distacia_tiempo, problemas con palabras, mapas, resta de decimales, división de decimales, exponentes, gráficas de barras, problemas de ingenio.
http://www.vnet.es/~iesarroyo/matematicas.htm	Página del Departamento de Matemáticas del IES Arroyo de la Miel. Taller de Matemáticas. Proyecto conjunto: problemas y cuestiones planteadas en un intercambio sobre la enseñanza de las Matemáticas con un centro inglés y otro francés. *Applets Java* sobre la función cuadrática y el Teorema de Pitágoras. Enlaces.
http://www.arrakis.es/~jasaiz/Cambio.htm	Página con una calculadora (en java) que permite convertir euros a pesetas y viceversa.

Dirección	*Descripción*
http://info.lboro.ac.uk/departments/ma/gallery/index.html	Página con imágenes relacionadas con las matemáticas. El contenido está clasificado en categorías: El Conjunto de Mandelbrot. Conjunto de Julia. Dinámica molecular. *Applet java*: iteración en sistemas de funciones. Idioma: inglés.
http://www.ctv.es/USERS/iescandas/	Página de Matemáticas del IES de Candás (Asturias). *Applets java* para generar ejercicios y comprobar las soluciones sobre rangos de matrices, fracciones, matrices inversas, factorizar, determinantes, contraseñas y sistemas de ecuaciones. Disponible también en Gallego.
http://vitalsoft.org.org.mx/~jlabreu/	*Applets java* clasificados en *Nippes* de simulación. (Descartes. Difracción de la luz: la doble ranura. Una mesa de billar.) *Nippes* de datos. (*Nippe* de figuras. *Nippe* de composiciones. Comarcas de Cataluña). Otros ejemplos de *nippes*. (Los poliedros regulares. El conjunto de Mandelbrot. El triángulo de Pascal. Constelaciones y Estrellas. Superficies en 3D). Applets con imágenes. (*Zoom* por el espacio. Cubo con fotos. Video 360 en un *applet*)
http://www.coe.tamu.edu/%7Estrader/math166H/LeastSquares/ls2.html	Esta página contiene un *applet java* que permite trabajar con correlación utilizando tablas o directamente desde la nube de puntos.
http://www.pntic.mec.es/Descartes/index.html	Unidades Didácticas que se están desarrollando en el PNTIC con el *nippe* Descartes. Estas unidades están clasificadas por niveles: primer y segundo de ESO, 4.° de ESO opción A y B, primer y segundo curso de los Bachilleratos de la modalidades de Humanidades y Ciencias sociales, y de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud o Tecnológico. Otros niveles y aplicaciones (Las cónicas, función exponencial y logarítmica, la tirolina, la gaussiana, los polinomios, ecuación de tercer grado en dos variables y curvas en coordenadas polares). Páginas con *java*.
http://www.arrakis.es/~fcoquiles/index.htm	Actividades y recursos clasificados en ESO y Bachillerato. Sobre la ESO, los contenidos son: Ángulos de un triángulo. Geometría en el triángulo. Cuadrilátero cíclico. Tha. de Pitágoras (1). Tha. de Pitágoras (2). Triángulo rec. inscrito. Sólidos de Platón . En cuanto a Bachillerato, los recursos se clasifican en: Ec. vectorial de una recta. Vector en R3 (Repres). COU (con ejercicios de selectividad, software (Geo3, ejercicios e instrucciones) y ejercicios de programación lineal y examen de cálculo matricial). Gráfica/Función (Puzzle1). Utilidades Derive. Func.Trig. elementales. Utiliza *applets java*.
http://www.xtec.es/~jlagares/integral.esp/integral.htm	Página (con *applets Java*) para aprender todo lo relacionado con la integral definida. Forma parte de la Página de recursos *educatius d´en Jordi Lagares Roset*.
http://www.cut_the_knot.com	Puzzles, probabilidad y geometría. Página del profesor Alexander Bogomolny especialista en algoritmos numéricos, herramientas de programación y gráficos. Aplicación de applets java. Gran colección de juegos y puzzles (en *java*). Problemas y teoremas. Animaciones en formato avi (banda de Moebius, transformación de un cubo en una esfera, creación de un toro, de la botella de Klein...). Enlaces.
http://www.homewood.net/java/index.html	Esta página contiene un *applet java* que permite resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado.
http://www.ies.co.jp/math/java/index.html	Colección de 264 *applets java* de contenido matemático clasificados en siete categorías. Aplicaciones en CabriJava que también permiten interactividad.
http://www.matemagia.com	Matemática recreativa: test multidisciplinar con varios niveles, series, enigmas, pruebas para pensar y razonar (oráculo, supéralo), personaje oculto (descubrir un personaje con varias pistas). Juegos con *applets java*.
http://liebre.itcj.mx/paginas/matematicas/	Extensos apuntes de cálculo vectorial, diferencial e integral. Índice de definiciones y teoremas. Utiliza Java.

Dirección	*Descripción*
http://xavier.gourdon.free.fr/Constants/constants.html	Completa página en inglés dedicada a las constantes clásicas y sus algoritmos de cálculo. La información está clasificada en constantes (Arquímedes, e, log(2), raíz cuadrada de 2, Constante de Arpery, records de cálculo de constantes. Algoritmos (Precisión arbitraria en lenguajes de programación, FFT –Fast Fourier Transform– algoritmo para la multiplicación de números grandes), método binario de división de series, cálculo de la inversa y raíz cuadrada con alta precisión, Método de Newton, aceleración de convergencia de series incluyendo series alternadas, cálculo del n-simo dígito de pi sin calcular los demás). Programas (*PiFast*: para calcular los dígitos de pi, programa para calcular pi con 12 billones de cifras, código de programas en *C* para calcular diversas constantes, programa *on line* en *java script* para calcular Pi, e, raíz cuadrada de 2, el Número de Oro, logaritmo de 2 y logaritmo de 3). Varios (clasificación de los números –irracionales, trascendentes,...–, comprobaciones de que Pi y log(2) son irracionales, Función Gamma, Función Z de Riemann, Números de Bernoulli, constantes de la teoría de números y notas históricas sobre constantes). Teoría de Números (calculando primos, proyecto pi(x), cálculo on line de los primos menores de 1000, 5000, 10000 y 30000 mediante *java script*). Bibliografía y enlaces sobre el tema.
http://www.seanet.com/~ksbrown/	Esta página (en inglés) contiene artículos clasificados en teoría de números, combinatoria, geometría, álgebra, cálculo y ecuaciones diferenciales, probabilidad y estadística y teoría de conjuntos. Contiene una extensa sección sobre historia de las matemáticas. Animaciones en *Java*: poliedro y dodecaedro de Kepler.
http://www.fortunecity.es/imaginapoder/vente/628/	Página sobre triángulos en catalán. Elementos y propiedades de los triángulos. Criterios de igualdad y clasificación. Teoremas con *applets* en *CabriJava*: Teorema de Pitágoras, Recta de Euler, Napoleón, Teorema de Ceva, Teorema de Viviani, Circuferencia de Euler.
http://www.uv.es/~buso/index.html	Modelos globales y simulación con gran cantidad de documentación relacionada (en varios formatos). Escher (biografía _ selección de grabados _ otros grabados _hagamos mosaicos _ enlaces y bibliografía). Tangram: *appleet java* para jugar en línea. Otras propuestas con solución en archivo comprimido zip. IQ test.
http://www.geocities.com/campis1/conics.html	Esta página (Secciones Cónicas y Geometría Analítica) tiene por objetivo apoyar al aprendizaje de las matemáticas y en especial la geometría analítica utilizando un recurso que nos permite manipular (utiliza *applets java*) elementos claves de cada figura con la única intención de descubrir qué pasa al modificar alguno. Puntos en el plano, rectas, parábolas, secciones de cónicas.
http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm	Páginas dedicadas a temas matemáticos generales, de tipo didáctico y divulgativo, hojas de problemas para alumnos, soluciones a problemas, modelos de exámenes, curiosidades, etc. Concurso Matemático Año 2000. Páginas interactivas que utilizan *applets Java* y *CabriWeb* sobre algunos temas geométricos clásicos y sobre otros de interés matemático: 1. Circunferencia de los nueve puntos. 2. Punto de Fermat. 3. Triángulo Órtico. 4. Triángulo de Morley. 5. Teorema de Ceva. 6. Recta de Simson. 7. Recta de Euler. 8. Triángulos de Napoleón. 9.Teorema de las Bisectrices. 10. Circunferencia de Apolonio. 11-12. Hipocicloides y epicicloides. 13. Cuadratura del rectángulo. 14. Triángulo de Pascal y Triángulo de Sierpinski. 15. Teorema de Bolzano. Unidad didáctica introducción al concepto de función (con *applet java*). Problemas para alumnos de 1.° de Bachillerato (Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales). *Software* matemático comercial y *freeware* comentado con *links*.
http://www.arrakis.es/~fcalbet/index.htm	Problemas (algunos con solución). Ejercicios de cálculo. Programas en *java* y *Vbasic*. Programa en *java* sobre fractales.
http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/home.htm	Unidades didácticas: vectores (con *Java*). Proyectos educativos. Intercambio de problemas. Apuntes (números complejos). Enlaces en español e inglés. Recursos para el aula con *Java*. IRC de educación del CPR de Hortaleza (Madrid).

