suma+ 77
Artículos
Noviembre 2014
pp. 31-40

Matemáticas y competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (1)

Manuel Feito Guzmán
Carlos J. Sandoval Ruiz

En este trabajo explicamos el sistema de numeración sexagesimal usado por los babilonios hace casi cuatro mil años en la tablilla Plimpton 322, discutimos su transcripción y características, y estudiamos sus errores utilizando relaciones pitagóricas y ecuaciones diofánticas (parte 1). A través de Plimpton 322, analizamos el tratamiento de todas las competencias básicas de la Educación Secundaria Obligatoria en el sistema educativo español, destinada a estudiantes de 12 a 16 años. Dedicamos especial atención a la competencia matemática, proponiendo actividades de clase concretas estructuradas por etapas, niveles y edad del alumnado.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, Teoría de números, Trigonometría, Competencias básicas, Actividades de aula.

Mathematics and Basic Competences from the Plimpton 322 Tablet

In this work we explain the sexagesimal numbering system used by the Babylonians nearly four thousand years ago in the Plimpton 322 tablet, we discuss their transcription and characteristics, and study their errors using Pythagorean relations and Diophantine equations (Part 1). Using Plimpton 322, we analyze the treatment of all the basic competences of the Secondary School in Spain, designed for students aged 12 to 16 years. We pay special attention to the mathematical competence, proposing specific classroom activities structured in stages, levels and ages of the students.

Key words: History of Mathematics, Number Theory, Trigonometry, Basic Competences, Classroom Activities.

Plimpton 322 es una tablilla de arcilla perteneciente a la antigua civilización babilónica. En concreto, es el objeto número 322 de la colección de George Arthur Plimpton donada a la Universidad de Columbia en los años 30 del siglo pasado (ver figura 1).

De los cientos de miles de tablas con inscripciones encontradas en las excavaciones de Mesopotamia, tan sólo unos centenares podemos considerarlas de contenido estrictamente matemático. Y de entre estas últimas, Plimpton 322 es, probablemente, la más interesante y rica. Sus listas de números en escritura cuneiforme ordenados en columnas parecen sugerir un simple registro de contabilidad de asuntos económicos y organizativos, como tantos otros de la época (ver por ejemplo Joyce, 1995; O'Connor y Robertson, 2000; Robson, 2001, 2002; y Britton y otros, 2011). Sin embargo, un análisis más minucioso de la tablilla realizado por Neugebauer y Sachs (1945) revela que esos números constituyen, en realidad, ternas pitagóricas, lo que conduce a matemáticas avanzadas sobre teoría de números y que incluso algunos han interpretado como una especie de trigonometría primitiva (ver Eves, 1969a, 1969b; Boyer, 1994; e Illana, 2008). Si además tenemos en cuenta que la tablilla fue escrita hacia 1800 a. C. (Robson, 2001), es decir, más de mil doscientos

Artículo recibido en *Suma* en junio de 2013 y aceptado en mayo de 2014

años antes que los matemáticos griegos Pitágoras y Tales de Mileto enunciaran los famosos teoremas que llevan sus nombres, podemos calificar a Plimpton 322 como una de las primeras manifestaciones de matemáticas avanzadas que se conserva donde se obtienen resultados numéricos concretos para los lados de un triángulo rectángulo.

Existen otros documentos de las antiguas civilizaciones prehelénicas de Babilonia, Egipto, India y China donde se aprecia que el teorema de Pitágoras era conocido y aplicado con bastante antelación a la Escuela Pitagórica griega. Por ejemplo, se destacan de la cultura babilónica (hacia 2000-1600 a. C.), la tablilla YBC 7289, que contiene resultados relativos a la longitud de la diagonal del cuadrado unidad; las tablillas YBC 7302 e YBC 11120, que describen relaciones entre longitudes de circunferencias y áreas de círculos encerrados por ellas; las tablillas YBC 7290 e YBC 11126, que contienen el cálculo de áreas de trapezoides; y las tablillas de SUSA y de Tell Dhibayi, donde se manifiesta gran conocimiento de las relaciones existentes entre los lados de un triángulo rectángulo. Cabe reseñar de la cultura Egipcia (hacia 2000 a. C.), el papiro de Kahun de la dinastía XII de Egipto, que contiene cuatro ternas pitagóricas proporcionales a la del triángulo de lados 3, 4 y 5. Se destacan de la cultura India (hacia 800-400 a. C.), los Sulvasutras de Baudhayana y de Apastamba, donde se describe el uso de la cuerda para medir y trazar líneas perpendiculares, por medio de trozos de cuerdas cuyas longitudes constituyen ternas pitagóricas. Sobresalen en la cultura China dos tratados clásicos conocidos como *El clásico de la aritmética del gnomon y las sendas circulares del cielo* (Chou Pei Suan Ching), hacia 300 a. C. , y *Nueve capítulos sobre el arte matemático* (Chui Chang Suang Shu), hacia 250 a. C. , donde aparecen resultados numéricos concretos, así como las leyes generales de formación de las ternas pitagóricas (ver una información más detallada sobre estos documentos en Neugebauer y Sachs, 1945; Neugebauer, 1969; Boyer, 1994; y González, 2008).

