suma+
Artículos
Julio 2015
79
pp. 27-32

Disecciones y áreas de figuras planas

Álvaro Antón Sancho

En este trabajo presentamos las líneas metodológicas básicas para un tratamiento abierto, creativo, motivador y significativo de la geometría en Educación Secundaria. En concreto, pretendemos indicar cómo se pueden mostrar los conceptos básicos relativos a paralelogramos y otros cuadriláteros, especialmente áreas, a través de la disección de manera que el estudiante tome un papel activo en su aprendizaje. Haremos también una incursión a polígonos de orden superior.

Palabras clave: Innovación didáctica, Aprendizaje activo, Geometría, Figuras planas, Disección.

Dissections and area of plane figures

In this paper, we present the basic methodological lines for an open, creative, motivating and meaningful treatment of geometry in Secondary Education. Specifically, we intend to show how you can display the basic concepts of parallelograms and other quadrilaterals, especially areas through dissection so that students take an active role in their learning. We will also make a foray to higher order polygons.

Key words: Innovative teaching, Active learning, Geometry, Plane figures, Dissection.

El informe PISA del año 2014 deja a España una vez más en una situación muy comprometida en cuanto al aprendizaje de los conocimientos básicos en la enseñanza media. Particularmente, el área de Matemáticas es el que más se aleja, por debajo, de la media de la OCDE. Servais (1980) explica que la dificultad habitual que los estudiantes encuentran para el aprendizaje de las Matemáticas está en su presentación acumulativa, memorística y alejada de todo elemento creativo. Esto se debe, entre otras causas, al predominio de procesos ciegos, poco flexibles y, por ello, ajenos a la aportación activa del alumnado. Ello redunda en una posición del estudiante como espectador de su aprendizaje, lo cual impide una adecuada motivación para comprender e interiorizar lo aprendido.

Es muy habitual abordar los contenidos de la Geometría traducidos a fórmulas y expresiones algebraicas. Todo ello es necesario pero insuficiente, porque obliga a renunciar a adquirir una adecuada visión geométrica y una capacidad elemental de resolución de problemas.

La disección geométrica es una herramienta versátil que permite abordar gran cantidad de problemas geométricos de modo visual y creativo. Escher (1898-1972) fue el primero en utilizar las disecciones

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2014 y aceptado en noviembre de 2014

(junto con los movimientos del plano) para diseñar mosaicos nuevos a partir de figuras geométricas que recubren el plano y utilizó estas técnicas para elaborar muy bellas obras de arte, fruto del ejercicio de una imaginación excepcional.

Nosotros utilizaremos la disección geométrica para proponer una metodología para el cálculo de áreas de polígonos, en particular de cuadriláteros, de un modo abierto, visual y creativo.

Disecciones de polígonos

La disección de un polígono es la división del polígono en piezas que, reordenadas, permite formar otras figuras. Mediante disección es posible abordar abundantes problemas de Geometría plana. Quizá uno de los primeros y más recordados sea el teorema de Pitágoras. A lo largo de la historia han sido diversas las pruebas que se han dado basadas en disecciones, por ejemplo las de Perigal, Anaricio o Bâskara (González Urbaneja, 2001).

Para aplicar la disección al cálculo de áreas es necesario recordar algunos conceptos. Dos polígonos se dicen *equicompuestos* si uno de ellos se puede obtener a partir del otro mediante disección. Si tienen la misma área, se dicen *equivalentes*. Del teorema de Bolyai-Gerwien (Boltianski, 1981) se deduce que dos polígonos son equivalentes si, y sólo si, son equicompuestos. En otras palabras, dado un polígono, el único cuadrado que tiene su misma área es, necesariamente, una disección de ese polígono.

Nosotros haremos una propuesta consistente en el uso de disecciones para el cálculo del área de un cuadrilátero, reconstruyendo éste como combinación de varios rectángulos. Lo plantearemos de modo versátil, que cubra un espectro amplio de figuras, abierto a poder ser aplicado a más tipos de polígonos y de modo que se estimule la visión geométrica y la creatividad del alumnado.

El caso del paralelogramo

Partimos de un paralelogramo *ABCD*. Vamos a proceder al cómputo del área del paralelogramo mediante una disección del rectángulo *AXMY* que se reconstruya en el octógono cóncavo que completa la figura, como se señala en la figura 1. De este modo, conseguiremos el área del paralelogramo inicial a partir de los rectángulos auxiliares.

Si prolongamos los lados *BC* y *CD*, obtenemos que los triángulos sombreados de la figura 2 son equivalentes.