Dirección	*Descripción*
http://olmo.pntic.mec.es/~aserra10/	Podemos encontrar entre otras cosas, una sección de problemas con solución (El abuelo de Evaristo, El abuelo y la abuela de Evaristo, El País de las Maravillas, Homenaje a Fermat, El Teorema de Tales). Trabajos (teoría de números y problemas (aún no disponible) para la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, de segundo de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales). Enlaces y programas en *javascript*: Diofanto (resuelve ecuaciones diofánticas), Congruencias (resuelve sistemas de congruencias lineales), Suma de vectores (animación geométrica), Diferencia de vectores (Animación geométrica), Producto número *x* vector (animación geométrica).
http://www.mja.org.mx/Prometeo/index.html	Prometeo _ Educación Interactiva en la Red. Utiliza *applets* muy sencillos de configurar que permiten desarrollar interacciones con los datos más diversos. Figuras geométricas. Las funciones reales. Conjuntos de Mandelbrot. Poliedros Regulares y Superficies en 3D. Conjunto de Mandelbrot.
http://www.malhatlantica.pt/mat/	También localizable en http://matematica.web.com/ Excelente página portuguesa en la que se trata la utilización de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (*Java*, *Sketchpad*, *Excel* y *Cabri*). Noticias y novedades. Materiales en forma de ficha con formato pdf clasificados en 7.°, 8.°, 9.° año y otros materiales, con explicaciones sobre el software utilizado para su desarrollo y aplicación en el aula. Cada año está clasificado en unidades didácticas. Enlaces en portugués, inglés, geometría para profesores, problemas y actividades. Enlaces para alumnos. *Software*. *Applets Java* (Teorema de Pitágoras). Publicaciones y Debate.
http://www.math.uah.edu/stat/	Página (muy completa, abarca todo: desde espacios de probabilidad, combinatoria, distribuciones, estimación, test de hipótesis… en formato html) en inglés sobre probabilidad y estadística . Contiene una extensa colección de *applets java* utilizados para simulación.
http://vinci.inesc.pt/lp/	Página en inglés que contiene un applet java que permite resolver los problemas de programación lineal.
http://www.almide.demon.co.uk/html/Complex/Complex_for_Java.html	Contiene un *applet java* que nos permite trabajar con números complejos de forma gráfica. Inglés.
http://kalamation.com/Fitter/	Página en inglés que contiene diversos utilidades interactivas (applets java): matrices, regresión…
http://www.javathings.com/graphapplet.asp	Potente *applet java* que permite representar funciones de forma similar a una calculadora gráfica. Inglés.
http://www.poliplus.com/javaproducts.htm#Math	Potente applet java (gratuito con fines educativos) que permite trabajar con cálculo simbólico de forma similar al *Derive*. Inglés.
http://www.best.com/~ddee/MathIndex.html	Página en inglés con *applets java* para trabajar las matemáticas de forma alternativa a la tradicional. Esta web está dirigida a edades comprendidas entre los 5 y 12 años. Los alumnos pueden trabajar de forma autónoma (el profesor configura previamente las tareas y el nivel de dificultad) delante del ordenador que analiza su progreso.
http://www.geocities.com/campis1/conics.html	Página sobre geometría analítica utilizando un recurso que nos permite manipular elementos: *applets java*. Rectas, parábolas y secciones cónicas.
http://www.ibad-laspalmas.com/cei_archivos/cei.htm	Encontrarás un curso de inferencia estadística para bachillerato, que incluye actividades, hojas de cálculo y el uso del *applet* interactivo Descartes. Introducción, teoría de muestras. Teorema Central del Límite. Estimación. Estimación de la media. Estimación de la proporción. Test de contraste de hipótesis. Naturaleza del contraste de hipótesis. Método del *p*-valor. Cálculo del error del tipo II. Márgenes de error. Bibliografía. Documentos y recursos.
http://www.quia.com/jg/7263.html	Página en inglés que contiene juegos en *java* para aprender los números romanos.

SUMA 37
junio 2001, pp. 125-128

Por una lectura detenida de la Historia

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez

DESDE LA HISTORIA

EN EL ARTÍCULO ANTERIOR de esta sección –«Leyendo entre líneas la Historia»– planteábamos el problema de la continuidad entre el álgebra de Babilonia (probablemente su arranque más prometedor en la Antigüedad) y la de Bagdag (el comienzo de un brillante desarrollo). Se suele establecer a partir de un posible camino cuyas etapas serían Mesopotamia-Alejandría (Diofanto)-comunidades nestorianas[1] instaladas en Oriente Próximo y en Jundishapur[2] (Irán)–Bagdad, pero no hay documentos que prueben nada de forma fehaciente. Y hay que añadir, además, las permanentes relaciones de Persia con India y las posibles de ésta con la antigua Mesopotamia[3]. Un hipotético –aunque probable– y accidentado viaje de ida y vuelta para volver a nacer en el mismo suelo mil quinientos años después. Por nuestra parte, hemos aprovechado para recordar las aportaciones matemáticas de Mesopotamia, y hemos seleccionado dos temas.

El sistema de base 60

¿Cómo explicar la elección de un número tan alto como base del sistema de numeración? Se suele alegar su interés aritmético, dada la gran cantidad de divisores que tiene, pero a pesar de su pedigrí (ya la insinuó Teón de Alejandría en el s. IV[4]) nos parece una explicación filosóficamente idealista en exceso. En los comienzos influye más lo experimental que la teoría. Otra posibilidad es conectar el 60 con la Astronomía. Si el Sol tarda 360 días –un número habitual en calendarios de la Antigüedad– en dar una vuelta completa alrededor de los sacerdotes observadores, éstos podrían haberse decidido por 60, un valor más manejable pero igualmente relacionado con sus números y por tanto con el esoterismo cultivado sin duda por su casta. El problema en esta conexión, que probablemente todos hemos sugerido en clase alguna vez, es decidir qué fue primero, el huevo o la gallina. Para anotar regularidades es necesario un mínimo sistema numérico previo, pero, en contrapartida, nada impide pensar que fuera perfeccionado o modificado como consecuencia de las mismas.

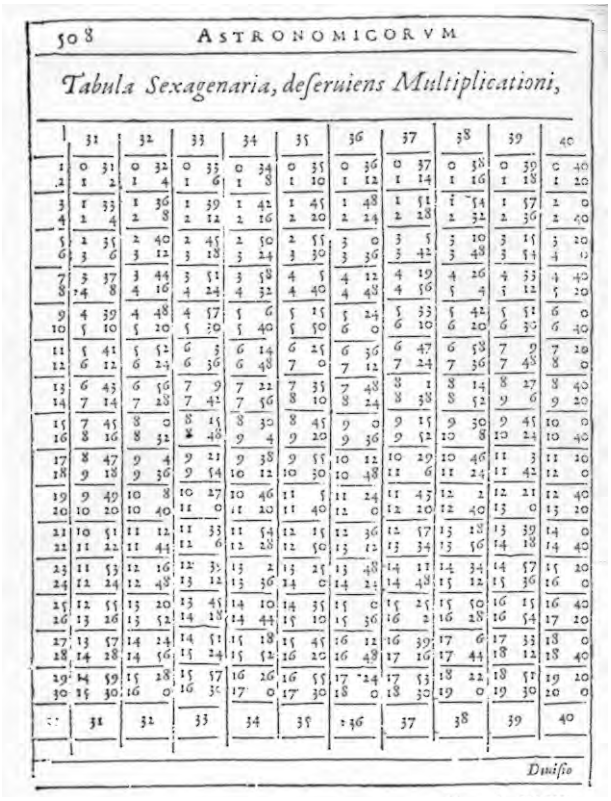
En cualquier caso, esta segunda explicación[5] vuelve a confiar demasiado en las ideas como instrumento decisorio en elecciones complicadas pero muy conectadas con el mundo material. G. Ifrah (1997) propone otra tan natural que sorprende no haber pensado en ella anteriormente: doce falanges en una mano y un pulgar para contarlas, y cinco dedos en la otra para cada bloque de doce. En total 60. La técnica de recuento con las falanges está hoy vigente en amplias zonas, desde Egipto hasta la India, y por lo que hace a la base 5 ha sido una de las más utilizadas, por su naturalidad y como forma de abreviar la representación de números en base 10. De la combinación de las dos tradiciones surgiría la base 60. Se puede pensar incluso que se produjo una confluencia de modelos procedentes de dos de los pueblos que coincidieron en la región, según el clásico proceso invasión[6]–mestizaje cultural.

Dentro de esta misma línea de razonamiento de corte materialista resulta atractiva una simplificación de la propuesta que hizo Neugebauer –el gran investigador de las matemáticas egipcias y babilónicas– en 1927. Podemos pensar en una unidad de medida de longitud cualquiera, antropomórfica (codo, palmo, paso) o no, estandarizada sobre un trozo de madera, en el que se van dibujando las muescas que se corresponden con 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6. Una vez dibujadas todas, la distancia más pequeña entre dos de ellas corresponde a 1/60.

Ninguno de estos argumentos es concluyente por sí mismo. En cualquier caso, sí parecen obvios los inconvenientes prácticos derivados de adoptar un número excesivamente alto como base del sistema de numeración. El más inmediato surge a la hora de multiplicar. ¿Cómo memorizar 60 tablas de 60 resultados cada una?[7] Sabíamos que en Babilonia se habían usado tablas de mutiplicar como auxiliar para el cálculo[8], pero no nos habíamos planteado lo que eso suponía ni el porqué. Como siempre la vida va por delante, y la reflexión ha venido motivada por un hallazgo casual.

Evidentemente no estamos hablando de una tablilla cuneiforme de barro cocido, sino de una página de la «Tabula Sexagenaria» de las *Efemérides* de A. Argoli (1659)[9]. Por fortuna no miramos el título, lo que nos permitió el placer (ingenuo, sí, pero placer) de descubrir de qué se trataba. La construcción de los objetos –aunque sean teóricos– aporta una información casi sensorial diferente de la que proporciona la mera lectura informativa. Resultó divertido operar con la tabla –hay calculadoras para evitar el trabajo tedioso– y resultó también útil para comprender el avance que supuso esta primera «máquina» de calcular artificial[10].

Da la impresión de que la *Tabula* de Argoli incluiría los productos de los treinta primeros números por todos los números desde 1 hasta 60. La propiedad distributiva evita los otros 1800 resultados. En base 10, claro, no es necesario recurrir a ella. Acostumbrados a conceder a las ideas toda la capacidad explicativa de los distintos aconteceres, consideramos muy poco las consecuencias obligadas de la plasmación práctica de los diferentes pasos que se dieron al ir avanzando. Y, desde luego, si se hubiera optado por la base 2 o la base 5, las tablas no habrían sido necesarias.


508 ASTRONOMICORVM

Tabula Sexagenaria, deseruiens Multiplicationi,

Muestra de la tabla sexagenaria
(Argoli, A. (1659). «Efemérides», págs. 508-509)

Ya lo hicimos una vez[11], pero entonces no disponíamos de la tabla. ¿Por qué no jugar de nuevo?

		33;	35;	09
x				22
			3;	18
		12;	50	
12;		06		
12,	18;	53;	18	

¡La tabla lo resuelve todo! Sólo es necesario para efectuar multiplicaciones con su ayuda, saber sumar y, por supuesto, entender cómo funciona un sistema posicional. Como nuestra tabla es incompleta hemos tenido que recurrir a la propiedad distributiva para 22 x 09.

22 x 09 = 22 x 40 – 22 x 31 = 14; 40 – 11; 22 = 3; 18

Sin molestarnos en pensar hemos obtenido respuesta a un cálculo complicado. En sistema decimal,

120909 x 22 = 2659998.

Fracciones poco periódicas

La sombra de la tradición es alargada. Los árabes emplearon a la vez dos sistemas de numeración: decimal para el comercio y decimal y sexagesimal para los cálculos científicos. Pero a mediados del s. XVII ya hacía 200 años que al-Kashi había propuesto emplear solamente fracciones decimales. Sin duda no fueron las ventajas aritméticas que insinuaba Teón de Alejandría las valedoras de esta pervivencia pero, una vez más, nos vamos a dejar fascinar por las maravillas del sistema sexagesimal.