Sin embargo, es generalizada la creencia de que fue la Escuela Pitágoras, hacia 550 a. C. , la primera en proporcionar una demostración matemática general

Figura 1. Fotografía de Plimpton 322 realizada por Christine Proust, por cortesía de Jane Siegel, en *Rare Book and Manuscript Library* de la Universidad de Columbia, donde se encuentra actualmente. La tablilla de arcilla tiene 13 cm de ancho, 9 cm de alto y 2 cm de grosor

del teorema que muestra las relaciones existentes entre los lados de un triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras constituye un hito cultural que es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre figuras planas y cuerpos geométricos, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría, y es la raíz histórica del Análisis indeterminado de Diofanto y Fermat (ver González, 2008).

Centrando de nuevo nuestra atención en la tablilla Plimpton 322, existe una amplia literatura donde historiadores de la ciencia y matemáticos han dado distintas interpretaciones sobre la construcción y finalidad de la tablilla, estudiando en profundidad los misterios que oculta (véase, por ejemplo, Gillings, 1953; Bruins, 1949, 1955; Price, 1964; Neugebauer, 1969; Schmidt, 1980; Friberg, 1981; Maor, 1998; y Casselman, 1999). Sin embargo, incluso en la actualidad, no se ha encontrado una evidencia clara que demuestre ninguna de las interpretaciones, por lo que la pequeña tabla de arcilla sigue despertando el interés de la comunidad matemática que trata de dar respuesta a estos interrogantes pendientes (ver Friberg, 2007; Abdulaziz, 2010; Britton y otros, 2011; Kirby, 2011; y

Phillips, 2011). Algunos autores han llegado incluso a afirmar que Plimpton 322 pudiera haber tenido originariamente una función didáctica (Robson, 2002; y Friberg, 2007). En esta interpretación de uso de la tablilla como material de apoyo para clases de matemáticas, el docente usaría las ternas pitagóricas para proponer a los estudiantes problemas numéricos sencillos, comprobar los cálculos intermedios y obtener las soluciones finales (Robson, 2002).

Sea o no acertada esa visión de la tablilla como un elemento con finalidad educativa, en el presente artículo proponemos su utilización en el aula casi cuatro milenios después de su creación. Ahora, debemos hacerlo en un nuevo marco de enseñanza-aprendizaje guiado por las competencias básicas propias del siglo XXI establecidas en el sistema educativo español para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), que se estructura en dos etapas: primer ciclo de ESO (con dos niveles, 1.º y 2.º curso), destinado para estudiantes de 12 a 14 años; y segundo ciclo de ESO (con dos niveles, 3º y 4º curso), destinado para estudiantes de 14 a 16 años (MEC, 2006).

Hasta el conocimiento de los autores de este artículo no hay en la literatura un enfoque didáctico y aplicado al aula de la tablilla Plimpton 322 como el que aquí detallamos, aunque es esperable que con mayor o menor nivel de profundización haya sido trabajado en las clases de matemáticas en la ESO. En este sentido, es de destacar el trabajo de Fernández (2009, 2010), en el que, tras una introducción a los rudimentos del cálculo babilónico, se plantean como actividades de clase la generación de ternas pitagóricas y el cálculo de pares recíprocos, y se implementa una hoja de cálculo con las ternas pitagóricas de la tablilla.

En el siguiente apartado de este artículo explicamos el sistema de numeración sexagesimal empleado por los babilonios hace casi cuatro milenios para elaborar la tablilla Plimpton 322. Discutimos la transcripción y características principales de la tablilla y analizamos sus errores utilizando relaciones pitagóricas y ecuaciones diofánticas. Al empezar la segunda parte proponemos actividades de aula para el tratamiento de la competencia matemática usando Plimpton 322. Clasificamos estas actividades por etapas y niveles de la ESO y las interrelacionamos con los elementos del currículo. A continuación, abordamos una aproximación desde el estudio de Plimpton 322 a las distintas competencias básicas que deben alcanzarse al final de la ESO (competencia social y ciudadana, cultural y artística, autonomía e iniciativa personal…). Por último, presentamos una discusión desarrollada y las conclusiones finales del artículo, discutiendo de forma global las actividades de clase y la metodología didáctica que hemos propuesto para el aprendizaje de las matemáticas con un enfoque competencial.