Asimismo, la suma de las áreas de los triángulos coloreados de la figura 3 iguala al área de *BCDM* con exceso de un cuadrilátero, que es el que completa justamente el rectángulo pequeño.

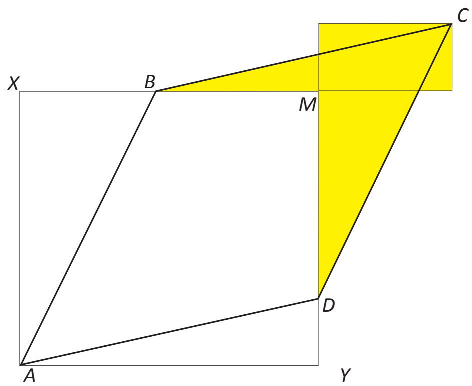

Figura 1. El área del paralelogramo está relacionada con el área del octógono coloreado

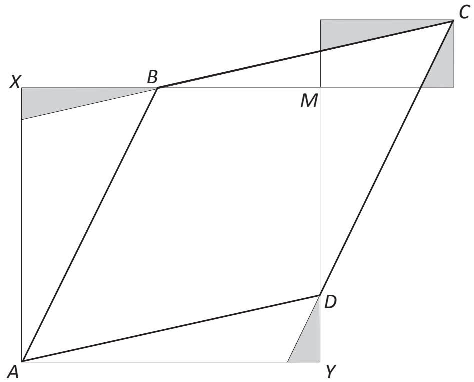

Figura 2. Los triángulos sombreados son equivalentes

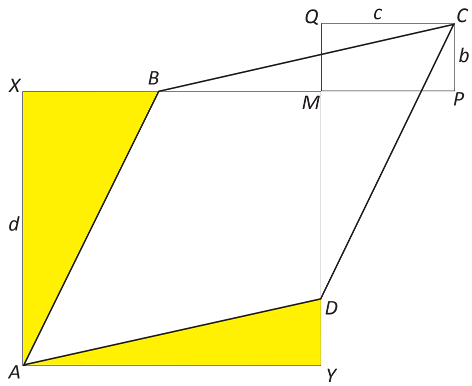

Figura 3. $AYD = BPC$ y $AXB = DQC$

De todo ello obtenemos que el área del paralelogramo inicial es la diferencia de las áreas de los rectángulos auxiliares, $ad - bc$. Es necesario tener en cuenta que los rectángulos auxiliares no están predeterminados, sino que brotan de una construcción libre, de modo que puede variar (esencialmente con la posición inicial en la que se considere el paralelogramo). Así, la solución es necesariamente creativa y adaptada a las capacidades y conocimientos previos de quien la realiza. Se suscita en el alumnado mayor motivación, porque se siente protagonista de su propio aprendizaje, y podemos construir conocimientos sobre cimientos más sólidos porque estaremos dando un mayor sentido a las fórmulas del área que, de otro modo, se muestran como ciegas.

Rombos y cometas

Una vez que el alumnado ha adquirido la forma básica de proceder, está en condiciones de seguir construyendo su aprendizaje geométrico a partir de los dos procesos cognitivos fundamentales en el razonamiento matemáticos: deducción e inducción, que en términos prácticos podemos traducir como particularización y generalización.

Aconsejamos proponer al alumnado que particularice el método a paralelogramos singulares que conoce, como el rombo. El estudiante sabe que en el rombo juegan un papel importante las diagonales y está familiarizado con ellas porque forman parte de la habitual fórmula de cálculo del área. Mediante las construcciones y disecciones propuestas aquí, el alumnado aprenderá a captar el sentido profundo que tienen las diagonales como ejes de simetría de la figura y entenderá mucho mejor, de esta manera, la regularidad singular del rombo, pues observará que en este caso, al intentar repetir la construcción general, obtiene que los rectángulos auxiliares son cuadrados, como se muestra en la figura 4.

De modo natural, el método se puede aplicar a cuadriláteros no paralelogramos de modo diverso. Por ejemplo, consideramos la *cometa* de la figura 4 . En ella, si D es la semidiagonal larga y d la semidiagonal pequeña, entonces tomamos

$$x = \frac{D^2 + d^2}{2D}$$

Esta *cometa* puede ser completada, mediante dos triángulos isósceles, a un rombo, como se ve en la

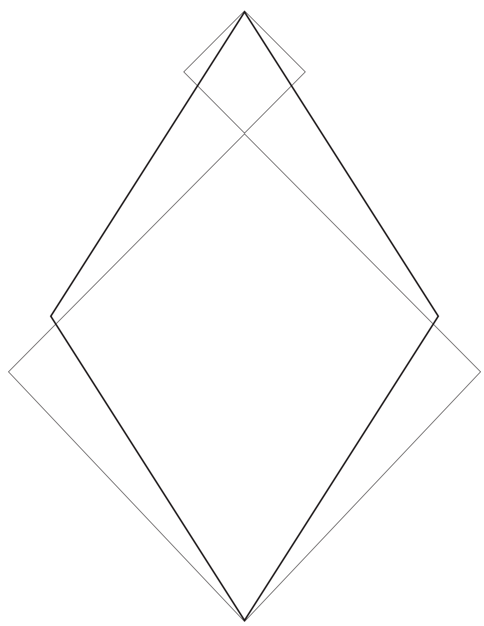

Figura 4. Construcción general en el caso del rombo

figura 5, cuya área se obtiene del modo estudiado anteriormente.

Finalmente, agrupando los triángulos isósceles obtenemos un segundo rombo. El área de la *cometa* se puede calcular, entonces, como la diferencia de los rombos construidos.

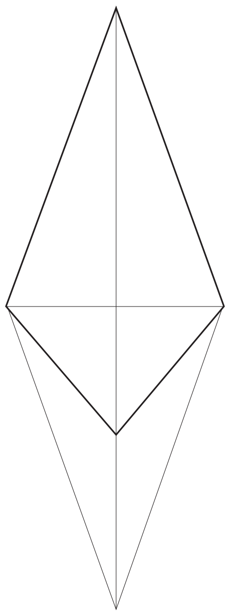

Figura 5. La *cometa* se completa a un rombo mediante triángulos isósceles

En el caso de una *cometa* general, los triángulos que permiten completar el rombo no son isósceles y, por tanto, no forman, a su vez, otro rombo. Pero sí forman un paralelogramo. Igualmente, el área de la *cometa* es la diferencia del área del rombo y el área del paralelogramo, que se calculan del modo como hemos mostrado en los párrafos anteriores.

Se puede proceder también de otra manera: se puede dividir la figura en dos triángulos equivalentes por el eje de simetría y completar uno de los triángulos a un paralelogramo. El área de ese paralelogramo coincide con el área de la *cometa* inicial. En lugar de completar la figura a otra ya conocida, aquí estamos procediendo por disección y cuadratura.

De esta manera, estamos duplicando la exigencia de creatividad del alumnado para resolver el problema. En primer lugar, el estudiante debe diseñar una manera de llevar su problema al caso del rombo o del paralelogramo, ya estudiados. Para ello, debe proceder por disección y cuadratura o bien completando la figura a otra conocida. En segundo lugar, se ha de lograr la manera más sencilla de obtener el área de las figuras auxiliares construidas. Puede ocurrir que sean varias, de modo que se está exigiendo del alumnado un esfuerzo de optimización en este sentido. Por tanto, se pone en juego la creatividad, por una parte, y los conocimientos y habilidades anteriormente adquiridos, por otra. El aprendizaje es, así, eminentemente constructivo.

Dejamos al lector la generalización del método a cuadriláteros que admiten un único eje de simetría, como el trapecio isósceles. Se podrá comprobar cómo el cálculo del área por este método puede realizarse a partir de diferentes disecciones y la decisión entre ellas plantea un problema de optimización.

Estamos duplicando la exigencia de creatividad del alumnado para resolver el problema

Ampliación a otros polígonos

Una metodología abierta como la que presentamos puede ser propuesta al alumnado para resolver cuestiones progresivamente más complejas de modo creativo y adaptado a sus necesidades.

En este punto sugerimos introducir el trabajo con polígonos regulares. Hasta ahora hemos manejado cuadriláteros, que hemos resuelto como rectángulos equivalentes. El polígono de un mayor número de lados introduce una dificultad nueva: diseñar un modo adecuado de encontrar cuadriláteros equivalentes de modo accesible para facilitar el cálculo del área. Nuevamente, este paso ha de realizarse de modo personal y creativo y se está aprovechando la base de conocimientos y habilidades previamente adquirida. De este modo, continuamos avanzando en la dimensión constructiva de la aptitud geométrica.

Continuamos avanzando en la dimensión constructiva de la aptitud geométrica

Para comenzar a abordar el problema planteado para polígonos regulares, podemos proceder de dos maneras:

- Mediante cuadraturas (Grupo Alquerque, 2005).
- A partir de las triangulaciones canónicas del polígono.

El trabajo con cuadraturas aporta un beneficio innegable al alumnado en cuanto a profundización en el conocimiento de las figuras geométricas o el manejo físico de las mismas (por ejemplo a través de puzles). Tiene la dificultad intrínseca a las mismas cuadraturas, que en ocasiones son poco regulares y sus medidas son difícilmente accesibles.

Proponemos que el escolar obtenga sus propias soluciones partiendo de las triangulaciones sencillas y canónicas que, en el caso de polígonos regulares, son muy accesibles al alumnado. A partir de ellas, el estudiante puede construir fácilmente paralelogramos con los que puede trabajar según hemos explicado ya. Surge, entonces, la cuestión de hacerlo de la manera óptima (¿cuál es el mínimo número de paralelogramos necesarios?, etc.).

Por ejemplo, partiendo del hexágono regular y de la triangulación central, el escolar aprenderá a resolver su área a partir de tres rombos.

De esta manera, además, surgirá de modo natural la pregunta acerca de la causa por la que en el caso del hexágono, al contrario de otros polígonos, obtenemos rombos. Ello le llevará a profundizar en los elementos notables del polígono y, en este caso particular, en la geometría del hexágono.

Otra opción es dividir el hexágono en dos trapecios isósceles y reordenarlos para formar un paralelogramo, como en la figura 6. De esta manera también se suscita la pregunta por si esto es una propiedad peculiar del hexágono y cuál es la razón.

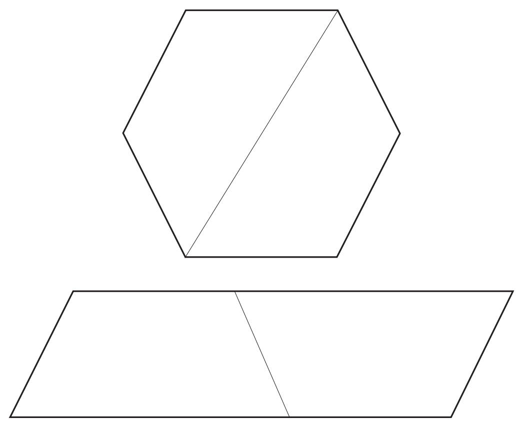

Figura 6. Disección de un hexágono regular para formar un paralelogramo.

La competencia matemática

La OCDE establece, a la hora de explicar los contenidos de la competencia matemática, ocho procesos generales que es necesario ir adquiriendo en las enseñanzas primaria y secundaria. Entre ellas: pensar y razonar, argumentar, comunicar y modelar (OCDE, 2004, 40).

Esta diversidad de procesos muestra una riqueza de contenido y habilidades que va más allá del cálculo rutinario y el procedimiento ciego o memorístico a los que estamos acostumbrados en la enseñanza de las matemáticas. Por eso también las tareas a plantear en el aula deben ser igualmente ricas, variadas y de diferente complejidad, destinadas a adquirir este tipo de competencias. De hecho, la OCDE establece grados en la adquisición de estos procesos:

1. Reproducción y procedimientos rutinarios.
2. Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
3. Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

El segundo nivel de complejidad establece el carácter constructivo del aprendizaje de las matemáticas. Por su parte, el tercer nivel establece el elemento de creatividad en la formulación y resolución de problemas, todo ello sustentado en el aprendizaje constructivo. Es necesario, por tanto, trascender el nivel memorístico-rutinario (primer nivel) hacia lo constructivo-creativo.

Esto es lo que pretendemos hacer con la metodología propuesta. Combinar el tratamiento rutinario de la Geometría con el manejo de procesos abiertos e integrados entre ellos que permitan, por una parte, afianzar y comprender los procesos rutinarios y, por otra, potenciar la creatividad del alumnado y el papel protagonista en su propio aprendizaje. Elaborando sus propias soluciones, el estudiante conseguirá, además, sentirse motivado hacia el estudio de las Matemáticas, motivación que le viene de sí y, por tanto, es más fecundo que cualquier elemento motivador externo que el docente pueda introducir.

Referencias bibliográficas

Boltianski, V. G. (1981), *Figuras equivalentes y equicompuestas*, Mir, Moscú.

González , P. M. (2001), *Pitágoras: el filósofo del número*, Nivola, Madrid.

Grupo Alquerque (2005), «Cuadraturas de polígonos regulares», *Suma*, n.º 48, 65-68.

OCDE (2004), *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*, OECD, París.

Servais, W. (1980), «Humanizar la enseñanza de la matemática», *Ministerio de Educación y Ciencia, Revista de Bachillerato*, Suplemento n.º 13.

Álvaro Antón Sancho
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
Escuela Universitaria de Magisterio «Fray Luis de León»
Universidad de Valladolid
<alvaro.anton@eumfrayluis.com>