En efecto, en base 60, de todas las fracciones unitarias con denominador hasta 12 ($1/n$, con $1 \leq n \leq 12$), sólo son dos periódicas, mientras que en base 10 lo son seis. Si empleamos la notación 3,12;11 para expresar $3 + 12/60 + 11/60^2$, podemos comparar sus expresiones en las dos bases.

FRACCIÓN	BASE 10	BASE 60
1/2	0,5	0,30
1/3	$0,\overline{3}$	0,20
1/4	0,25	0,15
1/5	0,2	0,12
1/6	$0,1\overline{6}$	0,10
1/7	$0,\overline{142857}$	$0,\overline{8;34;17}$
1/8	0,125	0,7;30
1/9	$0,\overline{1}$	0,6;40
1/10	0,1	0,6
1/11	$0,\overline{09}$	$0,5;27;16;21;\ \overline{10;54;32;43;38}$
1/12	$0,08\overline{3}$	0,5

¿Qué interés podía tener esto para el cálculo? Los escribas de la antigua Mesopotamia efectuaban las divisiones multiplicando el dividendo por el inverso del divisor, para lo cual existían tablas con los inversos de los primeros números, y no parece que tuvieran una idea muy clara sobre los decimales periódicos. De hecho, en las tablas de inversos faltan 1/7 y 1/11, y en todas las tablillas que han llegado hasta nosotros solamente en una aparece una acotación de 1/7 por defecto: 0,8;34;16;59 y otra por exceso: 0,8;34;18. Los decimales exactos, por tanto, además de facilitar el cálculo permitían evitar resultados aproximados.

Pero abandonemos la Historia un momento a favor de la didáctica. La elaboración del cuadro anterior puede ser una buena propuesta para alumnos y alumnas de 4.° ESO o 1.° de bachillerato. ¿Cómo definir y justificar un algoritmo que permita obtener los períodos en base 60? Evidentemente, igual que en base 10, pero el cambio de contexto obliga a revisar lo que ya se conoce para adaptarlo. Y lo mismo para otra cuestión que ha quedado abierta: ¿qué denominadores producen decimales periódicos en base 60?

El olvido de la heurística

¿Ha sido Ifrah el primero en elaborar la conjetura citada sobre el origen de la base 60? La hemos encontrado en él y en G. Gheverghese Joseph, pero ninguno de los dos cita a otros autores. En cualquier caso nos sorprende la poca popularidad que tiene (entre el público en el que puede tenerla, claro), y nos parece que es una muestra más de la reticencia de la comunidad de historiadores de las matemáticas a proponer explicaciones de tinte «materialista». Lo empírico, lo material, la vida real, está subliminalmente marginado en el entorno de las matemáticas. Veamos otro ejemplo en un campo distinto.

En Taton (1971) se comenta un problema recogido en una tablilla cuneiforme, la denominada AO 6484, en el que se propone sumar la serie $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$. Y afirma el autor:

> Se da la respuesta sin comentario: se toma el último término disminuido en 1 unidad y se añade el número resultante al último término. De hecho, el cálculo realizado por el escriba corresponde a la fórmula moderna:
>
> $$S = a(q^n-1)/(q-1),\ \text{siendo } q=2,\ a=1 \text{ y } n=10;\ \text{o sea:}$$
> $$S = 2^{10} - 1 = 2^9 + (2^9 - 1)$$

La notación en los manuales de historia suele estar a veces menos matizada, no se sabe si por autores o por editores. Seguramente habríamos deseado ver S_n y a_1, pero la fórmula es tan conocida que no plantea ninguna dificultad de comprensión. Pero lo que interesa es que, en realidad, el cálculo que se detalla literariamente no corresponde a una aplicación directa de la fórmula, como demuestra el último paso. La fórmula da $2^{10} - 1$, y lo descrito $2^9 + (2^9 - 1)$. No imaginamos al escriba obteniendo la primera expresión (por supuesto retóricamente) y modificándola para obtener la segunda. Si el escriba, por tanto, estaba en posesión de una *fórmula aritmética científica (sic)*, no debía tener ésta el aspecto en formato retórico que tiene la que manejamos hoy día en simbolismo algebraico. Es decir, el listado de operaciones es distinto en las dos redacciones del método para alcanzar la respuesta.

Dada la forma en que se redactaban papiros y tablillas, el problema de cómo obtuvieron sus resultados los sabios de la Antigüedad permanecerá inevitablemente abierto. Los manuales recogen en algunos casos conjeturas metodológicas que, no puede ser de otra manera, están sesgadas por la ideología matemática de su autor. En este caso en el Taton no se llega a sugerir una explicación. Simplemente se comprueba que nuestra actual rutina de resolución termina conduciendo a la misma respuesta. En realidad, si olvidamos la obsesión por ir siempre de lo general a lo particular, y actuamos a la inversa; si recuperamos algo tan natural

desde el punto de vista de la heurística como la inducción, la «fórmula» del escriba aparece sin ningún problema. Basta con anotar resultados y observar regularidades.

$$1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

No hace falta ser especialmente observador para detectar el zigzag que relaciona el resultado de una fila con el de la anterior. La suma global de una fila más el último número de la suma de la siguiente fila da el resultado global de esta última. Es decir, para la fila quinta:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 16 + 15 = 2^4 + (2^4 - 1)$$

Por este camino sí se obtiene la solución del escriba, pero igualmente podíamos haber elegido el formato $2^{10} - 1$, que también «salta a la vista» en el proceso anterior. La conexión entre las dos expresiones, además, no parece un paso difícil para calculistas que dejaron probada muestra de su habilidad en la resolución de otros problemas. Nos inclinaríamos por buscar una explicación en la escritura cuneiforme de los números, basada solamente en dos símbolos, que quizás hiciera más fácil ver que quedaban obligados a repetir el último término menos uno.

Intentaremos visualizar lo que queremos decir empleando nuestros símbolos para la suma y la igualdad y representando cada marca del cálamo en la arcilla con I.

IIII

I + II = III I + II + IIII = III

Es cierto que en el siguiente paso, puesto que la suma parcial da 15 y el símbolo para 10 era una cuña horizontal distinta, se pierde la «visión directa» del proceso, pero la idea ya ha quedado sugerida.

Nos atrevemos, por tanto, a responder sólo en parte a la pregunta del historiador: ¿cómo habían obtenido las fórmulas? Sin duda por un método tan natural de construcción de rutinas como la inducción. Y la experiencia didáctica nos dice que la mayoría de quienes llegan a sumar la serie de potencias de 2 lo hace también con la de 3 y la de cualquier número natural.

Los sesgos interpretativos de los historiadores de las matemáticas están influenciados no sólo por su ideología sobre el devenir histórico o su interpretación filosófica de las matemáticas, sino también por la forma en que conciben los procesos de creación del conocimiento matemático. A falta de documentos sólo se puede conjeturar, pero las conjeturas no son asépticas.

Obras citadas

IFRAH, G. (1997): *Historia universal de las cifras*, Espasa.

JOSEPH, G.G. (1996): *La cresta del pavo real*, Pirámide.

TATON, R. (director) (1971): *Historia general de las ciencias (tomo I)*, Destino.

Notas

1 Néstor fue condenado en el Concilio de Éfeso (431) por sostener que Cristo tiene dos naturalezas, una divina y otra humana. Todavía su doctrina tiene hoy partidarios en Irán y Turquía. Su éxodo fue uno más de los que provocó la ortodoxia bizantina.

2 En esta ciudad, en la que la dinastía sasánida había fundado una Escuela de Medicina, se refugió no sólo parte del primer éxodo nestoriano, sino también, más tarde, profesores de la Universidad de Atenas clausurada por Justiniano (529). Aunque el nivel científico de Bizancio nunca fue alto, se supone que estos exiliados contribuyeron con sus traducciones al siríaco, del que posteriormente se harían traducciones al árabe, al contacto del mundo islámico con la ciencia griega.

3 Utilizaremos indistintamente las palabras Mesopotamia y Babilonia. No son lo mismo, evidentemente, pero la producción matemática de las distintas épocas en esta región puede quedar bien representada por la ciudad de Babilonia. (Véanse G. Gheverghese Joseph (1991) y R. Taton (1971)).

4 Más adelante, según Ifrah (1997), insistieron en ella John Wallis, en el s. XVII, y Löffler en el s. XX.

5 También con pedigrí: Formaleoni (1789); Cantor (1880).

6 Imposible evitar cierto pesimismo antropológico ante la evidencia de los caminos seguidos por la cultura y el conocimiento en sus avances.

7 Las criaturas de Primaria lo consiguen, incluso perdiendo el sentido de lo que dicen. Se puede (¡y se debería!, por tanto) mantener este sentido e ir más despacio. Pero, ¡qué dificultades para ello con 60 tablas de 60 resultados!

8 Ahora se obliga a memorizarlas pero se prohibe su función auxiliar. Convendría reflexionar un poco sobre el uso que se hace de una tabla en cualquier trabajo. Da la impresión de que sólo en las aulas se memorizan para aplicarlas posteriormente en una segunda etapa. La calle, como casi siempre, actúa de otra manera: a fuerza de usar la tabla en cuestión se llega a memorizarla.

9 La hemos encontrado en Ángel Aguirre Álvarez: *El astrónomo cellense Francisco M. Zarzoso (1556)*. Instituto de Estudios Turolenses. 1980.

10 Consideramos las manos como instrumentos naturales para el cálculo, anteriores, claro está, a las tablas de Mesopotamia.

11 En el artículo «¿Por qué seguir anclados en Egipto?», en el número 35 de *Suma*.

Rectificación

Las colaboraciones continuadas con Suma nos están permitiendo conocer la sensación de autismo resultante del silencio de los hipotéticos lectores o lectoras. Cierto, a veces llega algún aviso de alguien que se ha disgustado con alguna afirmación, e incluso también de alguna persona que por el contrario se manifiesta de acuerdo con lo escrito. Pero en las frases que nosotros hemos lamentado a posteriori, cuando ya no ha tenido remedio, nadie parece haberse detenido. Puesto que no nos ha llegado la crítica nos rectificaremos a nosotros mismos.

En el número 35 (noviembre del 2000) firmamos un artículo, «¿Por qué seguir anclados en Egipto?», en el que se deslizó la siguiente afirmación: Seguimos metodológicamente anclados en Egipto, pero con una diferencia social que hace la situación sangrante: los matemáticos de la Antigüedad y de la Edad Media escribían para usuarios analfabetos. Hay sugerencias dolorosas por este camino que preferimos no detallar. Ocurre que el párrafo es rechazable desde dos puntos de vista:

• En primer lugar hay una frase que es contradictoria en sí misma: no se escribe para analfabetos.