La tablilla Plimpton 322

Hacia el año 4000 a. C. la civilización sumeria se instaló en el sudeste de la antigua Mesopotamia e introdujo en su cultura la escritura cuneiforme, que consistía en la ejecución de signos con forma de cuña en tablillas de arcilla. Más tarde, hacia el año 2500 a. C. , esta civilización fue dominada por el pueblo semita de los acadios, fusionándose su cultura con la sumeria hasta que, hacia el año 2270 a. C. , el imperio acadio fue conquistado por el pueblo babilonio, que continuó utilizando la escritura cuneiforme para enriquecer su cultura, siendo los primeros en contribuir al desarrollo de las matemáticas (sobre todo la aritmética) mediante esta escritura.

Hacia el año 1800 a. C. , los babilonios utilizaron la escritura cuneiforme para elaborar las inscripciones que aparecen en Plimpton 322 (ver figuras 1 y 2). Estas inscripciones representan listas de números (naturales y decimales) escritos en el sistema numérico sexagesimal de tipo posicional que utilizaban los babilonios para desarrollar la aritmética (véase Neugebauer, 1969).

El sistema de numeración babilónico posicional

El sistema numérico sexagesimal posicional babilónico utilizado en Plimpton 322 se basaba en dos únicos signos: (clavo) y (cuña). El primero representaba la unidad (o cualquier potencia de base 60 con exponente entero) y el segundo representaba el número 10. Así, la agrupación de varios clavos significaba la suma de estos hasta un máximo de nueve, y la agrupación de cuñas significaba la suma de estas multiplicadas por diez hasta un máximo de cinco (ver Fernández, 2010). De esta manera, se puede representar en el sistema babilónico cualquier número natural desde 1 hasta 59. Por ejemplo, la representación del número 59 en este sistema babilónico (ver figura 3) se obtiene a partir de la descomposición $59 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

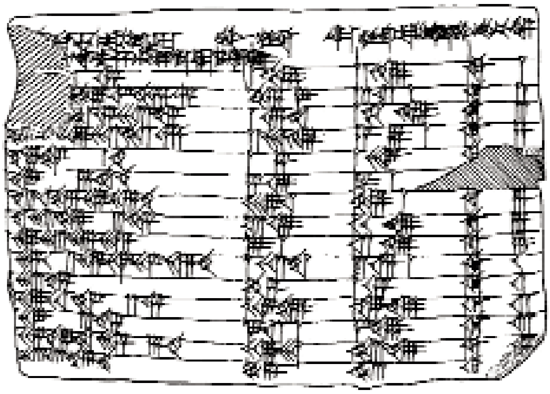

Figura 2. Dibujo de Plimpton 322 elaborado por Robson (2001)

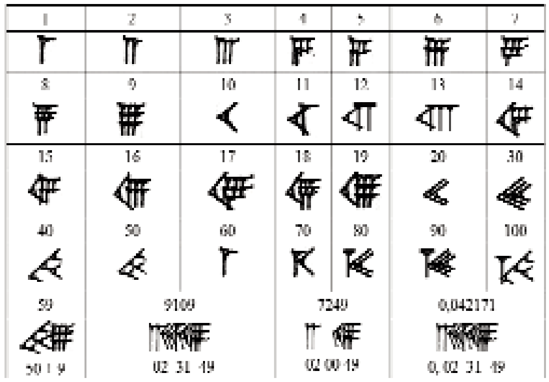

Figura 3. Sistema de numeración sexagesimal posicional babilónico

Para representar en el sistema babilónico un número natural superior a 59, se obtiene primero su descomposición en el sistema sexagesimal numérico y, después, se representan en el sistema babilónico cada uno de sus dígitos dispuestos en columnas distintas (teniendo en cuenta que si un dígito es cero, su columna correspondiente queda vacía). Así, por ejemplo, la representación del número 9109 en el sistema babilónico (ver figura 3) se obtiene a partir de la descomposición en el sistema sexagesimal numérico $9109 = 2 \cdot 60^2 + 31 \cdot 60^1 + 49 \cdot 60^0$. En cambio, la representación del número 7249 en el sistema babilónico (ver figura 3) se obtiene a partir de la descomposición sexagesimal $7249 = 2 \cdot 60^2 + 49 \cdot 60^0$. Otras representaciones en el sistema babilónico de números naturales pueden verse en la figura 3.

En el sistema babilónico se pueden representar también los números decimales, separando la representación de las partes entera y decimal por un hueco (que representa la coma decimal). Por ejemplo, a partir de la descomposición $0{,}042171 = 2 \cdot 60^{-1} + + 31 \cdot 60^{-2} + 49 \cdot 60^{-3}$ en el sistema sexagesimal numérico, se obtiene la representación en el sistema babilónico del número 0,042171 (ver figura 3).