• En segundo lugar, no es razonable llamar analfabetos, por ejemplo, a los comerciantes medie-vales.

En realidad, lo que pretendíamos era establecer una comparación que nos parece que sigue siendo válida, pero que es difícil de ajustar en poco espacio. La frase debería decir: los matemáticos de la Antigüedad y de la Edad Media, cuando escribían manuales de instrucciones pretendían la pervivencia, la transmisión de rutinas que permitían dar respuesta a los enunciados de los problemas. Tres mil años después parece claro el arcaísmo de una didáctica basada en este objetivo.

SUMA 37
junio 2001

Una historia de bolsillo

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
Julio Rey Pastor y José Babini
2 volúmenes
Prefacio de Juan Vernet
Gedisa Editorial
Barcelona, 2000
216 y 230 páginas

Es un hecho curioso que aparezca por tercera vez la primera edición de esta obra. Primero fue en 1951, editada en Buenos Aires por Espasa-Calpe, luego en 1985, bajo el sello editorial Gedisa que opera en Barcelona. Agotada esta edición, la misma editorial ha lanzado otra, en el paso del ecuador del Año Mundial de las Matemáticas 2000, que califica otra vez como primera porque aparece en una nueva serie. La obra cambió al pasar de Espasa-Calpe a Gedisa, pero la tercera aparición es una reedición de la segunda con la presentación material mejorada. En ella se mantiene la división en dos volúmenes y la paginación que estableció Gedisa en 1985, pero se amplía el formato, de modo que el texto queda menos apretado y más agradable de leer. También cambian el diseño de las cubiertas, ahora más vistoso, y el texto informativo de contra-

RECENSIONES

* Publicado simultáneamente en esta revista y en *Saber y Tiempo*, la revista de la Asociación Biblioteca José Babini, Buenos Aires (Argentina).

portada, que da más protagonismo a Babini, del que se destacan las dos monografías sobre historia de la ciencia que están citadas en el prefacio de Juan Vernet. En dicho texto arreglado se ha suprimido la mención a la fecha de fallecimiento de Rey Pastor, tal vez porque se había deslizado un error de siete años en la edición anterior. No hay comentarista que no disfrute malévolo anotando alguna errata. Una de las que perduran está en la tabla cronológica inserta al final del volumen segundo, donde hay un deslizamiento de un siglo: «1790. Rolle expone el teorema que lleva su nombre». Ahora que llegan las ediciones digitales de los libros, fabricados en pequeñas cantidades siguiendo de cerca la demanda, los lectores nos tenemos que ir acostumbrando a comunicar los gazapos descubiertos para que las obras se vaya corrigiendo poco a poco, siempre que el editor nos ofrezca un euro por errata más o menos, como ya se hace a través de la red en ciertos casos.

chaba entusiasmado un joven estudiante de ingeniería llamado Babini, nueve años más joven que el conferenciante. Desde entonces, maestro y discípulo formaron un equipo de trabajo que recorrió la matemática —así, en singular, como ellos la apreciaban— su enseñanza y su historia, además de la historia de la ciencia en general.

La versión de Gedisa de *Historia de la matemática* es más de Babini que de Rey Pastor si la comparamos con la original a cargo de Espasa-Calpe. Para explicar esto comenzaremos observado la tabla siguiente en la que se recogen en paralelo los índices respectivos.

Foto 1
Retrato de José Babini (Sergio Sergi, Santa Fe 1935) que se encuentra en la habitación principal del local que ocupa la Asociación Biblioteca José Babini en la Sociedad Científica Argentina en Buenos Aires.
Los libros que rodean al retrato forman parte de la biblioteca que fue de Babini y ahora gestiona, a través de dicha Asociación, su hijo Nicolás.

En el título de la obra, mantenido invariable desde 1951, los autores se muestran partidarios de designar en singular a la más antigua de las ciencias, poniendo el énfasis en su unidad interna, que se manifiesta, sobre todo, en los procesos de abstracción creciente generados en el siglo XIX. Para Rey y Babini, usar el plural resulta «anticuado» desde entonces y, consecuentes con esta opinión, escriben «matemática», en el título y también en el interior del libro. La tradición dieciochesca que habla de «matemáticas puras y mixtas» se refleja en el título que Echegaray puso a su polémico discurso de ingreso en la Academia de Ciencias en 1866: «Historia de las Matemáticas Puras en nuestra España». Años después, en torno al cambio de siglo, García de Galdeano escribía sobre el «fusionismo» que imperaba en la matemática finisecular, ejemplificado por la síntesis geométrica de Klein o en la unificación conceptual producida a partir de la teoría de conjuntos. Rey Pastor, en tantas cosas continuador avanzado de las ideas de su maestro Galdeano, hablaba en sus célebres conferencias de 1915 en el Ateneo de Madrid de la «sistematización» de las «teorías capitales de la matemática moderna» —que para él era entonces la posterior a Riemann y Weierstrass— «agrupándolas en torno a estas tres ideas: Conjuntos, Funciones y Grupos». Dos años después difundió esta visión de la matemática reciente durante su primer viaje a Buenos Aires, donde le escu-

Espasa-Calpe, 1951	**Gedisa, 1985/2000**
Introducción	Prefacio (Juan Vernet)
Bibliografía	
Capítulos	*Capítulos del tomo I*
1. La matemática empírica	1. La matemática empírica
2. La matemática prehelénica	
2. El periodo helénico	3. La matemática helénica
3. El periodo helenístico	4. La matemática helenística
5. El periodo grecorromano	
4. La matemática medieval y el despertar renacentista	6. La época medieval
	Tabla cronológica.
	Índice de autores
	Capítulos del tomo II
5. La matemática renacentista	7. La matemática renacentista
6. Nacimiento de la matemática moderna en el siglo XVII	8. El siglo XVII
7. El siglo XVIII. Apogeo de la ciencia newtoniana	9. El siglo XVIII
8. El siglo XIX	10. El siglo XIX
9. La matemática finisecular (1870-1900)	11. Hacia la matemática del siglo XX
10. La matemática abstracta del s. XX	
Apéndice	
Índice alfabético	Tabla cronológica.
	Índice de autores

La introducción ha sido sustituida por el prólogo que Vernet redactó «por deferencia del Prof. J. Babini y del Sr. Rey Pastor, hijo». El apéndice que aparece en la tabla anterior está dedicado a historiar brevemente la propia historia de las matemáticas, incluyendo una nota bibliográfica, que cambia la que aparecía al comienzo de la edición de 1951, que aspiraba a ser casi exhaustiva según el estilo de Rey Pastor, por otra más reducida dedicada a reseñar lo que Babini consideró más esencial «en un campo bibliográfico especial: la edición, generalmente comentada y anotada, de las obras matemáticas clásicas o las Opera Omnia de grandes matemáticos». Cada volumen tiene su propia tabla cronológica y se cierra con un índice de autores. En total son cuatrocientas cincuenta páginas, repartidas casi por igual en los dos volúmenes, sólo unas páginas a favor del primero, subtitulado «De la antigüedad a la baja Edad Media», que contiene los seis primeros capítulos. Los otros cinco y el apéndice van en el segundo volumen, cuyo contenido cubre «Del Renacimiento a la actualidad».

Además de la indudable autoría de las variantes introducidas en la edición de 1985, parece que fue la pluma de Babini la que escribió realmente la obra desde el principio, tras el «aporte básico inicial» de Rey Pastor. La experiencia curricular en historia de la ciencia es más intensa en Babini desde finales de los años treinta, cuando se unió a los proyectos del exiliado italiano Aldo Mieli en torno a la revista *Archeion*. Por otro lado, su hijo Nicolás —que ahora dirige la Asociación Biblioteca José Babini, instalada en la sede bonaerense de la Sociedad Científica Argentina, en la que quien suscribe ha podido consultar el epistolario de Babini, utilizado en parte para escribir esta nota— recuerda a su padre ocupado intensamente en la preparación de la obra que comentamos. También corrió a cargo de Babini la *Historia sucinta de la matemática* que apareció por entonces (1952) en la serie marrón de «Austral», la popular colección de bolsillo de Espasa-Calpe, donde ya había publicado *Arquímedes* e *Historia sucinta de la ciencia*.

En la dilatada obra de Rey Pastor, buena parte dedicada a la historia de la ciencia y a su epistemología, no hay muchos trabajos que se ocupen específicamente de la historia de la matemática universal, aunque sus libros están permanentemente salpicados de notas históricas. Su conocida lección inaugural del curso 1913-14 en la Universidad de Oviedo sobre «Los matemáticos españoles del siglo XVI» —que fue libro en 1925— indica que desde bien joven estudió la matemática europea del Renacimiento, sobre la que produjo un par de artículos de contenido matemático, también en 1925. Dos años después, con motivo del centenario de Newton, publicó el artículo «Los orígenes del cálculo infinitesimal» en la revista *Síntesis* y escribió sobre el sabio inglés en el diario *La Nación*. Su atención a este tema se aprecia en el análisis crítico que publicó en 1940, en *Archeion*, del libro de Carl B. Boyer «The concepts of the calculus. A critical and historical discussion of the derivative and the integral». Cabe mencionar por último, de 1944, el artículo «Análisis comparativo de los matemáticos suizos» en la revista *Helvetia*. Pero lo que más interesó a Rey Pastor, sobre todo a partir de los años cuarenta, fue la matemática del siglo XIX que llevó a la gran abstracción que triunfó en el XX. Esta es la preocupación que volcó en su libro de historia con Babini, publicado el mismo año que La matemática superior. *Métodos y problemas del siglo XIX*, una versión ampliada de las conferencias dadas por Rey Pastor en el Ateneo de Madrid el año 1915.

También corrió a cargo de Babini la Historia sucinta de la matemática *que apareció por entonces (1952) en la serie marrón de «Austral», la popular colección de bolsillo de Espasa-Calpe*

El aporte de Rey a *Historia de la matemática* bien pudo consistir en el planeamiento inicial de la obra, la revisión de la misma durante su elaboración y, ya en la fase final, con seguridad la introducción y los dos últimos capítulos sobre la matemática más contemporánea; además de la influencia que significó su fama personal y su posición en la compañía editora, en la que dirigía junto a Desiderio Papp la serie «La ciencia. Su historia y sus problemas», así como la serie marrón de la colección «Austral». Esta aportación explícita del hispano en la primera edición es la que desaparece en la edición siguiente, en la que Babini sustituyó la introducción, de típico estilo reypastoriano, por el prefacio de Vernet y elaboró su propio final de la obra, que tiene como antecedente un librito de setenta y cinco páginas, de título *Historia de las ideas modernas en matemática*, publicado en 1970, corregido y actualizado cuatro años después y con una tercera edición de 1980. En la bibliografía de esta obra, Babini recomienda la lectura de los dos últmos capítulos de la historia que escribiera con Rey Pastor, al que atribuye la paternidad de los mismos. En efecto, el texto de estos capítulos es, tal cual, la comunicación de Rey Pastor al Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias celebrado en Lisboa en 1950. Rey se lamentó en una carta de que las prisas del editor, mientras él estaba de viaje por Europa, le impidieran introducir algunas modificaciones de última hora. Este remate del libro, al parecer algo improvisado, y la introducción —que, como veremos, enlaza con los capítulos finales y por eso tuvieron que desaparecer también juntos— sirven para conocer las preocupaciones del matemático hispano-argentino, quizás asumidas por Babini de modo más templado, en relación con la abstracción extrema que se había apoderado de la matemática. Por eso no es extraño que, cambiada la introducción por el prólogo de Vernet, el historiador catalán afirme allí que una de las

reestructuraciones del texto clásico se ha producido en la parcela de la matemática contemporánea. Este cambio, más el habido en el tema de «la antigua ciencia babilónica», son atribuidos por Vernet a las innovaciones producidas en estos dos extremos de la historia por las investigaciones más recientes.

De modo que, en la obra que comentamos, el orden alfabético haría más justicia a la autoría real de la obra, sobre todo en su segunda versión. Pero Babini nunca renunció a ser discípulo de Rey Pastor y no se le ocurriría, impedimentos legales o ventajas comerciales aparte, renunciar a la compañía preferente en los rótulos de su maestro, a pesar de retirar sus dos aportaciones explícitas al preparar la edición de Gedisa, que Babini no llegó a ver porque falleció en mayo de 1984, un año y pico antes de que saliera el libro de la imprenta. Aquí me van a permitir los lectores un pequeño inciso personal. Babini, que trabajó en la preparación de la segunda versión hasta el final, ya se encontraba débil unos meses antes de su muerte. Estaba anunciada su presencia en Logroño para participar en un simposio sobre Rey Pastor, en noviembre de 1983, que se iba a ver altamente dignificado con su presencia. Todo estaba preparado para su llegada, pero pocos días antes llamó por teléfono para renunciar porque se encontraba débil y le asustaba un viaje tan largo. Agradeció la invitación, reafirmó la ilusión que había puesto en este viaje, lamentó la perturbación que pudiera causar su renuncia tan tardía y se justificó diciendo: «la única disculpa que puedo darle es que por mis venas corre sangre del siglo pasado» —había nacido en mayo de 1897.

Foto 2
Retrato de Julio Rey Pastor (Santiago Paz, Baricloche 65) que se encuentra en la biblioteca del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires.

Pero Babini nunca renunció a ser discípulo de Rey Pastor y no se le ocurriría, impedimentos legales o ventajas comerciales aparte, renunciar a la compañía preferente en los rótulos de su maestro…

Al acusar recibo del envío de la primera edición de *Historia…*, Sarton dejó escrito que «es difícil analizar un libro que discute toda la historia de las matemáticas —historia inmensa— en algunos centenares de páginas». Mis limitadas capacidades encuentran en tan autorizada opinión una eficaz coartada para evitar un análisis de la obra, con más motivo siendo ésta insensible a toda crítica por la definitiva ausencia de sus autores. Pero no dejaré de decir que es una síntesis bien escrita, que se lee fluidamente a pesar de la notable densidad de datos que contiene y de estar orientada hacia los aspectos internos de las matemáticas. Así lo reconocieron los autores en la primera introducción, en la que defendían su libro como «algo más que sus homónimos y mucho menos de lo que entendemos por historia de la matemática, en su más lato significado», el cual, explicaban más adelante, se da «si se concibe el quehacer científico como actividad humana desarrollada en distintas atmósferas culturales con las que mantiene interacciones de diversa índole, cuyo esclarecimiento es la misión de la historia, peculiar análisis científico de la total aventura humana». Por el contrario, el libro era, para los autores, mucho menos que esto porque su contenido no trascendía las fronteras de la propia matemática. No obstante, era «más que los clásicos compendios de análogo volumen, no ,solamente por prolongar hasta nuestros días el esbozo histórico, […] sino precisamente porque esa matemática de hoy, condenada por el misoneísmo como desviación patológica, es por el contrario meta y cumbre hacia la que propendía en gradual ascensión, desde su remoto origen empírico. […] El análisis cronológico de este proceso conduce a la cabal comprensión de esas desconcertantes álgebra y topología abstractas, cuya arbitrariedad irrita a los educados en la matemática clásica que no completaron su formación con el estudio histórico». Este planteamiento, «casi epistemológico» según los autores, consistente en ver la historia de la matemática como una explicación o justificación de la abstracción que tenía que llegar en el siglo XX, fue el que se propuso como eje del libro. En la misma línea de aceptación de la matemática como ciencia de las estructuras —eso sí, una vez limpia de «borra»— se expresó Rey Pastor

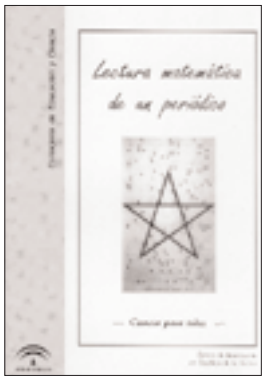
en el prólogo de la ya mencionada obra coetánea *Introducción a la matemática superior*. Resultan sorprendentes estas afirmaciones, alineadas con la visión bourbakista de la matemática y su historia, siendo que por esas fechas Rey Pastor más bien mantenía una radical oposición a la tendencia estructural imperante, al menos en lo que a los tratados se refiere, como se ve en los prólogos de *Lecciones de álgebra*, en las ediciones de 1947 y 1957, sobre todo esta última.

El carácter interno del contenido de *Historia…* se ve acrecentado por las «notas complementarias» distribuidas con profusión a lo largo de toda la obra. En la introducción repetidamente citada eran presentadas así: «Y para completar el índice de valores positivos con que pretendemos compensar notorias deficiencias, nos permitimos señalar la inclusión de las Notas complementarias, en que sin salir del marco elemental desarrollamos técnicamente algunas cuestiones, que en el texto del libro figuran en sus rasgos esenciales, como corresponde a la finalidad de la obra, pero cuyo desarrollo con pormenores técnicos facilitará a los lectores más ilustrados la comprensión más completa y profunda del problema histórico». Vernet las encuentra «especialmente interesantes» por lo útiles que son «como ejemplificación de la materia tratada y, a veces, para conocer incluso el estilo del autor comentado». Apunta el prologuista que las notas están realizadas «con toda libertad», lo que tal vez escribió teniendo presentes, aunque no las mencione, las críticas que recibieron de Beppo Levi, que las consideraba demasiado breves y no suficientemente fieles al original. La crítica no deja de ser certera en términos absolutos, pero Rey proponía, en una carta a Babini, responder en estos términos al matemático italiano exiliado en Rosario: «cabe muy bien que […] sean malas, como Ud. dice, pero el método sea bueno y defendible». En efecto, el mérito de las notas ha de buscarse no tanto en la precisión histórica cuanto en sintonía con el carácter general de la obra, como invitación al lector a completar su desarrollo bien desde la óptica matemática actual o bien, lo que es mejor desde el punto de vista histórico, atreviéndose con las obras originales. Hay bastantes cambios entre las notas incluidas en la edición de Espasa-Calpe y las que van en la de Gedisa, algunas desaparecen y otras son nuevas, muchas se mantiene con una nueva redacción más breve, prescindiendo incluso de alguna figura, tal vez para controlar el tamaño final del libro; pero sería muy prolijo enumerar todas las variaciones y descubrir la razón última que los motivó. Los cambios en estas notas y el apéndice bibliográfico sobre textos clásicos de autor bien pududieran ser, en parte al menos, la respuesta de Babini a las críticas de Levi.

…el público interesado puede acudir con devoción a comprar el libro del insigne Rey Pastor seguro de que disfrutará con el buen trabajo del eminente Babini.

Llega el momento de terminar esta reseña, que más ha sido una aproximación a la historia del propio libro que un comentario sobre el mismo, cambio de enfoque que estará justificado si los lectores han encontrado el relato interesante. Ahora que se cumple medio siglo de su aparición formando un sólido volumen único, esta obra veterana reaparece porque, en el más modesto formato actual, sigue teniendo compradores, lo cual es un acierto de los autores, la editorial y los lectores. Pero es una pena que en tan dilatado tiempo no hayan aparecido en nuestra lengua nuevos historiadores dispuestos a recluir la obra de Babini y Rey Pastor en el anaquel de los libros venerables superados por otros más recientes y actualizados. Entretanto, el público interesado puede acudir con devoción a comprar el libro del insigne Rey Pastor seguro de que disfrutará con el buen trabajo del eminente Babini.

Luis Español González
Universidad de La Rioja



LECTURA MATEMÁTICA DE UN PERIÓDICO
A. Fernández-Aliseda, D. Aceituno;, J. Muñoz, A. Jiménez y M. del Pozo
Centro de Profesorado Castilleja de la Cuesta (Sevilla), 2000
ISBN: 84-699-4013-9
44 páginas

Dentro de una carpeta titulada «Ciencia para todos» del Centro de Profesorado de Castilleja de la Cuesta (Sevilla), que recoge temas tan diversos e interesantes como los vinos de Jerez, el olivo, el cáncer o la arqueología, aparece el cuadernillo que nos ocupa. Que es modesto en su apariencia (poco más de 40 páginas y destinado en principio a tener una difusión limitada) pero que recoge una propuesta cuidada, estimulante y atractiva de actividades para ayudar al alumnado a avanzar en una de sus tareas más importantes en la asignatura de matemática: la comprensión de los medios de comunicación que nos rodean.

Se puede pensar que el trabajo de matemáticas con un periódico se acaba pronto. Quienes nos hemos ocupado de ello estamos convencidos de lo contrario: que no se acaba nunca, que se podría hacer todo un curso y varios cursos sin más apoyatura que los perió-

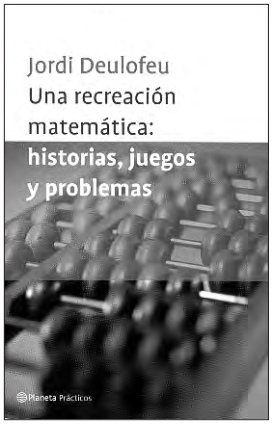
dicos de cada día. No pretendo convencer a nadie (porque no sería sensato) de que ese sea el camino único a seguir, pero sí una dirección a tener siempre en cuenta, a no olvidar. Y trabajos como el que comentamos aportan material fresco y (lo que es muy importante) utilizable directamente en clase sin ningún esfuerzo por parte del profesorado, para hacer ver de forma palpable, sin necesidad de discursos teóricos, la necesidad de conocer matemáticas para descifrar la realidad y disfrutar del conocimiento.