El principal inconveniente del sistema de numeración babilónico es la carencia de signos que representen el número cero y la coma decimal. Por este motivo, existen diferentes números que tienen la misma representación, por lo que pueden resultar un poco confusos para su interpretación. Así, como ya hemos comentado anteriormente, todas las potencias de base 60 con exponente entero $(\ldots, 60^{-2}, 60^{-1}, 1, 60, 3\,600, 216\,000, \ldots)$ son indistinguibles en la numeración babilónica, ya que todas ellas se representan con el mismo signo, . Nótese también que los números 59; $3540 = 59 \cdot 60$; $212400 = = 59 \cdot 60^2$;… tienen la misma representación en el sistema babilónico. Lo mismo ocurre con los números 9 109 y 0,042171, representados en la figura 3. En cualquier caso, los números se podían distinguir observando el contexto de la situación cotidiana en donde aparecían, por lo que estas confusiones no presentaban inconveniente alguno para los babilonios (véase más información sobre el sistema babilónico en Neugebauer, 1969).

Transcripción de la tablilla Plimpton 322

Observando la imagen de Plimpton 322 (ver figuras 1 y 2) se aprecia un texto en escritura cuneiforme distribuido en cuatro columnas con un encabezamiento (que da nombre y significado a las columnas) y quince filas de números escritos en el sistema babilónico. Además, se observa una melladura en la parte superior del lado izquierdo de la tablilla que impide ver, en la primera columna, la totalidad de su encabezamiento y los números de sus cuatro primeras filas. También se estima la ruptura de la tablilla por el lado izquierdo y el de abajo, siendo probable que la tabla continuara hacia esos dos lados con nuevas filas y columnas cuya reconstrucción es objeto de todo tipo de discusiones (véase Abdulaziz, 2010 y Britton y otros, 2011).

En la tabla 1 se muestra la transcripción original de Plimpton 322 realizada por Neugebauer y Sachs (1945) (véase Neugebauer, 1969; Robson, 2001; Abdulaziv, 2010; y Britton y otros, 2011), donde las columnas, de izquierda a derecha, se han denominado I, II, III y IV (omitiendo la traducción de las anotaciones no numéricas escritas en acadio y sumerio), y donde los números escritos en el sistema babilónico se han convertido al sistema sexagesimal. Los números no visibles en la tablilla aparecen sombreados y los símbolos «(1)», añadidos en la primera columna, deben interpretarse como la cifra de las «unidades» de los números de dicha columna. Se observa también que los números que faltan en la columna IV son fácilmente predecibles, ya que representan el número de orden de las filas.

I a^2/b^2	II c	III a	IV
(1), 59 00 15	1 59	2 49	1
(1), 56 56 58 14 **56** 15	56 07	**3 12 01**	2
(1), 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
(1), 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
(1), 48 54 01 40	1 05	1 37	5
(1), 47 06 41 40	5 19	8 01	6
(1), 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
(1), 41 33 **59 00** 03 45	13 19	20 49	8
(1), 38 33 36 36	**9** 01	12 49	9
(1), 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
(1), 33 45	45	1 15	11
(1), 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
(1), 27 00 03 45	**7 12 01**	4 49	13
(1), 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
(1), 23 13 46 40	56	**53**	15

Tabla 1. Transcripción original de Plimpton 322 al sistema sexagesimal. Los números sombreados son ilegibles en la tablilla, mientras que los números en negrita corresponden a errores presentes en Plimpton 322

Neugebauer y Sachs (1945) relacionaron los números de las tres primeras columnas a partir de las ternas pitagóricas, es decir, tríos de números enteros (a, b, c), con $a > b > c > 0$, que verifican la relación de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ (ver figura 4). Ellos generaron ternas pitagóricas de la forma $(a, b, c) = (p^2 + q^2, 2pq, p^2 - q^2)$, donde p y q son dos números naturales de distinta paridad (uno es impar y otro es par) con $p > q$, y comprobaron que aparecían los valores $a^2 / b^2 = (p / q + p / q)^2$, $c = p^2 - q^2$ y $a = p^2 + q^2$, en las columnas I, II y III, respectivamente. Además, descubrieron el valor de los números incompletos (que aparecen sombreados en la tabla 1) y algunos errores que aparecían

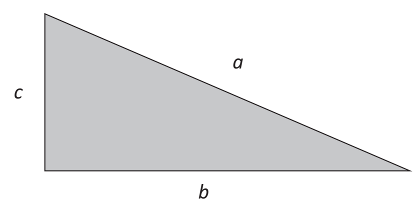

Figura 4. Notación moderna para la terna pitagórica (a: hipotenusa, b : cateto mayor, c: cateto menor)

en la tablilla (escritos con letra negrita en la tabla 1). En la tabla 2 aparecen en negrita la corrección de estos errores. Esta interpretación donde la tabla es construida a partir de «pares generadores» ha sido también defendida por Gillings (1953), Price (1964) y Buck (1980).