Como un muestrario de las muchas posibilidades (que aparecen en el folleto en forma de propuestas para usar directamente en clase) enunciamos el contenido de *Lectura matemática del periódico*. En la primera parte, «Para empezar»: Búsqueda de elementos matemáticos, concretando un poco más, números, elementos geométricos, gráficas, funciones, azar y buscando errores-erratas. Y como «Trabajos de aula» los siguientes: ¿Cuánto es? ¿Cuánto era?; logotipos geométricos, interpretando gráficas, gráficos estadísticos, pirámides de población, edades, el juego, noticias matemáticas, noticias culturales, imágenes matemáticas, publicidad, pasatiempos y humor matemático. Y acaba con una selección bibliográfica para quien quiera ampliar sus conocimientos del tema o sus aplicaciones en clase.

Se ve que no exagerábamos cuando decíamos que había material para trabajar mucho tiempo. Y todo eso aderezado con el gracejo de sus autores, detrás del cual hay un largo y serio trabajo de aplicación en clase y de búsqueda de los ejemplos oportunos de los periódicos en los que apoyar las actividades a realizar por los alumnos y alumnas. Mi consejo es que lo busquéis y una vez que llegue a vuestras manos que no se quede en ellas sino que lo llevéis a clase y lo utilicéis en ella. Tanto vosotros como vuestros alumnos quedaréis satisfechos.

Fernando Corbalán

UNA RECREACIÓN MATEMÁTICA: HISTORIAS, JUEGOS Y PROBLEMAS
Jordi Deulofeu
Editorial Planeta
Barcelona, 2001
ISBN: 84-08-03842-7
266 páginas



Quizás por la formación en letras de la práctica totalidad de las personas que toman decisiones en las grandes editoriales (que parece llevar aparejada en nuestro país no sólo el desconocimiento sino la aversión hacia las ciencias), o por el miedo al cambio que llevamos impreso en el código genético, o por otras razones que se me escapan, lo cierto es que no son frecuentes los libros de matemáticas en colecciones «normales» de editoriales fuertes, entendiendo por tal esas con las que te topas en las mesas de novedades de las librerías sin tener que pedirlas o sin dirigirte (si existe) al estante de ciencias o de matemáticas. Y las pocas veces que se abren paso se suele ir sobre seguro con traducciones de libros que han sido éxitos en otros países. Y a pesar de que aquí también lo son (baste recordar *El diablo de los números*, *El teorema del loro* o *El tío Petros y la Conjetura de Goldbach*) no se cambia la tendencia... o quizás se haya abierto una grieta en el muro de la costumbre.

Porque lo cierto es que acaba de aparecer en la editorial Planeta (en la colección «Prácticos») el volumen que comentamos. Tal vez, también, como consecuencia de los esfuerzos de tantas personas en el 2000 se ha logrado que se empiece a considerar a las matemáticas como una parte de la cultura actual (aunque haya que seguir luchando para que se acepte como fundamental). Y hay que decir desde el principio que la elección para (esperemos) romper el fuego ha sido acertada, porque el libro de Jordi Deulofeu tiene muchas virtudes, que no sorprenderán a quienes siguieron su estupenda sección «Para pensar de un minuto a una hora» del suplemento de ciencia del periódico *La Vanguardia* de Barcelona, aparecida durante los años 1991 al 96 y en la que está el germen de este volumen.

Como recoge el título, hay una miscelánea de temas matemáticos (magia numérica, formas geométricas planas, las matemáticas de la vida, medidas del Universo y del tiempo, juegos matemáticos,...) de lo que se suele llamar Matemática recreativa que lo hacen a la vez, y aunque parezca contradictorio denso y ligero. Denso porque hay muchos temas, ligados de forma inteligente y con variadas conexiones. Y ligero porque es de agradable y placentera lectura, distendida y estimulante. Lo que no impide que con frecuencia haya que pararse a pensar sobre las variadas preguntas, problemas o juegos que se proponen (a veces incluso más de la hora que decía el título de su sección). Que unas veces son más conocidos y otras novedosos, y que conforman un volumen muy interesante para uno mismo, que es el destino principal del libro, pero también para su uso en diferentes niveles educativos. Porque hay que señalar que tiene un amplio capítulo final con soluciones y comentarios a las muchas actividades que se proponen.

Así pues este libro os lo podéis topar sin desearlo en cualquier librería, quiosco o gran almacén, que esa es la ventaja de las grandes editoriales, que te salen al paso incluso sin quererlo. Pero si no es así, no dudéis en buscarlo o en pedirlo, porque seguro que no os va a defraudar. Ya que está escrito con un espíritu lúdico y se trasparenta el gozo que se ha experimentado en su gestación. Seguro que después de su lectura y disfrute pasáis a ser uno más entre los próximos «con quienes comparto el placer de resolver problemas» a los que el autor dedica el libro.

Fernando Corbalán

FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA "ANDALÁN"
P. Alonso, J. Antolín, V. Bernardo, R. Esteban, J. García y Mª Concepción Pastor (coord.)
Diputación Provincial de Zaragoza y Diputación General de Aragón.
Zaragoza, 2001
72 páginas

Editado por la Consejería de Educación y Ciencia del Gobierno de Aragón y la Diputación de Zaragoza, este libro-catálogo presenta las fotografías premiadas en las seis primeras ediciones del Concurso de Fotografía Matemática que cada curso organiza el Departamento de Matemáticas del IES Andalán de Zaragoza.

Este concurso, que este año ha celebrado su séptima edición, convoca a todos los escolares aragoneses de ESO, Bachillerato y Ciclos (aunque las dos primeras fueron restringidas a los alumnos del Centro) con el objetivo de que reconozcan y plasmen en imágenes la presencia de las matemáticas en su entorno inmediato.

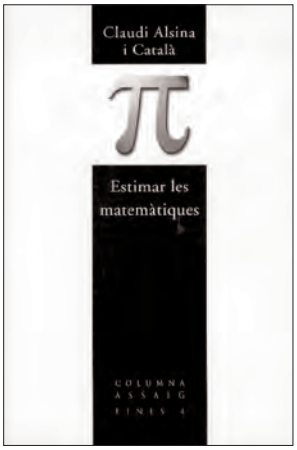
Ésta, que es una de las finalidades de la educación matemática, es captada y conseguida por los alumnos por múltiples y variados caminos. Los hay que observan y fotografían formas geométricas que, de modo explícito, aparecen en su barrio o en la ciudad (algunos aprovechan incluso viajes vacacionales o de otro tipo para conseguir imágenes «más originales»). Otros van algo más lejos y abstraen formas y conceptos separándolos de su entorno y provocan una visión diferente de aquel lugar por el que tantas veces hemos pasado. Otras veces es la Naturaleza la que promueve el interés por sus formas, a veces repetidas, a veces caprichosas.

Sin embargo hay un nexo de unión entre tantas y variadas formas de captar la realidad: la estética y la composición de la imagen fotográfica que consigue hacer perdurable ese instante fugaz en el que alguien, un joven alumno, supo ver y distinguir entre el paisaje cotidiano, algo, una forma, una idea, un punto de vista diferente, que le llamó la atención y conectó con su conocimiento matemático. El simple hecho de que nuestros alumnos miren, vean y descubran con los ojos críticos del que sabe es ya un objetivo que justifica una iniciativa como ésta.

Cada fotografía va acompañada por un texto realizado por adultos de muy diversos oficios y ocupaciones. Aunque predomina el campo de la educación (profesores y profesoras de distintas áreas), han aportado también su comentario otros profesionales de la escritura, pintura, escultura, fotografía e incluso algunos de los propios autores de las fotografías. La elaboración de los textos no ha estado condicionada más que por el espacio disponible. Los autores se han encontrado ante una imagen y han realizado un trabajo de creación sobre la misma. De esta forma el resultado ha sido tan variado como rico. Se ha hecho evidente, por si no lo era ya, las múltiples lecturas que puede tener una imagen y las diversas formas de explicitarlas: poema, evocación, referencia, descripción... creación en todo caso.

Así, el conjunto de imagen y palabra, de palabra e imagen, acaba fraguando en un todo compacto en el que no cabe pensar en una sin la otra, pues ambas se complementan y parece como si se necesitaran.

Julio García



ESTIMAR LES MATEMÀTIQUES
Claudi Alsina i Català
Editorial Columna - Assaig Eines 4
Barcelona, 2000
ISBN: 84-664-007-6
186 páginas

Claudi Alsina hace, en las primeras páginas de este libro, una declaración cuyo contenido creo que casi nadie se atrevería a desmentir en público: «Forman parte de la cultura, entendida en un sentido amplio, un poema, una melodía, una receta de cocina, un baile antiguo, una estatua, un cuadro, un teorema, una película, un motor de coche, una fotografía galác-

tica… ¿no son todas ellas productos de la creatividad humana?». Se podría pensar que el hecho de que esta afirmación venga de una persona capaz de escribir una carta de amor a un rectángulo o a los códigos de barras —que con su simplicidad numérica permiten la perfecta identificación de los innumerables objetos de consumo—, le quita fuerza como prueba. Es como cuando en un juicio la coartada del sospechoso la proporciona su amante: el testigo no es objetivo; tiene motivos personales para declarar a favor del acusado, en este caso de las matemáticas. Nos gustaría oir estos testimonios en boca de otras personas menos sospechosas de tener un interés personal para prestar su apoyo a las matemáticas. Sin embargo, el desarrollo del pasado Año Mundial de las Matemáticas muestra bien a las claras que más allá de las declaraciones sobre la importancia de las matemáticas para el progreso humano (y lo poco competentes que eran los declarantes cuando las estudiaron), es difícil encontrar apoyos fuera del gremio matemático. Por eso, mientras esta situación se mantenga, seguirán siendo precisos libros como este, cuyo propósito es ayudar a comprender a todo el público que existen razones muy importantes para apreciar a las matemáticas, para profesarles un profundo amor como el que se les tiene a otras manifestaciones de la cultura humana.