Bruins (1949, 1955) propuso una segunda interpretación de cómo se generaron las columnas de Plimpton 322 que ha sido aceptada por otros autores como Schmidt (1980), Friberg (1981, 2007) y Robson (2001, 2002). De acuerdo a estos autores, la tablilla habría sido generada a partir de «un solo número generador», $r = p \cdot \overline{q}$, donde $\overline{q}$ representa el recíproco o inverso del número q. De esta manera, los números $x = \overline{2} \cdot (r - \overline{r})$ e $y = \overline{2} \cdot (r + \overline{r})$ satisfacen la ecuación $1 + x^2 = y^2$. Para cada línea de la tablilla puede encontrarse un valor de r tal que, cuando x e y se dividen por sus factores comunes, se obtienen los valores de las columnas segunda y tercera (véase Abdulaziz, 2010 para un ejemplo de cálculo completo). Este método, que puede parecer bastante engorroso desde un punto de vista moderno, no representaba, sin embargo, dificultades para los babilonios que estaban familiarizados con tablas de números recíprocos (Robson, 2001).

Aunque no hay una evidencia de qué procedimiento fue originariamente utilizado para generar la tablilla, sí parece probado que los babilonios eran capaces de implementar cualquiera de ellos con sus conocimientos matemáticos. Para más detalles sobre las interpretaciones de la construcción de la tablilla y los errores que en ella aparecen, véase Abdulaziz (2010), Britton y otros (2011), y Phillips (2011).

I a^2/b^2	II c	III a	IV
(1), 59 00 15	1 59	2 49	1
(1), 56 56 58 14 **50 06** 15	56 07	**1 20 25**	2
(1), 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
(1), 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4
(1), 48 54 01 40	1 05	1 37	5
(1), 47 06 41 40	5 19	8 01	6
(1), 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
(1), 41 33 **45 14** 03 45	13 19	20 49	8
(1), 38 33 36 36	**8** 01	12 49	9
(1), 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10
(1), 33 45	45	1 15	11
(1), 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
(1), 27 00 03 45	**2 41**	4 49	13
(1), 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
(1), 23 13 46 40	56	**1 46**	15

Tabla 2. Transcripción de Plimpton 322 al sistema sexagesimal con los errores de la Tabla I corregidos en negrita

A continuación vamos a explicar con más detalle cómo pueden corregirse los errores detectados en la tablilla y cómo se pueden obtener los números incompletos de la misma. El enfoque que aquí proponemos no trata de explicar desde una perspectiva histórica el origen de dichos errores, sino que parte de los conocimientos modernos al alcance del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria. Se trata, pues, de una discusión orientada a las capacidades del alumnado y que permita usar en el aula herramientas matemáticas sencillas como el cambio de sistema de numeración, las ecuaciones diofánticas o el teorema de Pitágoras.

Observando las filas 5, 6, 7, 10, 11, 12 y 14 de la tablilla (ver figuras 1 y 2), es sencillo transcribir al sistema sexagesimal numérico los números que aparecen en las tres primeras columnas (ver tabla I) y comprobar que satisfacen la relación de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 - c^2} \quad \text{[E1]}$$

Por ejemplo, si expresamos los números de la fila 10 en el sistema decimal a partir de su transcripción al sistema sexagesimal numérico (ver tabla 1):

$$a = 2 \cdot 60^2 + 16 \cdot 60^1 + 1 = 8161$$
$$c = 1 \cdot 60^2 + 22 \cdot 60^1 + 41 = 4961$$

y

$$a^2/b^2 = 1 + 35 \cdot 60^{-1} + 10 \cdot 60^{-2} + 2 \cdot 60^{-3} + 28 \cdot 60^{-4} + 27 \cdot 60^{-5} + 24 \cdot 60^{-6} + 26 \cdot 60^{-7} + 40 \cdot 60^{-8} = 1{,}5861226$$

se cumple la relación [E1], ya que

$$\frac{a^2}{a^2 - c^2} = \frac{8161^2}{8161^2 - 4961^2} = 1{,}5861226 = \frac{a^2}{b^2}$$

De esta manera, se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (8160, 6480, 4961)$, donde

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{8161^2-4961^2}=6480$$

Razonando de la misma manera se obtienen resultados análogos para las filas 5, 6, 7, 11, 12 y 14 (ver tabla 3). Así, se puede intuir que existirá la misma relación en el resto de filas de la tablilla.

Si observamos ahora las filas 2, 8, 9, 13 y 15 de la tablilla (figuras 1 y 2) y transcribimos al sistema sexagesimal numérico los números que aparecen en las columnas (ver tabla 1), se puede comprobar que hay seis errores numéricos (véase, por ejemplo, Neugebauer, 1969; Maor, 1998; Robson, 2002; y Britton y otros, 2011). Veamos cómo se detectan y corrigen cada uno de estos errores.

Designaremos la posición de los números en la tablilla por el nombre de la columna (I, II ó III) seguido del número de la fila (del 1 al 15) que ocupa el número. Así, por ejemplo, I-3 designa la posición en la tablilla situada en la columna I y en la fila 3.

Error en I-8. Si expresamos los números de la fila 8 en el sistema decimal:

$$a=20\cdot 60^1+49=1249$$

I a^2/b^2	II c	III a	IV	V b	VI $\hat{C}$
1,9834028	119	169	1	120	44,76°
1,9491586	3367	4825	2	3456	44,25°
1,9188021	4601	6649	3	4800	43,79°
1,8862479	12709	18541	4	13500	43,27°
1,8150077	65	97	5	72	42,08°
1,7851929	319	481	6	360	41,54°
1,7199837	2291	3541	7	2700	40,32°
1,6927094	799	1249	8	960	39,77°
1,6426694	481	769	9	600	38,72°
1,5861226	4961	8161	10	6480	37,44°
1,5625	45	75	11	60	36,87°
1,4894168	1679	2929	12	2400	34,98°
1,4500174	161	289	13	240	33,86°
1,4302388	1771	3229	14	2700	33,26°
1,3871605	56	106	15	90	31,89°

Tabla 3. Transcripción de Plimpton 322 al sistema decimal (Robson, 2001). Se han añadido las columnas V y VI. El valor en negrita está corregido respecto al erróneo en Robson (2001)

$$c=13\cdot 60^1+19=799$$

$$a^2/b^2=1+41\cdot 60^{-1}+33\cdot 60^{-2}+59\cdot 60^{-3}+$$
$$+3\cdot 60^{-5}+45\cdot 60^{-6}=1{,}6927731$$

y admitimos que la relación [E1] debe cumplirse, se detecta un error en el valor a^2/b^2, ya que

$$\frac{a^2}{a^2-c^2}=\frac{1249^2}{1249^2-799^2}=1{,}6927094\neq$$
$$\neq 1{,}6927731=\frac{a^2}{b^2}$$

Como

$$1{,}6927094=1+41\cdot 60^{-1}+33\cdot 60^{-2}+45\cdot 60^{-3}+$$
$$+14\cdot 60^{-4}+3\cdot 60^{-5}+45\cdot 60^{-6}$$

el valor correcto de a^2/b^2, en el sistema sexagesimal, debe ser 1, 41 33 **45 14** 03 45 (ver tabla 2), en lugar de 1, 41 33 **59 00** 03 45 (este error pudo ocurrir porque el escriba babilonio sumara dos dígitos consecutivos sin darse cuenta, 45 + 14 = 59). Nótese que, en Robson (2001, 175, tabla 3), aparece el valor incorrecto $a^2/b^2 = 1{,}6845877$, en lugar del correcto **1,6927094**, escrito en negrita en la tabla 3 (ver Fernández, 2009). También se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (1249, 960, 799)$, donde

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1249^2-799^2}=960$$

Errores en II-9 y II-13. Si expresamos los números de la fila 9 en el sistema decimal:

$$a=12\cdot 60^1+49=769$$

$$c=9\cdot 60^1+1=541$$

$$a^2/b^2=1+38\cdot 60^{-1}+33\cdot 60^{-2}+36\cdot 60^{-3}+$$
$$+36\cdot 60^{-4}=1{,}6426694$$

y admitimos que la relación [E1] debe cumplirse, se detecta un error en el valor c, ya que

$$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow c=a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}}=$$
$$=769\cdot\sqrt{1-1{,}6426694^{-1}}=481\neq 541 \qquad [E2]$$

Como $481 = 8\cdot 60^1 + 1$, el valor correcto de en el sistema sexagesimal debe ser **8** 01 (ver tabla 2), en lugar de **9** 01 (nótese que se trata de una simple errata cometida al escribir el número en la tablilla). Además, se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (769, 600, 481)$, donde

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{769^2-481^2}=600$$

Razonando de forma análoga se detecta también un error en II-13. A partir de la relación [E2], el valor correcto de en el sistema sexagesimal debe ser **2 41** (ver tabla 2), en lugar de **7 12 01**. Nótese que originalmente escribieron, en lugar del número correcto c, el cuadrado de éste, c^2, pues se cumple 7 12 01 = $(2\ 41)^2$. En esta fila se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (289, 240, 161)$.

Error en III-15. Si expresamos los números de la fila 15 en el sistema decimal: $a = 53$; $c = 56$;

$$a^2/b^2 = 1 + 23\cdot 60^{-1} + 13\cdot 60^{-2} + 46\cdot 60^{-3} + \\ + 40\cdot 60^{-4} = 1{,}3871605$$

y admitimos que la relación [E1] debe cumplirse, se detecta un error en el valor a, ya que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a = c\cdot\sqrt{\left[1-\left(a^2/b^2\right)^{-1}\right]^{-1}} = \\ = 56\cdot\sqrt{\left(1-1{,}3871605^{-1}\right)^{-1}} = 106 \neq 53$$

Como $106 = 1\cdot 60^1 + 46$, el valor correcto de en el sistema sexagesimal debe ser **1 46** (ver tabla 2), en lugar de **53** (nótese que en lugar del número correcto a, aparece la mitad de éste: $a/2$). Además, se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (106, 90, 56)$, donde