La obra está dividida en tres grandes apartados que se corresponden con los tres grandes motivos que Claudi da para apreciar a las matemáticas:

- Porque *son divertidas*, es decir porque proporcionan gran cantidad de retos con los que la mente puede disfrutar y entretenerse y también por las anécdotas y personajes sorprendentes por sus cualidades humanas que se pueden encontrar entre los protagonistas de las matemáticas.
- Porque son *curiosas y sorprendentes*, puesto que pueden captar nuestra atención y sorprender nuestras expectativas o alterar nuestro sentido de lo que es lícito esperar y luego resulta no serlo.
- Porque son *útiles* y están presentes en cantidad de situaciones de la vida cotidina, pero en más ocasiones en cosas que son posibles gracias a las matemáticas que usan y que están ocultas a una mirada simple. Y, también, por lo *formativas* que resultan, es decir por las consecuencias positivas que tiene para la gente pensar y hacer matemáticas.

A lo largo de la obra se presentan muchos ejemplos que apoyan estas tres razones, tratados con sencillez por lo que su lectura está al alcance de cualquiera, ya que sólo presuponen los conocimientos propios del aprendizaje escolar.

Escrita en catalán —pero no por ello difícil de leer para un castellano parlante que haga un pequeño esfuerzo—, un aspecto especialmente interesante de los ejemplos propuestos en el libro es su relación con la cultura catalana. Se habla de la aritmética sardanista, los *castellers*, el poema escrito por el ingeniero Frederic Masallé i Guarné dedicado a «pi» y que resulta ser una clave nemotécnica de sus 30 primeras cifras decimales, los poemas de Joan Brossa, la defensa «matemática» que hace el ingeniero Ildefons Cerda de su plan urbanístico, los grandes números del fabricante de embutidos de Sat Feliu de Pallerols, Josep Font, las esculturas generativas de Javier Carvajal, los diseños geométricos que se encuentran bajo la aparente fantasía de las creaciones de Gaudi, las coordenadas de Barcelona, o el papel de los números en los dichos populares catalanes. A mi me ha impresionado mucho la anécdota protagonizada por Gaudí, Maragall y Unamuno que es una maravillosa muestra de la dificultad de comunicación entre las culturas, en esta caso ciencias y tecnología frente a las humanidades.

Destacaré otro aspecto del libro que puede parecer poco relevante: incluye un índice de curiosidades matemáticas, que puede facilitar la búsqueda de una de ellas en concreto, útil instrumento para actualizar su recuerdo sin necesidad de repasar todo el libro.

En definitiva, otra obra interesante de un autor que nunca nos decepciona.

Julio Sancho

LABERINTOS, N.° 2
Dossier: Año Mundial de las Matemáticas
IES Élaois
Zaragoza
Diciembre 2000

Estoy seguro de que a lo largo del pasado Año Mundial han aparecido muchas publicaciones interesantes, que, por su ámbito de influencia local, no han tenido la repercusión que merecían. Entre ellas hay que destacar las muchas que se hacen en centros de eduación secundaria con un nivel, tanto formal como de contenido, que no tiene nada que envidiar a otras publicaciones más profesionales. Sirva esta pequeña referencia, de un interesante número especial de la revista *Laberintos* para reconocer no sólo su mérito, sino también el de las otras muchas que, a mi pesar, no han pasado por mis manos.

Los interesados pueden dirigirse a su correo electrónico: elaios@CentrosII.pntic.mec.es.

Julio Sancho

SUMA 37
junio 2001

II Premio Sánchez Vázquez, Concurso de problemas, Problemas XXXVII Olimpiada

CRÓNICAS

MARÍA PILAR PLAZA QUERALT: II Premio Gonzalo Sánchez Vázquez

La Comisión Ejecutiva de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas acordó por unanimidad, en su reunión de 28 de abril de 2001, conceder el «II Premio Gonzalo Sánchez Vázquez a los valores humanos» a Pilar Plaza Queralt, propuesta por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo».

Algunas notas biográficas de Pilar Plaza

Nace en Zaragoza el 21 de diciembre de 1951. Por motivos familiares se desplaza a Alicante en 1957. Estudia primaria y secundaria en el Colegio María Auxiliadora de Alicante y hace el curso Preuniversitario en el Instituto Jorge Juan también en Alicante.

Hace Selectivo de Ciencias en el CEI (centro de estudios universitarios) de Alicante, dependiente de la Universidad de Valencia. El segundo curso de Matemáticas lo hace en la Universidad de Zaragoza. En el año 1977 obtiene la licenciatura en Matemáticas y hace el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP).

Desde 1978 hasta 1994 es profesora de Matemáticas y Ciencias en el Colegio El Buen Pastor de Zaragoza.

Es profesora voluntaria de Matemáticas y Ciencias en el Graduado Escolar para personas adultas del barrio de la Paz de Zaragoza desde 1974 hasta que el Ministerio de Educación y Ciencia asume estos cursos.

En el año 1992 participa con un equipo de profesores y profesoras en la elaboración del Diseño Curricular de Matemáticas de Aragón, por encargo de la Diputación General de Aragón.

Ha participado también en numerosos cursos y seminarios permanentes de didáctica de las Matemáticas, JAEM y en las Jornadas Iberoamericanas de Sevilla.

Es miembro de ASA (Acción Solidaria Aragonesa) desde 1987, trabajando en la Comisión de Proyectos, que es la que elabora proyectos de desarrollo y estudia y decide cuáles son los que debe apoyar y financiar prioritariamente la organización.

Como miembro de ASA participa también en la Comisión contra la celebración del Quinto Centenario de la Conquista española de América con otras entidades sociales de la ciudad y del estado.

En enero de 1994 se traslada a Colombia para apoyar como profesora voluntaria de Matemáticas y Ciencias el Instituto Cooperativo Regional Alcides Fernández de Gilgal, pueblo del municipio de Unguía en el Urabá chocoano. Durante su estancia, y por su titulación, el colegio logra la aprobación oficial de los grados superiores de bachillerato agropecuario. El Colegio es una obra social de educación de la Cooperativa de las Tribus, que se planteó en 1983 la necesidad de dar respuesta a la problemática educativa de la juventud de la zona.

Actualmente Pilar Plaza lleva desde febrero de 1998 colaborando en el proceso de comunidades de Paz. Está trabajando en Apartadó.

Las Comunidades de Paz surgen como una iniciativa de los campesinos desplazados de sus tierras por los agentes armados, para volver a ellas. La violencia ha provocado el desplazamiento de la población civil –en el municipio de Riosucio había más de diez mil campesinos desplazados por la violencia– de forma que se habían ido hacinando en campos de refugiados, en los que las posibilidades de vida dependían de la colaboración organizaciones de solidaridad.

Este proceso de Comunidades de Paz es apoyado por diferentes ONG, por distintos organismos internacionales y por algunos sectores de la Iglesia colombiana.

Pilar Plaza lleva el último año coordinando el trabajo y los apoyos a las comunidades de paz desde la diócesis de Apartadó. Su misión es organizativa y de acompañamiento a distintas organizaciones internacionales que apoyan esta iniciativa y la visitan y la de organización de los apoyos y recursos que necesitan las nueve comunidades de paz instaladas a lo largo del río Atrato. Inicialmente estuvo en los emplazamientos de los campesinos en el río. Los acompañantes internacionales hacen un poco de escudo ante las invasiones de los actores armados, si hay suerte, y ayudan a organizarse a la población.

De vez en cuando viene por España, a ver a su familia o a plantear algún proyecto para el que se necesitan apoyos especiales. Por ahora se siente suficientemente bien con este trabajo y no se plantea volver definitivamente.

En enero de 1994 se traslada a Colombia para apoyar como profesora voluntaria de Matemáticas y Ciencias el Instituto Cooperativo Regional Alcides Fernández de Gilgal, pueblo del municipio de Unguía en el Urabá chocoano.

Concurso de problemas de ingenio de la SAEM Thales de Almería

Este año, concretamente el pasado día 10 de marzo, tuvo lugar en la localidad almeriense de Carboneras, cuyo Ayuntamiento mantiene una línea de apoyo y colaboración decidida con la SAEM THALES desde hace muchos años, la IX edición del Concurso de Problemas de Ingenio Thales, dirigida al alumnado de 4.° de ESO de los centros públicos, concertados y privados de la provincia de Almería.

Es importante resaltar que esta actividad está sirviendo también como experimento de cara a una posible reestructuración de la Olimpiada matemática que la SAEM Thales organiza desde hace 18 años en Andalucía para 2.° de ESO. 4° de ESO es un curso terminal y el alumnado que participa en nuestros C. de P. de I. lo ha hecho antes, en su mayor parte, en la Olimpiada Matemática Thales.

A lo largo de estos diez años que viene funcionando la actividad se han producido cambios y mejoras:

- Hemos sacado la prueba a la calle.
- Se añade una prueba por equipos, potenciando el trabajo cooperativo. Antes sólo había una prueba individual.
- Se ofrece comida a los participantes.
- Se añaden actividades LRM (lúdico-recreativo-matemáticas: Bingo matemático, juegos topológicos,...).
- Se potencia la componente de divulgación y popularización de las Matemáticas a través del impacto que produce esta actividad en los pueblos en donde se organiza cada año.
- Se organizan visitas guiadas al conjunto histórico en el que se desarrolla la actividad.
- Se proporciona a los participantes material didáctico.
- Se potencian las actividades de convivencia y las relaciones humanas entre los participantes, profesorado y alumnado.

- Y, la más relevante, utilizamos esta actividad para dar a conocer, mediante las Matemáticas, el patrimonio histórico-cultural de Almería y provincia a nuestro alumnado y a la Sociedad en general.

En 1999 y 2000 hemos desarrollado la actividad en la Alcazaba de Almería y en 2001 lo hicimos en el casco histórico de Carboneras. En 2002 ya se ha comprometido la localidad de Adra para que lo desarrollemos allí y en 2003 se hará en Huércal-Overa.

Los objetivos que nos marcamos son los siguientes:

- Divulgar y popularizar las Matemáticas.
- Tratar de hacer perder el temor a las Matemáticas a nuestro alumnado, mostrándolas como algo conectado con el mundo en el que vivimos y como un instrumento útil para desenvolvernos en él y haciéndoles ver que son también fuente inagotable de diversión.
- Utilizar pasatiempos lógico-matemáticos, problemas de ingenio, rompecabezas lógicos, situaciones problemáticas..., para hacer que los participantes se cuestionen, experimenten, estimen, exploren, hagan conjeturas y sugieran explicaciones para la resolución de los mismos.
- Desarrollar la capacidad de pensar y elaborar estrategias de resolución basadas en el razonamiento lógico-matemático y en la intuición.
- Contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
- Apoyar y fomentar entre el profesorado la investigación y la innovación en la E-A de las Matemáticas y motivarlo para investigar sobre nuevas perspectivas metodológicas.
- Propiciar la introducción de la resolución de problemas en el aula de matemáticas como recurso metodológico fundamental.
- Fomentar el trabajo en equipo, la solidaridad y el espíritu crítico.