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{106^2 - 56^2} = 90$$

Errores en I-2 y III-2. Si transcribimos los números de III-2 y II-2 (ver figuras 1 y 2) al sistema sexagesimal:a = 3 12 01 yc = 56 07 (ver tabla 1), y los pasamos al sistema decimal: $a = 3\cdot 60^2 + 12\cdot 60^1 + 1 = 11\,521$ y $c = 56\cdot 60^1 + 7 = 3367$, comprobamos que la relación de Pitágoras [E1] no se cumple, ya que $a^2 - c^2$ no es un cuadrado perfecto pues

$$\sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{11\,521^2 - 3367^2} = 11\,018{,}0194227$$

Por lo tanto, se detecta un error en uno de los valores a o c. Suponiendo que el valor es correcto, y teniendo en cuenta que $c^2 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, planteamos la ecuación diofántica siguiente:

$$(a-b)(a+b) = 3367^2 = 7^2\cdot 13^2\cdot 37^2$$

Esta ecuación tiene exactamente 14 soluciones naturales diferentes que hemos determinado resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} a - b = 7^r\cdot 13^s\cdot 37^t \\ a + b = 7^{2-r}\cdot 13^{2-s}\cdot 37^{2-t} \end{cases} \qquad [E3]$$

donde $r, s, t \in \{0, 1, 2\}$ tales que

$$7^{2-2r}\cdot 13^{2-2s}\cdot 37^{2-2t} > 1$$

En la tabla 4 aparecen todas las soluciones posibles de la ecuación diofántica y las correspondientes expresiones decimal y sexagesimal del valor a^2/b^2, para cada una de ellas. De entre todas las soluciones, sólo hay una de ellas (a= 4825 y b = 3456) cuyo valor a^2/b^2, = 1, 56 56 58 14 **50 06** 15, escrito en el sistema sexagesimal numérico, tiene más de cuatro dígitos y el último de ellos es 15 (características que cumple el número incompleto de I-2 en la tablilla, como se observa en la Tabla I). De esta manera, como $a = 4825 = 1\cdot 60^2 + $ $+ 20\cdot 60^1 + 25$, el valor correcto de a, en el sistema sexagesimal, debe ser **1 20 25** (ver posición III-2 en tabla 2), en lugar de **3 12 01**. Además, se detecta un error en el penúltimo dígito del número incompleto que aparece en I-2 de la tablilla. Sus últimos dígitos, en el sistema sexagesimal, deben ser 58 14 **50 06** 15 (ver Tabla II), en lugar de 58 14 **56** 15. También se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (4825, 3456, 3367)$.

Veamos ahora cómo se obtienen los números incompletos que aparecen en Plimpton 322.

Para determinar los números incompletos que aparecen en la columna I, podemos utilizar de nuevo la relación [E1]. Por ejemplo, la primera fila de la tablilla (ver figuras 1 y 2) se transcribe, en el sistema sexagesimal numérico, como un número incompleto a^2/b^2 en I-1 (cuyo último dígito parece ser 15), y los números c = 1 59 y a = 2 49 en II-1 y III-1, respectivamente. Si expresamos estos números en el sistema decimal como $a = 2\cdot 60 + 49 =$ $= 169$ y $c = 60 + 59 = 119$, y utilizamos la relación [E1], resulta:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 - c^2} = 1{,}9834028 = \\ = 1\cdot 60^0 + 59\cdot 60^{-1} + 15\cdot 60^{-3}.$$

Por lo tanto, el número incompleto en I-1, escrito en el sistema sexagesimal numérico, es $a^2/b^2 = 1, 59\ 00\ 15$. De esta manera, se obtiene la terna pitagórica $(a, b, c) = (169, 120, 119)$, donde

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} =$$
$$= \sqrt{169^2 - 119^2} = 120$$

Razonando de la misma manera, se obtienen resultados análogos para las filas 2, 3 y 4 de la tablilla (véase tabla 3).

Valores (r, s, t)	Solución del sistema a	b	Sistema decimal a^2/b^2	Sistema sexagesimal a^2/b^2
(0, 0, 2)	4825	3456	1,94915855208869	1, 56 56 58 14 **50 06** 15
(0, 2, 0)	33625	33456	1,01012833836760	1, 00 36 27 43 54 52 43
(2, 0, 0)	115705	115656	1,00084751988517	1, 00 03 03 03 51 27 46
(2, 0, 1)	4033	2220	3,30027777777778	3, 18 01
(1, 2, 0)	5383	4200	1,64266944444444	1, 38 33 36 36
(2, 1, 0)	9217	8580	1,15399678604224	1, 09 14 23 18 20 49 35
(0, 1, 1)	12025	11544	1,08506944444444	1, 05 06 15
(1, 0, 1)	22015	21756	1,02395124716553	1, 01 26 13 28 09 47 45
(1, 1, 0)	62335	62244	1,00292611401799	1, 00 10 32 02 26 15 37
(0, 0, 1)	153217	153180	1,00048315013186	1, 00 01 44 21 37 32 33
(0, 1, 0)	436033	436020	1,00005963118113	1, 00 00 12 52 49 12 23
(1, 0, 0)	809767	809760	1,00001728914803	1, 00 00 03 44 04 02 29
(0, 0, 0)	5668345	5668344	1,00000035283677	1, 00 00 00 04 34 21 57

Tabla 4. Soluciones de (E3) y posible valor de I-2 en Plimpton 322
(en sistemas decimal y sexagesimal)

El presente trabajo continua en la parte 2 que se publicará en el siguiente número de *Suma*.

Referencias bibliográficas

Abdulaziz, A. A. (2010), *The Plimpton 322 tablet and the Babylonian method of generating Pythagorean triples,* University of Balamand, ArXiv: 1005.0025.

Boyer, C. B. (1994), *Historia de la matemática,* Alianza Universidad Textos.

Britton, J. P., C. Proust y S. Shnider, (2011), «Plimpton 322: a review and a different perspective», *Archive for History of Exact Sciences*, n.º 65, 519-566.

Bruins, E. M. (1949), «On Plimpton 322, Pythagorean numbers in Babylonian Mathematics», *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings,* n.º 52, 629-632.

— (1955), «Pythagorean triads in Babylonian mathematics: The errors in Plimpton 322», *Sumer* , n.º 11, 117-121.

Buck, R. C. (1980), «Sherlock Holmes in Babylon», *American Mathematical Monthly,* n.º 87, 335-345.

Casselman, B. (1999), *The Babylonian tablet Plimpton 322,* obtenido el 17 de mayo de 2014, de <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html>.

Eves, H. W. (1969*a*), *In mathematical circles,* Boston, Prindle, Weber and Schmidt.

Eves, H. W. (1969*b*), *An introduction of the history of mathematics,* New York, Holt, Rinehart and Winston.

Fernández, E. M. (2009), «Ternas pitagóricas: Plimpton 322», Blog personal de E. M. Fernández: *Ciencia en el XXI*, obtenido el 17 de mayo de 2014, de <http://www.cienciaxxi.com/2009/02/ternas-pitagoricas-ii-plimpton-322.html>.

— (2010), «Babilonia y las Matemáticas en el Aula», *Revista Digital de Ciencias Bezmiliana*, obtenido el 17 de mayo de 2014, de <http://www.clubcientificobezmiliana.org/revista/images/stories/babiloniamatematicasaula.pdf>

Friberg, J. (1981), «Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322. Pythagorean triples and the Babylonian triangle parameter equations», *Historia Mathematica,* n.º 8, 277-318.

— (2007), *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts,* Springer, New York.

Gillings, R. J. (1953), *Unexplained errors in Babylonian Cuneiform tablet, Plimpton 322,* Australian Journal of Science 16 (l), 54-56.

González, P. M. (2008), «El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años», *Sigma,* n.º 32, 103-130.

Illana, J. C. (2008), «Matemáticas y astronomía en Mesopotamia», *Suma,* n.º 58, 49-61.

Joyce, D. E. (1995), *Plimpton 322,* obtenido el 17 de mayo de 2014, de <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html>

Kirby, L. (2011), *Plimpton 322: The Ancient Roots of Modern Mathematics,* vídeo documental, Obtenido el 17 de mayo de 2014, de <http://faculty.baruch.cuny.edu/lkirby/>

Maor, E. (1998), *Trigonometric delights,* Princeton University Press.

MEC (2006), *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria,* Ministerio de Educación y Ciencia, BOE 05/01/2007.

Neugebauer, O. (1969), *The exact sciences in antiquity* (2nd edition), Dover Publications, New York.

Neugebauer, O., y A. J. Sachs (1945), «Mathematical cuneiform texts», *American Oriental Series,* n.º 29 New Haven, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 38-41.

O'Connor, J. J., y E. F. ROBERTSON, (2000), *MacTutor History of Mathematics Archive,* obtenido el 17 de mayo de 2014, de <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Babylonian_numerals.html>

Phillips, A. (2011), *The numbers behind Plimpton 322,* Stony Brook University, ArXiv: 1109.3814v1.

Robson, E. (2001), «Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322», *Historia Mathematica,* n.º 28, 167-206.

— (2002), «Words and pictures: new light on Plimpton 322», *American Mathematical Monthly,* n.º 109 (2), 105-120.

Solla Price, D. J. De (1964), «The Babylonian "Pythagorean Triangle" Tablet, *Centaurus,* n.º 10, 219-231.

Schmidt, O. (1980), «On Plimpton 322. Pythagorean numbers in Babylonian mathematics», *Centaurus,* n.º 24, 4-13.

Manuel Feito Guzmán
IES Santa María de los Baños, Fortuna (Murcia)
<manuel.feito@smbfortuna.com>

Carlos J. Sandoval Ruiz
IES Santa María de los Baños, Fortuna (Murcia)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena (Murcia)
<carlos.sandoval@smbfortuna.com>