…poner a prueba su capacidad de pensar, tan importante en el desarrollo de nuestros alumnos para llegar a ser efectivamente ciudadanos con capacidad crítica…

- Propiciar el intercambio de experiencias e impresiones entre los participantes (alumnado y profesorado) así como la convivencia entre ellos.
- Educar en termas transversales: coeducación, interculturalidad, respeto al medio ambiente…
- Dar a conocer a los participantes y a la sociedad, a través de las Matemáticas, el patrimonio artístico e histórico-cultural de nuestra provincia y enseñar a apreciarlo.

El equipo organizador ha estado integrado por: Pedro José Martínez (Coordinador), Ricardo Contreras, Manuel Rondón, Francisco Morales, José Villegas, Francisco Villegas, José Ignacio Tijeras y Ángeles López.

Matemáticas y patrimonio se dieron la mano una vez más, y se fundieron en un abrazo infinito, permitiendo a los asistentes a esta actividad resolver problemas matemáticos, algunos de ellos relacionados con el castillo y el esplendoroso parque andaluz, a la vez que conocer un poco de la historia de Carboneras y desarrollar relaciones de amistad con compañeros de otros institutos. Fue ésta, en suma, una oportunidad preciosa de conocer, apreciar y valorar el patrimonio artístico de Carboneras; de poner a prueba su capacidad de pensar, tan importante en el desarrollo de nuestros alumnos para llegar a ser efectivamente ciudadanos con capacidad crítica; de respetar el entorno; de adquirir destrezas sobre trabajo cooperativo; de aprender a respetar otras culturas y maneras de pensar y de ser felices que es, desde nuestro punto de vista, uno de los objetivos más importantes que debe pretender la Escuela.

Como ejemplo de problemas que había que resolver en la prueba individual podemos citar aquel en el que los alumnos debían averiguar la superficie del término municipal de Carboneras a partir de un mapa a escala; o este otro: ¿en qué año nació una famosa mujer matemática hija de Lord Byron, Ada Byron, conociendo la respuesta que ella misma dio cuando le preguntaron su edad «si intercambiamos el orden de las dos cifras de mi edad y elevamos al cuadrado, sale justo este año»; o este: ¿cómo conseguir el 6 con tres unos usando las operaciones matemáticas que quieras? Los demás problemas propuestos se pueden encontrar en la página web http://thales.cica.es/almeria.

En la prueba por equipos, grupos de 6 niños y niñas de distintas localidades tuvieron que aunar su ingenio y trabajar de manera cooperativa para resolver dos situaciones problemáticas. La primera de ellas consistía en calcular la superficie en planta del Castillo, la segunda averiguar cuánto costaría llenar el estanque del parque con agua de la desaladora. Equipados con reglas, cintas métricas, calculadoras, imaginación e ingenio, los grupos tuvieron que desplazarse por el pueblo, ante el estupor y expectación de las gentes, hacer mediciones, preguntar datos que no se conocían, hacer cálculos,... hasta averiguar lo que se les pedía.

Pedro José Martínez Fernández

XXXVII Olimpiada Matemática Española

Problemas propuestos en la Fase nacional celebrada en Murcia:

1. Probar que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto $A(a, b)$ si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que:

$$P(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2).$$

2. Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP verifica:

$$AB = BP$$

Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BQC y CRA, ambos semejantes al triángulo ABP cumpliendo

$$BQ = QC \text{ y } CR = RA$$

Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

3. Se tienen cinco segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.

Demostrar que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

4. Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3.

Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo.

¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

5. $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita.

Probar que: $CD \geq 2\sqrt{3} - 4$.

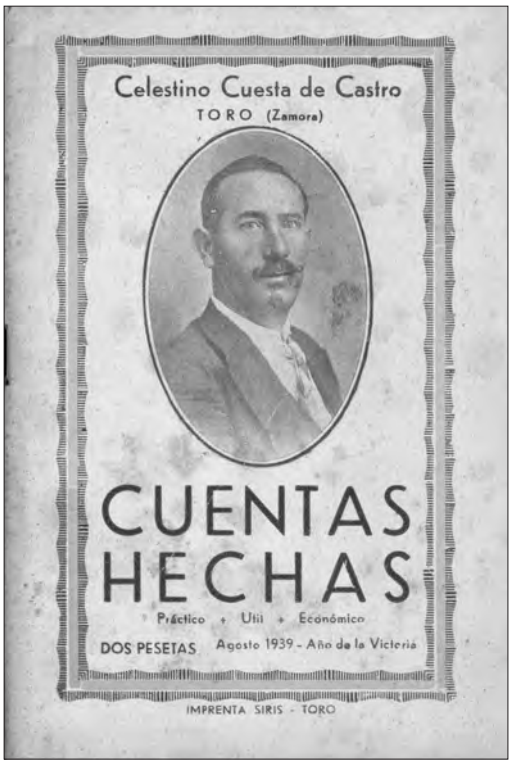
6. Determinar la función $f: N \to N$ (siendo $N = \{1, 2, 3\ldots\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera s, $n \in N$, las siguientes condiciones: $f(1) = f(2^s) = 1$ y si $n < 2^s$, entonces $f(2^s+n) = f(n)+1$.

Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \leq 2001$.

Hallar el menor número natural n tal que $f(n) = 2001$.

FE DE ERRATAS N.° 36

En el artículo «La magia de las matemáticas» de Brian Bolt aparecido en las páginas 5-15 del n.° 36 de SUMA, aparece por error Nùria Planas como traductora del mismo, cuando debería poner **Nùria Gorgorió**.



SUMA 37
junio 2001

X JAEM y XII Olimpiada

CONVOCATORIAS

X JORNADAS para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

Ya se están perfilando los últimos detalles de las X JAEM que se van a celebrar en Zaragoza los próximos días 7, 8 y 9 de septiembre.

Las sesiones se van a realizar en el Auditorio de Zaragoza (los actos plenarios de la mañana del viernes, día 7) y en la Facultad de Ciencias y el ICE de la Universidad de Zaragoza, ambos situados en el Campus de la Plaza de San Francisco. Las jornadas se clausurarán el domingo, día 9, al mediodía.

Se han homologado las Jornadas, con dos créditos de formación, por la Consejería de Educación y Ciencia del Gobierno de Aragón.

En su reunión del mes de mayo, el Comité de Programas ha admitido para su presentación en las JAEM 52 comunicaciones, 19 talleres y 11 trabajos en el Zoco Matemático, lo que junto a las 3 conferencias plenarias y 32 ponencias (pueden verse los títulos y los autores en el n.° 36 de SUMA) forman el Programa Científico diseñado y preparado por el Comité de Programas.

Además, la Comisión Organizadora ha preparado una serie de actividades complementarias al Programa Científico. Éstas son:

Programa cultural

Se pronunciarán ocho conferencias sobre el tema general «Matemáticas y… Humanidades»:

- *Matemáticas y vanguardias artísticas*. Ángel Azpeitia.
- *Matemáticas y poesía: seducciones*. Emilio Pedro Gómez.
- *Un paseo matemático por la Zaragoza mudéjar*. Carlos Usón y Ángel Ramírez.

- *La presencia de los números en la música*. José Garay.
- *Proporciones, números sistemáticos y simbólicos en la arquitectura del siglo XI*. Juan Francisco Esteban.
- *Matemáticas y arte contemporáneo*. Pedro Pablo Azpeitia.
- *Matemáticas y música*. Álvaro Zaldívar.

Videomaratón

Durante todo el día 8 se proyectarán vídeos didácticos matemáticos, de acuerdo con un programa diseñado al efecto por Antonio Pérez Sanz, Coordinador del mismo. Esta actividad está dedicada a Felipe Mellizo, periodista recientemente fallecido.

En la página de las Jornadas (www.unizar.es/ice/jaem), que se actualiza periódicamente, puede obtenerse más información.

XII Olimpiada de la Federación

Como ya es costumbre todos los años al comenzar el verano, entre los días 22 y 27 de junio se va a celebrar en Cantabria la XII Olimpiada Matemática Nacional, como culminación de las múltiples fases autonómicas que celebran las distintas sociedades federadas. Esta Olimpiada dirigida a estudiantes de 2.° de ESO está convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizada, en esta ocasión, por la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria.

En esta edición participan 54 estudiantes procedentes de Andalucía, Andorra, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla-La Mancha, Castilla-León, Cataluña, Melilla, Colegios Españoles de Marruecos, Galicia, Extremadura, La Rioja, Madrid, Murcia, Navarra y Valencia.

Junto al programa dirigido especialmente a los participantes se han organizado una serie de exposiciones de tema matemáticos abiertas a toda la sociedad cántabra. Son las siguientes:

- Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura.
- Fotografía y matemáticas.
- Filatelia matemática.
- Geometría mudéjar en Aragón, Patrimonio de la Humanidad.
- Chistes sobre las Matemáticas.
- Grabados de M.C. Escher.

Programa de actividades

Viernes, 22
- Hasta las 14 horas. Recepción en Viérnoles de los participantes.
- 17 horas. Acto de apertura. Bienvenida y entrega de documentación. Dinámica de grupos y cuenta cuentos matemáticos. Inicio del concurso de fotografía matemática.

Sábado, 23
- Prueba por equipos en la península de la Magdalena en Santander.
- Visita a la exposición *Filatelia y Matemáticas* en la Escuela Superior de Marina Civil y conferencia.
- Visita al parque de la Naturaleza de Cabárceno.
- Verbena de San Juan en los Corrales de Buelna.

Domingo, 24
- Excursión a Potes y subida al teleférico de Fuente Dé. Senderismo por la zona, acompañados por alumnos y profesores del IES Jesús de Monasterio de Potes.
- Recepción de carretes de la prueba fotográfica.

Lunes, 25
- Prueba individual en el IES Gutiérrez Aragón de Viérnoles.
- Excursión a Santillana (taller), Comillas y San Vicente de la Barquera.
- Visita a las exposiciones matemáticas en el Castillo del Rey en San Vicente.
- Fiesta de despedida con música de rabel.

Martes, 26
- Conferencia del profesor José Antonio Cordón de la Universidad de Cantabria, acto de clausura y entrega de premios.
- Comida de despedida.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: …supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: …según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	38,5 €	13,5 €
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . . . .
Población: . . . . . CP: . . . . . .
Provincia/país . . . . . CIF/NIF: . . . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.°_____ (3 números) _____

☐ N.os sueltos:_____ _____

Total _____

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma. Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad | | | | | Oficina | | | | | DC | | | Cuenta | | | | | | | | | |
Banco/Caja . . . . . .
Agencia n.°: . . . . . Dirección: . . . . . .
Población: . . . . . Provincia: . . . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM