SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

n.º 24

FEBRERO

1997

SUMA 24

febrero 1997

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 5.700 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de Javier Carvajal proceden del libro-catálogo *Forma y números. variaciones.* $\pi r^2 a$, editado por la Fundación Bancaja.

SUMA 24

febrero 1997

Matemáticas y selección social

EDITORIAL

RECIENTEMENTE, una institución pública celebró las pruebas de selección correspondientes a una plaza que se había convocado para el servicio de limpieza. La primera parte, eliminatoria, consistía en una prueba de «cultura general», en la que junto a preguntas de diversa índole aparecía una de matemáticas: hallar, sin calculadora naturalmente, la raíz cuadrada de un número de varias cifras. Nunca dejará de sorprendernos que quienes diseñaron esas pruebas estuvieran convencidos de que saber aplicar con corrección el algoritmo de la raíz cuadrada es una cuestión de «cultura general» y de que, además, ello sirve para limpiar unas determinadas instalaciones con mayor eficacia.

Tampoco es raro encontrarse con alumnos universitarios, de carreras que en su primer año tienen una asignatura de matemáticas generales o de estadística, que están cursando tercero o cuarto curso y tienen aprobadas todas las materias propias de esos estudios excepto esa asignatura que el currículo de dichas carreras ve como instrumental.

Los anteriores son dos ejemplos extremos (quizá anecdóticos), del papel que las matemáticas juegan como agente de selección social en muy diversos ámbitos.

No vamos a negar aquí la importancia que nuestra ciencia tiene en la sociedad actual, ni que una formación matemática adecuada ayuda en gran medida a desenvolverse en la vida personal y profesional del ciudadano de nuestra época. De hecho, existe cierta unanimidad en considerar que entre los fines de la matemática está su carácter instrumental, tanto para el estudio de muchas otras materias, como para la vida cotidiana.

Pero esto no es óbice para poner de manifiesto el abuso que se hace, en bastantes ocasiones, de la utilización de los conocimientos de matemáticas para llevar a cabo una selección –unas veces en el mundo del trabajo, otras en el académico–, que no se corresponde con los conocimientos y destrezas que, con posterioridad, van a ser necesarios para desarrollar ese trabajo o para comprender esa otra materia de la que, presumiblemente, las matemáticas eran un instrumento imprescindible.

En este contexto, el profesor de matemáticas no sólo tiene difícil plantearse la enseñanza de su materia desde consideraciones didácticas, sino que además se ve impelido a actuar a la defensiva, es decir, a preparar a sus alumnos para tratar de sobrevivir en ese proceso de selección social, del que quizá de manera artificial, forman parte las matemáticas.

Creemos que, por el propio bien de la enseñanza de nuestra materia, los profesionales debemos reflexionar sobre el papel que jugamos dentro de este proceso y sobre las posibilidades que tenemos de contribuir a su modificación.

Por acuerdo de la Junta de Gobierno de la Federación el número anunciado de SUMA, dedicado a la memoria de Gonzalo Sánchez Vázquez, será el del próximo mes de junio.

Asimismo, la Junta de Gobierno acordó actualizar las cuotas de suscripción de la revista, que no se habían modificado desde 1990.

SUMA 24
febrero 1997, pp. 5-19

Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática

Luis Rico

ARTÍCULOS

La delimitación de finalidades es un dato esencial para cualquier plan de formación; por ello, las finalidades de un currículo de matemáticas lo caracterizan en su extensión y alcance, y constituyen parte determinante en el proceso de su planificación. El conocimiento de las finalidades contempladas en diversos proyectos curriculares permitió en el pasado sistematizar su estudio y establecer determinadas tipologías y variables para caracterizar las posibles finalidades de un currículo de matemáticas. En la situación actual es posible establecer con mayor precisión las dimensiones en torno a las cuales se articulan los diversos tipos de finalidades contempladas a lo largo de la historia del curriculo de matemáticas. En este trabajo se presenta una revisión de antecedentes relativos al estudio de finalidades y una discusión sobre cuatro dimensiones mediante las que organizar y trabajar las finalidades del currículo de matemáticas en la educación obligatoria.

LOS trabajos teóricos sobre el currículo de matemáticas realizados en los últimos 30 años se han enfocado hacia la búsqueda de componentes o dimensiones mediante las que estructurar el sistema curricular. Según el nivel de reflexión elegido han aparecido diferentes componentes (Howson, 1979; Steiner, 1980; Howson, Keitel y Kilpatrick, 1981; Rico, 1990; Romberg, 1992). También la reflexión teórica ha considerado en profundidad la cuestión de los fines de la educación matemática, que hemos encontrado en muchos de los interrogantes y de las propuestas planteados en los estudios y documentos curriculares:

¿Para qué enseñar matemáticas? ¿qué matemáticas enseñar en una sociedad influida por la tecnología? ¿qué formación necesitan los profesores para enseñar matemáticas actualmente? ¿cómo lograr un currículo más flexible, con variedad de opciones y que atienda a las diversas necesidades de los escolares? ¿cómo atender a la diversidad cultural desde el currículo de matemáticas?

Estos son algunos de los interrogantes que pueden encontrarse, de una u otra forma, a lo largo de los documentos sobre el currículo de matemáticas elaborados recientemente. Todos ellos señalan en una misma dirección: el debate sobre los fines de la educación matemática, en general, es una cuestión crucial para el currículo de matemáticas en el sistema educativo, en especial, para el periodo de la educación obligatoria. Las cuestiones que se plantean no son triviales y afectan a un nivel de reflexión general, en el que las dimensiones de reflexión sobre el currículo son culturales, políticas, educativas y sociales.

Dedicamos este trabajo a presentar el debate sobre los fines de la educación matemática, que se ha intensificado y precisado en fechas recientes; también presentamos una elaboración propia sobre este campo.

Los fines de la Educación Matemática

La cuestión de los fines o metas de la educación matemática no es reciente; de hecho, con un matiz u otro, la encontramos de manera permanente en la práctica totalidad de documentos curriculares, convencionales o innovadores, conocidos. La contribución de las matemáticas a los fines generales de la educación se ha considerado desde siempre positiva y altamente beneficiosa, de ahí la preocupación constante de los especialistas por describir extensamente tales fines, de manera que los currículos de matemáticas sean instrumentos adecuados para su consecución.

Así, Krulik (1975) propone las siguientes metas para la educación matemática, en las que señala las relaciones con las metas generales de la educación y las necesidades de la sociedad:

Meta 1. Lograr, para cada individuo, la competencia matemática que le corresponde.

Meta 2. Preparar a cada individuo para la vida adulta, reconociendo que algunos alumnos requieren más instrucción matemática que otros.

Meta 3. Fomentar el reconocimiento de la utilidad fundamental de la matemática en nuestra sociedad.

Meta 4. Desarrollar la habilidad para usar los modelos matemáticos con miras a la resolución de problemas.

Sin embargo, no hay un acuerdo general sobre los contenidos globales de estas metas. Howson y Kahane (1986) consideran los siguientes cuatro aspectos mediante los que las matemáticas contribuyen a los fines educativos generales:

i) el desarrollo de la capacidad de razonar,

ii) su carácter ejemplar de certeza,

iii) el placer estético que causan, y

iv) su función de instrumento auxiliar para otras disciplinas.

En estos dos ejemplos se proponen ideas diferentes. De hecho, si incorporamos nuevos documentos, aparecen nuevos y distintos enunciados sobre los fines de la educación matemática. Las diferencias relativas a los fines entre los currículos pueden llegar a ser mayores que las coincidencias. Para estudiar este tema vamos a revisar algunos autores que han reflexionado sobre la pregunta *¿Por qué enseñamos matemáticas?*

La cuestión no es trivial, e interesa igualmente a los padres, a los legisladores, a los administradores y a los políticos que deben tomar decisiones sobre el destino de los recursos dedicados a la educación.

Caracterizaciones

Los documentos que reflexionan y estudian la planificación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se plantean, ineludiblemente, distintos tipos de metas o finalidades que se pretenden conseguir. Los ejemplos que podemos encontrar son múltiples, y de ellos hemos hecho una selección.

La contribución de las matemáticas a los fines generales de la educación se ha considerado desde siempre positiva y altamente beneficiosa, de ahí la preocupación constante de los especialistas por describir extensamente tales fines, de manera que los currículos de matemáticas sean instrumentos adecuados para su consecución

El *National Committee on Mathematical Requirements* (USA), como parte de un documento curricular, realizó, en 1923 (Bidwell, 1970), unas consideraciones sobre las metas de la educación matemática, que resumimos. En el apartado de Principios Generales señaló que una discusión sobre educación matemática y sobre las vías y medios de enfatizar su validez debía realizarse sobre una formulación comprensiva de las metas y propósitos de tal educación. Las metas y propósitos de la enseñanza de las matemáticas pueden surgir de la naturaleza de la materia, del papel que desempeña en la vida práctica, intelectual y espiritual del mundo, y también de los intereses y capacidades de los estudiantes.

En el apartado dedicado a las metas de la instrucción afirma que es usual distinguir tres clases de metas:

1. Prácticas o utilitarias.
2. De entrenamiento o desarrollo.
3. Culturales.

Considera que las tres clases no son mutuamente excluyentes. Las metas prácticas o utilitarias, en sentido restringido, significan la utilidad directa o inmediata de un hecho, método o proceso en matemáticas; a continuación describe detalladamente la utilidad práctica de algunos contenidos básicos generales.

Entre las metas de entrenamiento o desarrollo incluye aquellas metas relacionadas con el entrenamiento mental. Estas metas implican la adquisición de ciertas características más o menos generales y la formación de ciertos hábitos mentales, de los que se espera que actúen en campos más o menos relacionados, es decir, que transfieran a otras situaciones. Algunas de las metas que enuncia son:

i. la adquisición, en forma precisa, de aquellas ideas o conceptos que permiten realizar la concepción cuantitativa del mundo;

ii. el desarrollo de la habilidad para pensar claramente en términos de tales ideas y conceptos;

iii. la adquisición de hábitos mentales y actitudes que hagan efectivo el anterior entrenamiento.

Las metas culturales son de carácter intelectual, ético, estético o espiritual que están implicadas en el desarrollo de la apreciación y comprensión, y en la formación de ideales de perfección; son metas menos tangibles, pero no menos reales.

El documento *Mathematics from 5 to 16*, del Department of Education and Science británico (1985), propone las siguientes metas generales para la educación matemática en el periodo obligatorio, cuya orientación hay que destacar en los procesos de enseñanza.

1. *Las matemáticas son un elemento esencial de comunicación.*
2. *Las matemáticas son una herramienta potente.*
3. *Hay que apreciar las relaciones internas dentro de las matemáticas.*
4. *Las matemáticas deben resultar una actividad fascinante.*
5. *Hay que fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente.*
6. *Trabajar de modo sistemático.*
7. *Trabajar independientemente.*
8. *Trabajar cooperativamente.*
9. *Profundizar en el estudio de las matemáticas.*
10. *Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades matemáticas.*

Las tres primeras metas hacen referencia a algunas características relevantes de las matemáticas; la cuarta a la valoración personal de las matemáticas; las metas quinta, sexta, séptima, octava y novena hacen referencia al modo de trabajo y la adquisición de métodos y la décima resume la necesidad de utilizar los conocimientos adquiridos.

En el Diseño Curricular Base, del Ministerio Español de Educación y Ciencia (1989), encontramos las finalidades enunciadas en términos muy generales, no mediante propuestas concretas; así lo vemos en las siguientes consideraciones:

La finalidad formativa del aprendizaje de las matemáticas ha sido el argumento tradicionalmente utilizado para justificar su inclusión en el currículo de la Educación Obligatoria. Aunque en la actualidad el peso de este argumento ha disminuido considerablemente, sigue pareciendo razonable suponer que determinadas formas de actividad matemática favorecen el desarrollo y la adquisición de capacidades cognitivas muy generales. [...] Junto a la finalidad formativa, las matemáticas escolares tienen una clara finalidad utilitaria o pragmática. El contenido matemático es una herramienta auxiliar indispensable para otras áreas; las opciones de formación para los alumnos en la Educación Post-Obligatoria requieren un conocimiento matemático; también son un referente claro las necesidades matemáticas en la vida adulta; la aparición y el uso de nuevos medios tecnológicos incide en la finalidad utilitaria de las matemáticas. Los aspectos formativo y utilitario de las matemáticas escolares no son en absoluto antagónicos sino complementarios (p. 484).

Aunque los documentos reseñados contemplan metas generales de la Educación Matemática, no todos hacen el mismo tipo de consideraciones y se observan diferencias apreciables entre las caracterizaciones realizadas por cada uno de ellos.

En ocasiones, aprovechando la realización de un encuentro internacional o la puesta en marcha de un nuevo currículo, se ha producido un debate sistemático que ha tratado de organizar las ideas en torno a las metas de la educación matemática; pasamos a resumir dos de estos estudios.

Los beneficios de la educación deben extenderse a todos los estratos de la sociedad, sin atender a diferencias económicas o sociales; todos los niños y jóvenes tienen derecho a alcanzar las posibilidades que les permitan sus propias capacidades individuales...

Debate sobre los fines de la Educación Matemática

Ubiratan D'Ambrosio en el trabajo *Metas y objetivos generales de la Educación Matemática* (Steiner y Christiansen, 1979), resume el trabajo realizado en ICME III de Karlsruhe en relación con las finalidades de la Educación Matemática.

Comienza planteando que la cuestión «¿por qué se enseñan matemáticas?» hay que situarla en el contexto de un marco educativo variable, que se ha modificado profundamente por la realización del ideal de una educación masiva. Los beneficios de la educación deben extenderse a todos los estratos de la sociedad, sin atender a diferencias económicas o sociales; todos los niños y jóvenes tienen derecho a alcanzar las posibilidades que les permitan sus propias capacidades individuales; en este sentido hay una obligación social de reducir a cero las diferencias debidas a la educación. Las distintas filosofías generales sobre educación, al dar prioridad a la búsqueda de valores, o a la adquisición de nuevos conocimientos, o al sostenimiento de una estructura social determinada, dan expresión a algunas de las tensiones que genera el fenómeno educativo y ponen de manifiesto la dificultad para dar satisfacción al progresivo desarrollo y afianzamiento de los valores democráticos.

Cuando se tiene en cuenta que el trabajo del profesor debe ser educar y no sólo instruir, destacando el interés que presenta el desarrollo de capacidades de carácter general, hay que admitir que la educación matemática no es el único medio para conseguir estos comportamientos, incluso que es probable que no sea el mejor camino posible; esto plantea una respuesta negativa a la cuestión inicial: no es necesario enseñar matemáticas, al menos no en la forma en que actualmente se realiza.

Cuando hablamos de la educación matemática y sobre las funciones sociales a las que debe atender hay que considerar, prioritariamente, a qué clase de sociedad nos referimos. Pensando en la sociedad del futuro, con toda la carga utópica que incluyen los ideales de justicia, libertad, dignidad de vida, igualdad de oportunidades, etc., entonces es posible discutir sobre cómo orientar la educación para alcanzar ese futuro. Sobre esta base, D'Ambrosio pasa a presentar los dos puntos de vista más destacables.

Primero: el *punto de vista utilitario*, cuyas ideas principales resumimos. Hay una necesidad creciente de preparar matemáticos, en todos los niveles, para la aplicación y el uso de la tecnología. Los mismos matemáticos vienen observando con preocupación la distancia entre lo que se enseña e investiga en matemáticas y lo que se aplica. La sociedad espera, aunque sea a largo plazo, algún beneficio o recompensa de las matemáticas; espera que los matemáticos sean profesionales competentes, capaces de justificar por qué están siendo pagados para hacer matemáticas.

La educación matemática refleja también la posición que las matemáticas y los profesionales de la misma tienen en la sociedad. Si se hace una educación especulativa o contemplativa, dedicada a una élite, y dejando la formación profesional para una estructura paralela, los fines educativos de las matemáticas quedan dirigidos a la formación individual. En cambio, con una formación masiva y la inclusión de la formación profesional en el Sistema Educativo, la sociedad puede esperar mucho más. En la mayor parte de los enunciados de las metas de la educación matemática se nota un énfasis fuerte hacia el comportamiento social y hacia el mundo exterior.

Segundo: *punto de vista especulativo*. Un segundo tipo de educación matemática, desplazado después de la revolución industrial, y que aún no se ha reincorporado al contexto de la educación científica, es el esfuerzo por desarrollar la educación como libre y creadora, como adquisición del arte de utilizar el conocimiento. La meta para esta forma creativa y más estructurada de la educación matemática consiste en colocar meramente la matemática en su posición de lenguaje conveniente y útil para simular el mundo real. El objetivo es crear nuevas matemáticas, nuevas teorías y ayudar a la solución de nuevos problemas, que tan sólo ahora están siendo identificados y reconocidos. Objetivo básico de la educación matemática no es el perpetuar conocimientos, o avanzar un poco sobre el existente, sino fomentar la creación de nuevos conocimientos. La enseñanza no es la meta esencial de esta forma creativa o contemplativa de la educación matemática; lo que es fundamental es lograr una posición favorable a la creación de nuevo conocimiento.

Cuando hablamos de la educación matemática y sobre las funciones sociales a las que debe atender hay que considerar, prioritariamente, a qué clase de sociedad nos referimos.

Tarea principal de la educación matemática consiste en proponer estrategias que permitan el desarrollo simultáneo de estos dos objetivos, el primero basado en el concepto de matemática como cuerpo utilitario de técnicas y habilidades, pensado y diseñado para satisfacer necesidades sociales, y el segundo que considera las matemáticas como componentes de un gran cuerpo de modelos del pensamiento y del lenguaje para simular los fenómenos anteriores.

En estas ideas resume D'Ambrosio su reflexión relativa a los fines de la educación matemática, sobre los que considera que hay que contemplar una variable más: los cambios producidos por el aumento espectacular en el número de alumnos. Los cambios de magnitud en el número de alumnos han producido un cambio igualmente impresionante en el número de profesores, lo que ha dado lugar al nacimiento de una nueva comunidad. Esta situación genera nuevas estructuras que plantean nuevas necesidades y favorecen la creación de nuevos conocimientos.

La reflexión de Romberg

Un estudio diferente y más actual sobre las funciones de la educación matemática es el realizado por Romberg (1991).

Este trabajo se propone explícitamente sistematizar las respuestas a la cuestión *¿Por qué se debe enseñar matemáticas?*, y se analizan las dificultades que surgen en cada caso.

Considera Romberg que hay dos grandes categorías de respuestas o justificaciones a la cuestión planteada:

a) Justificaciones funcionales.

b) Otras justificaciones, entre las que se incluyen el desarrollo de las capacidades personales.

Además de las categorías mencionadas, considera los problemas relativos a la justificación. Pasamos a presentar las ideas más destacables, a nuestro juicio, en cada una de las categorías mencionadas.

Justificaciones funcionales

Tanto para los alumnos como para la sociedad las matemáticas satisfacen una necesidad funcional de largo alcance. Las escuelas deben preparar a los alumnos para ser ciudadanos productivos; la formación especializada de las matemáticas es un requisito previo esencial para el estudio de una amplia variedad de disciplinas. La cuestión que se plantea de inmediato es: ¿cuántas matemáticas son suficientes para todos?

El NCTM plantea que «los empleados deben estar preparados para comprender las complejidades y tecnologías de la comunicación, para plantear cuestiones, asimilar información desconocida y trabajar cooperativamente en equipo»; todo esto implica que todos los alumnos en edad escolar deben tener la oportunidad de estudiar más matemáticas, algo distintas de las que se estudian en el currículo actual.

Por el contrario, otros educadores creen que, al no ser necesario un control y dominio de los procedimientos algorítmicos que pueden ejecutar las máquinas, la mayor parte de los niños no necesitarán estudiar demasiadas matemáticas.

Surgen así, tres cuestiones cruciales:

> *Considera Romberg que hay dos grandes categorías de respuestas o justificaciones a la cuestión planteada: justificaciones funcionales y otras justificaciones, entre las que se incluyen el desarrollo de las capacidades personales*

i) ¿Qué ideas matemáticas serán útiles para los ciudadanos en el futuro?; hay quien piensa que las matemáticas serán más importantes y otros que serán menos importantes.

ii) La segunda se refiere a las creencias sobre diferencias y talentos individuales; los que apoyan más cantidad de matemáticas minimizan estas diferencias, mientras que los partidarios del menos consideran que el rendimiento de un alumno debe compararse con el de los demás. Argumento importante en este segundo planteamiento es la idea del currículo diferenciado, que se considera más eficiente; la diferenciación debe basarse en la capacidad, el interés y las necesidades sociales; el riesgo que se corre con la diferenciación es el de promocionar una élite intelectual que controle el desarrollo económico y científico, lo cual «no es compatible ni con los valores de un sistema democrático justo ni con sus necesidades económicas».

iii) La tercera y más importante cuestión son las razones propuestas por quienes están interesados en la historia de la reforma educativa; las peticiones de reforma para que todos los alumnos aprendan más matemáticas y algo distintas, no son nuevas; los resultados de iniciativas reformistas pueden llevar fácilmente a problemas y contradicciones; con todo este planteamiento se ha llegado a cuestionar la función social específica de las matemáticas escolares y a señalar sus diferencias con la disciplina científica de las matemáticas.

En una revisión de posiciones, señala que Keitel (1987) insiste en distinguir entre las actividades educativas que fomentan el uso de las matemáticas o el desarrollo de conceptos y procedimientos matemáticos y la práctica de las matemáticas. Damerow y Westbury (1985) emplean tres niveles de análisis para delimitar las matemáticas para todos:

a) *La distribución del conocimiento:* el conocimiento matemático no es una prerrogativa de ciertas comunidades culturales; al contrario, las matemáticas son potencialmente adecuadas para todas las personas.

b) *El sistema escolar y su integración en la sociedad:* el éxito no procede de los logros de unos pocos sino de los que obtenga la mayoría; el índice de rendimiento es la producción global del sistema escolar, no sólo de los más aptos.

c) *Interacción en la clase:* hay un problema de oportunidades de aprendizaje y de relación con la dinámica del proceso de aprendizaje; hay que analizar y poner en cuestión los supuestos, los modelos y la práctica de clasificar y separar a los alumnos.

Otras justificaciones

Entre ellas encontramos usualmente la idea de que se debe enseñar matemáticas porque se supone que promueven el desarrollo de destrezas de pensamiento de alto nivel. La utilidad del esfuerzo y la confianza en el propio trabajo que proporciona la práctica de ejercicios, es otro tipo de justificación usual.

También se argumenta con frecuencia que las matemáticas tienen una belleza propia, que produce satisfacción a quienes la perciben y sobre cuya valoración es conveniente educar a los jóvenes. Como quinto tipo de argumentación encontramos la necesidad de formar y promocionar matemáticos profesionales; se trata de una justificación muy arraigada en muchos profesores.

Finalmente, hay quienes estiman que es útil enseñar matemáticas por su contribución a nuestra cultura democrática occidental; importante también porque forman parte de las dimensiones de la personalidad humana.

Problemas

Queda claro para Romberg que las matemáticas se consideran una materia escolar importante; todas las razones y argumentos expuestos con anterioridad explican, conjuntamente, el fuerte respaldo que recibe esta materia. Sin embargo, no está igualmente clara la correspondencia entre los fundamentos contemplados y las implicaciones curriculares que se pretenden derivar de los mismos.

En primer lugar, es probable que los diferentes fundamentos impliquen un mayor protagonismo para determinadas partes de las matemáticas; en segundo lugar, también ocurre que un mismo fundamento se puede emplear para justificar orientaciones diferentes; en tercer lugar, aun cuando haya acuerdo en las metas, hay disparidades acusadas entre las metas y la realidad; finalmente, no está aún bien desarrollada la justificación de las matemáticas como parte de la cultura.

En resumen, son pocos los especialistas que han justificado adecuadamente la inclusión de las matemáticas en el currículo escolar. Con frecuencia, las justificaciones específicas son superficiales, descubren las disparidades entre los fundamentos y las prácticas y no reflejan las relaciones entre los procedimientos matemáticos formales y sus raíces socioculturales (p. 349).

Se abre aquí un nuevo campo de cuestiones cuyo planteamiento, estudio y resolución interesa destacadamente a la Educación Matemática. Por un lado, la coherencia y ajuste entre las finalidades pretendidas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio del Sistema Educativo y su realización mediante el diseño, desarrollo y puesta en práctica del currículo de las matemáticas escolares, conlleva todo un esfuerzo de racionalidad, de delimitación de contradicciones, de propuestas de ajuste y ensayo de nuevas soluciones, que permitan cubrir con el mínimo de contradicciones las metas pretendidas. El problema no se plantea en términos de diseñar un currículo exento de contradicciones en su enunciado y en su organización. El problema consiste en planificar y llevar a cabo, coordinadamente, la superación de estas contradicciones. No basta, y eso lo sabemos bien, con una lista de hermosos enunciados sobre los valores y utilidad de la matemática que no venga acompañada de una planificación adecuada que indique qué hacer, cómo hacerlo, cuándo realizarlo y el modo de control y ajuste o modificación de las actuaciones.

...hay quienes estiman que es útil enseñar matemáticas por su contribución a nuestra cultura democrática occidental...

No es sorprendente que exista una disparidad entre los fundamentos aducidos y las prácticas reales. Estas disparidades son inevitables cuando las declaraciones de intenciones no son a menudo más que pura retórica ni se explicitan ni consideran los supuestos pedagógicos que deben relacionar los fundamentos con las prácticas (p. 348).

Todo ello plantea problemas fundados en un nuevo campo de estudio, trabajo e investigación que se viene denominando teoría curricular o diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas.

En un trabajo más reciente Niss (1995) reconoce dos tipos de argumentos principales en los estudios sobre fines de la educación matemática: argumentos utilitarios y argumentos de formación general. Entre los argumentos utilitarios recoge los más destacados: los que centran el interés de las Matemáticas Escolares en la formación que proporcionan para desenvolverse en la vida, los que centran dicho interés en las necesidades ocupacionales y los que consideran más importante su función como requisito previo para el estudio de otras ciencias. Los argumentos basados en la formación general de los alumnos abarcan los que se refieren al desarrollo de las capacidades formativas, a la promoción de la personalidad y las actitudes y, finalmente, los que consideran el valor estético y el carácter lúdico y recreativo de las matemáticas.

Niss (1995) reconoce dos tipos de argumentos principales en los estudios sobre fines de la educación matemática: argumentos utilitarios y argumentos de formación general

Ambas categorías de argumentos se pueden relacionar con dos propósitos generales diferentes: servir a la sociedad o servir al individuo; al cruzar estas dos dimensiones Niss establece una matriz de dos por dos, en la que es posible ubicar la mayoría de las reflexiones sobre finalidades de la educación matemática.

Dimensiones que caracterizan los fines de la educación matemática

Aunque empiezan a delimitarse con precisión algunos tipos de finalidades para la educación matemática, no parece haber aún consenso en las respuestas que hay que dar a la pregunta: *¿Por qué enseñamos matemáticas?*

Esta cuestión establece la clave de multitud de problemas que afectan a la tarea que vienen realizando miles de personas a lo largo del mundo y que organizan y dirigen la formación y educación que se transmite a millones de niños y jóvenes. Encontrar respuestas sencillas y directas no es una tarea fácil ya que, por otra parte, los planteamientos posibles pueden llegar a ser muy diferentes e incluso contrapuestos. La cuestión inicial ha sido abordada desde perspectivas muy diversas, empleando una metodología sistemática, buscando alguna taxonomía útil para clasificar y trabajar sobre las metas; también se ha trabajado considerando el tema de modo global, siguiendo planteamientos sociológicos que contemplan la educación matemática como un proceso en desarrollo, dentro del sistema educativo general.

Nosotros hemos realizado nuestra propia reflexión y hemos hecho una elaboración teórica para organizar la variedad de dimensiones que caracterizan los fines de la educación matemática. Nuestro planteamiento comienza por identificar cuatro categorías amplias de finalidades: culturales, sociales, formativas o educativas, y políticas. En base a este sistema de cuatro categorías o dimensiones estructuraremos nuestra posición respecto a los fines de la educación matemática.

Nuestro planteamiento comienza por identificar cuatro categorías amplias de finalidades: culturales, sociales, formativas o educativas, y políticas

Cultura y fines de la educación matemática

En un trabajo ya mencionado, Howson y Kahane (1986) consideran dos aspectos negativos en los fines asignados a las matemáticas. Por un lado, el dominio en el conocimiento de las matemáticas se ha empleado como un criterio para promocionar a los alumnos y para seleccionar el acceso a muchas profesiones, en especial las de carácter científico y técnico. Por otra parte, su origen europeo u occidental hace que bastantes de los componentes culturales que integran este currículo sean extraños a buena parte de las sociedades no europeas en las que se ha implantado. Esta situación ha llevado a planteamientos fuertemente críticos que han hecho surgir dudas sobre la conveniencia de mantener el currículo clásico o proceder a revisarlo y llegar a su supresión, o a nuevos currículos fundamentados sobre bases culturales propias.

> *La incompatibilidad entre los valores de la enseñanza de la matemática y los de la cultura materna no constituye una mera posibilidad teórica sino más bien una realidad histórica. Las décadas pasadas han sido testigo de la conversión de los llamados países en vías de desarrollo en estados independientes. Partiendo en clara desventaja, consecuencia de un bajo nivel de desarrollo socioecónomico, estos países han buscado acelerar su desarrollo a través de la educación, de la ciencia y de la tecnología. Con mucha frecuencia, estos países se volvían a mirar hacia las antiguas potencias, con las que se hallaban vinculados por lazos de intercambios culturales y educativos, buscando en ellos modelos y fuentes de ciencia y de tecnología. Ya fuera acertadamente o no, las matemáticas se percibían, en primer lugar, como la herramienta fundamental de la ciencia y de la tecnología y, en segundo lugar, como una disciplina de revelación divina, universal e independiente respecto de culturas determinadas. Como resultado, comenzó un importante movimiento en pro de la adopción y/o adaptación de las matemáticas, así como se empezaron a introducir estos currículos con la ayuda de organizaciones internacionales y regionales. Al hacer esto, los países en vías de desarrollo no estaban importando tecnología independiente de culturas, sino más bien una cultura occidental más generalizada, una cultura matemático-tecnológica y, en muchas ocasiones, los valores de esta cultura entraban en conflicto directo con los valores ideológicos y, en particular, los religiosos de las culturas maternas* (Jurdak, 1989).

La dimensión cultural es, pues, relevante a la hora de establecer las finalidades de la educación matemática; los problemas señalados por Jurdak, y por muchos otros autores, apuntan a un hecho importante. La enseñanza de las matemáticas forma parte en la actualidad del sistema educativo obligatorio de cualquier país; estos sistemas educativos transmiten, como ya hemos comentado, la herencia cultural básica de cada sociedad y, por ello, las disciplinas que forman parte del currículo no pueden ser ajenas o contrapuestas a los valores fundamentales de esa cultura y esa sociedad. De ahí el gran interés de la aproximación cultural al currículo de matemáticas que autores como Bishop vienen realizando; también la necesidad de mantener la reflexión cultural en el núcleo del debate sobre las finalidades de la educación matemática.

En un orden de ideas distinto, Burton (1989) critica la identificación que se hace de un determinado estilo occidental de interpretar las matemáticas con las matemáticas en general. En la articulación de su crítica plantea dos cuestiones iniciales:

¿Hasta qué punto es sólida la consideración de que las matemáticas son objetivas, rigurosas y convergentes?[...]

¿Qué relación existe entre la consideración de las matemáticas como objetivas, rigurosas y convergentes y una pedagogía basada en un modelo de aprendizaje transmisivo?

Después de analizar la práctica real de reflexión y construcción de las matemáticas, denunciar la distancia de esta práctica con la implementación de los currículos oficiales, y constatar la carencia de aspectos creativos en ellos, señala:

Parece pues que el concepto de las matemáticas transmitido a través de los currículos de la enseñanza oficial se halla mal enfocado en dos aspectos, el de la propia disciplina y en el de la pedagogía. Si cambiamos nuestro enfoque pedagógico, ¿qué efectos se producirán en la asignatura y en los estudiantes? ¿cuáles son las estrategias más efectivas para lograr animar a los profesores a que realicen estos cambios desde su posición intelectual hacia una percepción renovada de las matemáticas, y desde su posición pedagógica hacia la renovación de sus prácticas en el aula? [...] Tengo confianza en que si se vivieran las matemáticas como un área de estudio, de investigación, de dudas, de intuiciones, abierta a la interpretación y a los retos, entonces habría una mayor identificación con su estilo e ideas por parte de alumnos de ambos sexos, de clases diferentes y de razas diferentes. Por otra parte se ha podido constatar un número creciente de evidencias que sustentan la idea de que un estilo competitivo durante el aprendizaje destruye en realidad a muchos estudiantes, quiénes cambian su perspectiva de las matemáticas y su potencial para asimilarlas cuando se les sitúa en un clima que los alienta al trabajo en grupo, a que se escuchen y aprendan unos de otros, a que exploren y respeten otras perspectivas.

Todas las consideraciones sobre enseñanza de las matemáticas se basan, implícita o explícitamente, en un tipo de finalidades que denominamos culturales. Burton pone de manifiesto que las matemáticas que aparecen finalmente en los libros de texto en forma axiomatizada, que se presentan como paradigma de objetividad, rigor y convergencia, no son más que una opción cultural, entre otras igualmente legítimas, de interpretar el conocimiento matemático. La consideración de las matemáticas como parte de la cultura, de cada cultura en concreto, sostiene la fuerte dimensión cultural que encontramos en las finalidades de la enseñanza de las matemáticas. Esta idea la hemos resumido (Rico, 1995) así:

Burton pone de manifiesto que las matemáticas que aparecen finalmente en los libros de texto en forma axiomatizada, que se presentan como paradigma de objetividad, rigor y convergencia, no son más que una opción cultural, entre otras igualmente legítimas, de interpretar el conocimiento matemático

El conocimiento matemático no puede considerarse aislado del medio cultural. Las matemáticas dan expresión a un mecanismo claro de control para el gobierno de la conducta ya que atienden a planes, fórmulas, reglas, estrategias, procedimientos e instrucciones; contribuyen a ajustar la conducta humana a pautas de racionalidad y a desarrollar un pensamiento objetivo. También presentan una dimensión social y pública, hunden sus raíces en las formas básicas de expresión humana (p. 8).

La dimensión cultural es, para nosotros, una referencia obligada en el estudio y determinación de las finalidades de la educación matemática. El carácter histórico y contingente del conocimiento matemático; su consideración como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales ligadas a un contexto social e histórico concretos y no como productos intangibles o verdades imperecederas, reafirman esta dimensión cultural que debe contemplarse cuidadosamente entre las finalidades de la educación matemática.

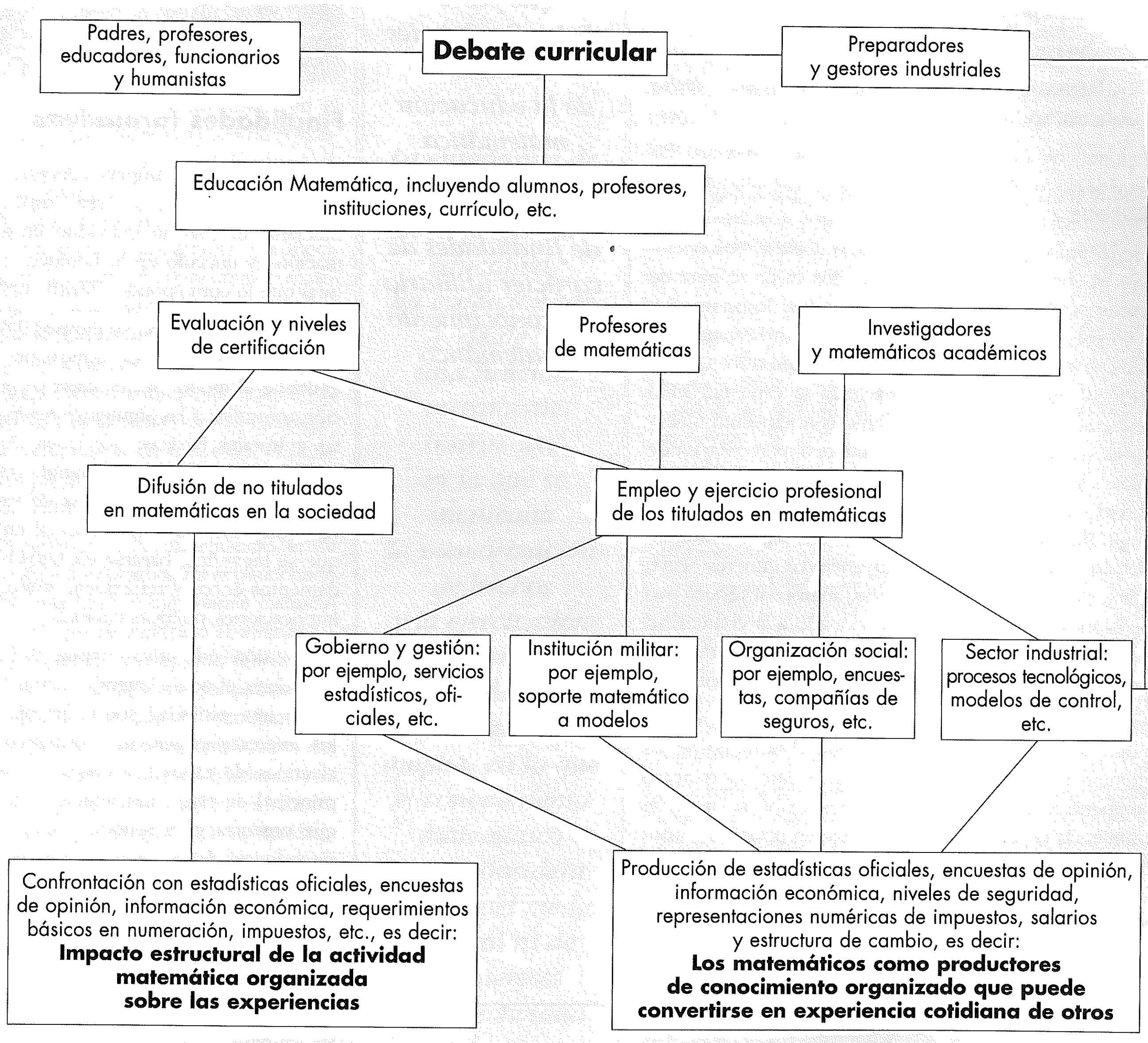
Dimensión social de la educación matemática

El conocimiento matemático se conforma socialmente, es público y tiene lugar mediante relaciones de comunicación entre las personas. La importancia social del conocimiento matemático no se reduce a la evidente utilidad y carácter práctico de las matemáticas, sino que puede argumentarse mediante razones más completas (Rico, 1995):

Las matemáticas permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar; dotan de objetividad a nuestra información y la constituyen en conocimiento fundado. [...] La sociología del conocimiento establece que, como en el resto de las disciplinas científicas, las representaciones matemáticas son construcciones sociales. La conjetura de la construcción social ubica el conocimiento, la cognición y las representaciones en los campos sociales de su producción, distribución y utilización. El conocimiento científico es constitutivamente social debido a que la cien-

cia está socialmente orientada y los objetivos de la ciencia están sostenidos socialmente (Restivo). El conocimiento matemático, como todas las formas de conocimiento, representa las experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares, culturas y periodos históricos. Teniendo en cuenta esta dimensión social, el sistema educativo –y, en particular, el sistema escolar– establece multitud de interacciones con la comunidad matemática, ya que se ocupa de que las nuevas generaciones sean iniciadas en los recursos matemáticos utilizados socialmente y en la red de significados (o visión del mundo) en que se encuentran enclavados; esto es, organiza un modo de práctica matemática. (p. 8-9).

Son estos argumentos los que determinan la dimensión social entre los fines de la educación matemática. Abraham y Bibby (1988) resumen las implicaciones sociales del currículo de matemáticas del siguiente modo:



El cuadro expresa diversas variantes de los dos tipos de finalidades sociales atribuidas al conocimiento matemático. Una primera finalidad consiste en proporcionar al ciudadano común las herramientas matemáticas básicas para su desempeño social; la segunda finalidad está en proporcionar cualificación profesional adecuada para atender a las necesidades del mercado de trabajo y a los retos organizativos y de gestión que tiene planteados la sociedad actual.

En muchas ocasiones vemos que parte de las finalidades sociales de la educación matemática suelen cubrirse con la etiqueta de *finalidades de carácter utilitario* del conocimiento matemático; es cierto que la visión estrictamente utilitaria queda bajo esta dimensión social, pero no la agota.

En Rico (1995: 40-44), hemos considerado tres ámbitos diferentes para la dimensión social. Estos tres ámbitos de reflexión son:

i) la práctica profesional,

ii) los contextos matemáticos, y

iii) los hábitos y prácticas usuales en el empleo de las matemáticas,

que ponen de manifiesto tres modos de considerar las matemáticas como herramienta intelectual determinada socialmente.

El primer ámbito queda caracterizado por diversas opciones en el cuadro anterior; en todos los casos se trata de prácticas profesionales distintas en las que los matemáticos, o especialistas cualificados que utilizan herramientas matemáticas, producen conocimiento organizado. En esta determinación social no está excluida la caracterización que se hace de la matemática como conocimiento objetivo, preciso, abstracto, riguroso y unívoco, pero se trata de la práctica social de las matemáticas para un colectivo concreto: el de los especialistas y académicos; consideramos que limitar esta actividad a sólo sus aspectos formales ha sido un punto de vista convencional muy restrictivo y limitado, que ha empobrecido su análisis al reducir sus dimensiones sociales y ha proporcionado a la comunidad científica y educativa una perspectiva deficiente y restrictiva sobre las finalidades de la educación matemática.

El segundo ámbito se refiere a todas aquellas situaciones del mundo laboral y social en las que el dominio de las herramientas matemáticas es necesario para su correcto desempeño y desarrollo; en algunos casos se trata de herramientas específicas, mientras que en otros son conocimientos más generales. En todos los casos hay que hacer un uso de conocimientos matemáticos de cierto nivel; la extensión de estos contextos en la sociedad suele coincidir con su grado de modernización. Se trata del campo que el informe Cockcroft denomina *necesidades matemáticas del mundo del trabajo.*

El tercer ámbito se refiere a las necesidades básicas de cada ciudadano, al conocimiento matemático imprescindible para desenvolverse en sociedad, para comunicarse y recibir información general, para interpretar estas informaciones y tomar decisiones correctas en base a su interpretación. El informe Cockcroft denomina este ámbito *necesidades matemáticas en la vida adulta,* a las que caracteriza del siguiente modo:

En muchas ocasiones vemos que parte de las finalidades sociales de la educación matemática suelen cubrirse con la etiqueta de finalidades de carácter utilitario del conocimiento matemático

Aunque somos conscientes de que algunas personas no las lograrán todas, incluiríamos entre las necesidades matemáticas de la vida adulta la capacidad de leer números y contar, decir la hora, pagar por la compra y dar el cambio, pesar y medir, comprender tablas horarias sencillas y realizar cualquier cálculo necesario relacionado con éstas. [...] Lo más importante de todo es la necesidad de tener la suficiente seguridad como para hacer un uso efectivo de cualquier destreza y conocimiento matemático que se posea, ya sea poco o mucho (pp. 13- 14).

Finalidades formativas

En su sentido más amplio, concebimos la educación como «ese proceso mediante el cual un individuo en formación es iniciado en la herencia cultural que le corresponde» (Mead, 1985).

Al estudiar las ideas de Stenhouse (1984), consideramos que por educación se entiende el modo en que cada generación transmite a las siguientes sus pautas culturales básicas; por tanto, cualquier plan educativo general debe hacer referencia a un sistema de valores, considerar la práctica social en la que se incardina, basarse en unos fundamentos éticos y reflexionar sobre las implicaciones políticas conexas.

Una visión educativa amplia lleva a considerar el conocimiento matemático como una actividad social, propia de los intereses cognitivos, normativos y afectivos de niños y jóvenes; el valor principal de este conocimiento está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas útiles; para el dominio de las matemáticas hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo.

El educador se ocupa de iniciar a niños y adolescentes en la cultura de la comunidad a la que pertenecen y de transmitirles sus valores sociales; de esta cultura también forma parte el conocimiento matemático, que debe transmitirse en toda su plenitud a cada generación. La responsabilidad del educador matemático es grande puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales. Mediante la educación se debe lograr que todos los ciudadanos desarrollen unas habilidades básicas y elaboren una adecuada comprensión para el uso de estas herramientas; esto lleva no solo una información e instrucción sino, lo que es más importante, un desarrollo de capacidades amplias por parte de los estudiantes.

Como tarea social, la educación debe ofrecer respuesta a la multiplicidad de opciones e intereses que, permanentemente, surgen y se entrecruzan en el mundo actual. Nuestra visión de la educación está basada en un planteamiento antropológico, que considera la cultura como el espacio natural del desarrollo humano y contempla el conocimiento, incluido el conocimiento matemático, como causa y efecto de una construcción social. Ahora bien, los sistemas educativos, como instituciones sociales, deben contemplar también la adecuada satisfacción de las necesidades individuales, en este caso, el desarrollo integral de los niños y jóvenes en edad escolar.

La enseñanza de las matemáticas, en su perspectiva educativa, ha evolucionado desde una función meramente instructiva, en la que se inculcaba la memorización de hechos y la ejercitación de destrezas, a una función formativa más amplia, en la que el conocimiento matemático no se considera aislado del medio cultural ni de los intereses y la afectividad del niño y del joven, ensanchándose el campo del aprendizaje hasta integrar el dominio de las estructuras conceptuales, ricas en relaciones, con procedimientos y estrategias que fomentan la creatividad, intuición y pensamiento divergente de los alumnos y marcan el cultivo de valores y actitudes.

Al considerar las matemáticas como elemento de la cultura de nuestra sociedad, debemos dejar de concebirlas como un objeto ya construido que hay que dominar, y tenemos que comenzar a considerarlas como una forma de pensamiento abierto, con margen para la creatividad, cuya ejercitación hay que desarrollar, respetando la autonomía y ritmo de cada persona.

La enseñanza de las matemáticas, en su perspectiva educativa, ha evolucionado desde una función meramente instructiva, en la que se inculcaba la memorización de hechos y la ejercitación de destrezas, a una función formativa más amplia, en la que el conocimiento matemático no se considera aislado del medio cultural ni de los intereses y la afectividad del niño y del joven...

Desde una perspectiva educativa se ha considerado, tradicionalmente, que determinadas formas de actividad matemática favorecen el desarrollo y la adquisición de capacidades, principalmente cognitivas, muy generales; de ahí el interés formativo de su enseñanza. La práctica totalidad de los currículos de matemáticas valoran esta enseñanza por el carácter formativo. Sin embargo, los valores formativos asociados a las matemáticas no se agotan en los aspectos cognitivos ya que, como actividad humana global, están conectadas con normas y valores y también están vinculadas con el campo afectivo (Rico, 1990). Entre los valores formativos de las matemáticas destacamos:

> *i) la capacidad para desarrollar el pensamiento del alumno, que permiten determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, y, en definitiva, potenciar el razonamiento y la capacidad de acción simbólica;*
>
> *ii) la utilidad para promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para obtener eficacia o belleza; las matemáticas han de promover el uso de esquemas, representaciones gráficas, y fomentar el diseño de formas artísticas y la apreciación y creación de belleza;*
>
> *iii) la adecuación para lograr que cada alumno participe en la construcción de su conocimiento; las matemáticas escolares han de ser asequibles, no pueden constituir un factor de discriminación;*
>
> *iv) la versatilidad para estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio de la crítica, la participación y colaboración, la discusión y defensa de las propias ideas, y para asumir la toma conjunta de decisiones;*
>
> *v) la potencialidad para desarrollar el trabajo científico y para la búsqueda, identificación y resolución de problemas;*
>
> *vi) la riqueza de situaciones para movilizar este tipo de conocimientos, de manera que se estimule la gratificación por los esfuerzos intelectuales y la satisfacción con el trabajo bien hecho* (pp. 122- 123).

Las finalidades formativas y educativas del pensamiento matemático, que deben venir implementadas por el sistema escolar, constituyen un entramado complejo y diversificado. Como hemos visto en el análisis de Romberg, no es suficiente con enunciar estas finalidades para que se desarrollen de manera coordinada y armoniosa; por el contrario, la experiencia hasta el momento señala que algunas de estas metas resultan contradictorias en la práctica. Uno de los mayores retos de las innovaciones curriculares consiste en hacer ofertas viables que satisfagan un amplio rango de metas formativas.

Dimensión política

La difusión de valores democráticos y de integración social, la realización y ejercicio de la crítica y el esfuerzo por la acción comunicativa son también elementos clave a tener en cuenta en la planificación y desarrollo de las matemáticas escolares.

El marco político establecido por la Constitución Española de 1978 y los valores educativos que en ella se propugnan establecen unas finalidades para todo el sistema educativo. Consecuencia de este marco han sido los desarrollos legislativos posteriores que establecen la extensión a toda la población de la enseñanza obligatoria hasta los 16 años, lo cual debe suponer un factor de homogeneización social y un aumento del nivel cultural.

Los problemas que se derivan del nuevo marco legal son considerables ya que las prioridades educativas deben dirigirse de manera especial a aquellos alumnos que no alcancen unas competencias determinadas. Esto no pone en tela de juicio la necesidad de contar con minorías altamente cualificadas en investigación punta, y que la orientación de esas minorías se comience a considerar desde el sistema escolar, pero esas minorías no pueden estar divorciadas del medio social que las sostiene y que les da su razón profunda de existencia; pues no pueden contraponerse ambas formaciones y, menos aún, orientar el sistema educativo para seleccionar a los integrantes de esas minorías con abandono de los intereses generales.

Esta dimensión política general afecta a la totalidad del sistema educativo y el currículo de matemáticas debe ajustarse en sus finalidades al nuevo marco. Pero hay otras consideraciones que conviene realizar desde esta dimensión. Para ello, siguiendo a Skovmose (1994), vamos realizar una consideración crítica del currículo de matemáticas, en la que juega un papel importante la utilización tecnológica del conocimiento matemático.

La visión crítica de la educación matemática destaca la importancia de considerar diferentes perspectivas sobre el conocimiento matemático. En primer lugar, el conocimiento matemático, abarca una serie de competencias formales. En segundo lugar, el conocimiento matemático es también conocimiento tecnológico, ya que se refiere a la capacidad para aplicar unos determinados conceptos y procedimientos a la resolución práctica de problemas y, de un modo más sistemático, a la consecución de metas tecnológicas; este tipo de conocimiento constituye la concreción más potente de las aplicaciones del conocimiento matemático al correspondiente campo de fenómenos y situaciones en las sociedades avanzadas. En tercer lugar, debe ser parte del conocimiento reflexivo, es decir, de aquel que tiene que ver con la evaluación y la discusión general de lo que se identifica como propósito tecnológico y con las consecuencias éticas y sociales de abordar dichos objetivos con los instrumentos elegidos.

Esta dimensión política general afecta a la totalidad del sistema educativo y el currículo de matemáticas debe ajustarse en sus finalidades al nuevo marco

El planteamiento crítico sostiene que el conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan a la colectividad y sirve como argumento de justificación; por lo tanto, debe ser analizado y evaluado no sólo en sus fundamentos sino también en sus aplicaciones.

En la dicotomía matemática pura/matemática aplicada, el proceso de modelización se concibe como la vía mediante la cual las matemáticas realizan su tarea organizadora y estructuradora. La modelización es una actuación técnica que incorpora sistemas como herramientas intelectuales en grandes parcelas de la realidad social. Para elaborar un modelo hay que identificar elementos de la realidad que puedan considerarse como importantes; también hay que decidir qué relaciones entre los elementos resultan esenciales. De este modo se construye un sistema que aún no es parte de la realidad. El sistema es inicialmente conceptual y está creado mediante ciertas interpretaciones de la realidad, es decir, por medio de cierto esquema teórico para observar la realidad, teniendo en cuenta ciertos intereses para constituir conocimiento. Es necesaria una cierta sistematización de la realidad para proceder a la modelización matemática. Los modelos matemáticos deben ser manejables simbólica y operativamente, para lo cual hay que establecer los métodos para realizar los cálculos necesarios.

El uso del modelo matemático, el lenguaje de los números, los símbolos y las operaciones, las figuras y las relaciones abstractas, hace invisible el proceso de construcción del sistema y, por esto mismo, se dificulta la identificación de la interpretación específica desarrollada, así como de las opciones morales y políticas adoptadas. El pensamiento reflexivo no pretende eliminar las interpretaciones y supuestos sino identificar la naturaleza de la comprensión que ha precedido a la modelización. El pensamiento reflexivo se propone hacer explícitas las condiciones previas al proceso de modelización que permanecen ocultas cuando el lenguaje numérico proporciona una cobertura de neutralidad. La reflexión debe encauzar el modo en que la modelización matemática afecta al contexto completo de la resolución de problemas vista como una empresa técnica y poner de manifiesto que también hay opciones y decisiones valorativas, de orden moral y ético, que están en el origen de la modelización. El conocimiento reflexivo tiene que identificar la potencialidad estructuradora del sistema de las matemáticas y, al hacer esto, tiene que proporcionar bases para la crítica y la corrección del marco en que se sustentan las decisiones política, asequibles a todos los ciudadanos.

Siguiendo a Popper, un falsador es una proposición cuya verdad contradice la verdad de una teoría en cuestión. Si encontramos que un determinado falsador es cierto, debemos refutar la teoría o, al menos, considerarla seriamente afectada. Si una teoría ha de tener algún interés, el conjunto de sus falsadores no puede ser vacío. Ha de ser posible falsar una teoría científica; debe estar abierta a la crítica. Reformulando estas ideas en términos educativos, consideramos que debe ser posible criticar las aplicaciones del sistema de las matemáticas desde un punto de vista social. Esto significa que los escolares deben recibir formación para articular una crítica a cualquier aplicación tecnológica surgida de los conocimientos matemáticos y de las actuaciones correspondientes para esta aplicación. Pero esta es una de las carencias esenciales de la mayor parte del trabajo con las matemáticas en el sistema escolar. Las aplicaciones tecnológicas son triviales y ficticias, el dominio fenomenológico es muy escaso y estereotipado. Los escolares reciben un conocimiento técnico cuya aplicación se les oculta y, lo que es más grave, se les hurta cualquier reflexión crítica y moral sobre la aplicación de tales conocimientos. Sin embargo, el resultado de un proceso de modelización tecnológica conduce básicamente a una acción que se basa en la toma racional de una serie de decisiones y termina afectando a la vida de las personas.

Al ciudadano común no le interesa tanto la perfección técnica cuanto la efectividad del sistema de las matemáticas para resolver problemas prácticos

El currículo de las matemáticas escolares de secundaria por su simplicidad técnica actual, su papel en la formación obligatoria y su amplio campo de aplicaciones reúne las condiciones adecuadas para estudiar los efectos que tienen los procesos de modelización sobre los principales aspectos de la resolución de un problema tecnológico; es decir, los efectos de la identificación y definición de los problemas, las razones para la elección de una determinada estrategia de resolución y su implementación tecnológica. Al ciudadano común no le interesa tanto la perfección técnica cuanto la efectividad del sistema de las matemáticas para resolver problemas prácticos. El planteamiento crítico, al abordar el campo de aplicaciones, permite una evaluación no sólo de las consecuencias técnicas de las decisiones aportadas sino, lo que es más importante, una evaluación ética que tenga en cuenta cómo afecta al contexto cada una de las posibles soluciones alternativas y cómo paliar los efectos negativos que se derivan. Sólo un planteamiento reflexivo sistemático del conocimiento matemático ofrece la oportunidad real de abordar las cuestiones de dominio de la estructura conceptual del sistema, sus aplicaciones tecnológicas y el análisis de las normas y valores implicados.

Una escuela orientada hacia la consecución de valores democráticos junto con los formativos individuales debe enfatizar el conocimiento reflexivo de todo el sistema de las matemáticas y, esta orientación crítica debe estar presente en las finalidades generales del currículo de las matemáticas escolares.

Una escuela orientada hacia la consecución de valores democráticos junto con los formativos individuales debe enfatizar el conocimiento reflexivo de todo el sistema de las matemáticas...

En definitiva, la asunción explícita de valores éticos y democráticos entre las finalidades de la educación matemática se articulan en un eje o dimensión política, en su sentido más noble.

Conclusión

Nuestro sistema legal reconoce unas finalidades educativas básicas, que se enumeran en la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo en forma de derechos para todos los ciudadanos en esta etapa de formación:

1. *El pleno desarrollo de la personalidad del alumno.*
2. *La formación en el respeto de los derechos y libertades fundamentales y en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad dentro de los principios democráticos de convivencia.*
3. *La adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, así como de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y estéticos.*

4. *La capacitación para el ejercicio de actividades profesionales.*
5. *La formación en el respeto de la pluralidad lingüística y cultural de España.*
6. *La preparación para participar activamente en la vida social y cultural.*
7. *La formación para la paz, la cooperación y la solidaridad entre los pueblos.*

Las matemáticas no son ajenas a ninguna de estas finalidades y en el diseño y desarrollo del currículo de matemáticas para secundaria deben tenerse en cuenta todas ellas; además, las finalidades generales del sistema educativo deben concretarse en finalidades más específicas, propias de la educación matemática.

Como hemos visto, la lista de finalidades que podemos considerar para la educación matemática puede ser extensa y diversificada. Hemos ubicado estas finalidades en un sistema de cuatro dimensiones que considera el conocimiento matemático como parte integrante de la cultura, socialmente construido y determinado, en el que intervienen las diversas necesidades formativas de las matemáticas y se consideran las connotaciones morales y políticas, generales y específicas, conectadas con la formación matemática de los escolares. Pero sobre estas cuatro dimensiones es posible enunciar programas de innovación curricular con metas muy distintas.

De los documentos revisados obtenemos algunas conclusiones importantes:

Los enunciados de las metas o finalidades no deben constituir una lista muy extensa ni exhaustiva; lograr un equilibrio entre la concisión y la complejidad de la situación que se describe no es fácil pero debe intentarse.

Hay que evitar los enunciados retóricos o pretenciosos; las metas deben ir acompañadas de criterios de validación, complementados por sus propios mecanismos de verificación y control.

Deben contemplarse las incompatibilidades o desencuentros entre algunas metas que, de hecho, suponen alternativas distintas para el desarrollo curricular.

Aunque la rentabilidad y eficacia del currículo es siempre deseable, no hay que confundirlo y limitarlo con los logros y rendimientos sobre destrezas de bajo nivel.

Si bien las consideraciones utilitarias y formativas admiten una mejor concreción y son mas fácilmente evaluables, no conviene abandonar la perspectiva global de las cuatro dimensiones. No hay formación ni utilidad ajenas a las dimensiones política, social, educativa y cultural.

En cualquier caso, y sean cuales sean la prioridades reales que se establezcan, las finalidades del currículo de matemáticas orientan decisivamente el plan de formación del que son parte; cuando no se trata de enunciados retóricos, podemos afirmar que determinan el currículo esencialmente. Por ello conviene establecer cuidadosamente las finalidades, tomando medidas que garanticen su viabilidad y efectividad, evaluando las necesidades derivadas y los recursos necesarios para la consecución de cada una de ellas, analizando y tomando medidas para neutralizar posibles interferencias. Aunque al enunciar las finalidades de un currículo siempre hay un componente utópico inevitable, conviene establecerlas después de una reflexión amplia y detallada y marcando los mecanismos de control pertinente que garanticen su justa realización y que eviten los efectos perversos de la retórica, la demagogia social y el autoengaño.

Aunque al enunciar las finalidades de un currículo siempre hay un componente utópico inevitable, conviene establecerlas después de una reflexión amplia y detallada y marcando los mecanismos de control pertinente que garanticen su justa realización y que eviten los efectos perversos de la retórica, la demagogia social y el autoengaño.

Referencias bibliográficas

ABRAHAM, J. y N. BIBBY (1988): «Mathematics and Society: ethnomathematics and public education curriculum», *For the Learning of Mathematics,* Vol. 8, n.° 2, 2- 11.

BEGLE, E. (1979): *Critical variables in Mathematics Education,* Mathematical Association of America, NCTM, Washington DC.

BIDWELL, J. y CLASON, R. (edts.) (1970): *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education. Readings in the History of Mathematics Education,* NCTM, Reston VA.

BURTON, L. (1989): «Las matemáticas como experiencia cultural, ¿de quién?», en *Mathematics, Education and Society,* Document Series n.° 35, Unesco, París.

CHRISTIANSEN, B., G. HOWSON y M. OTTE (1985): *Perspectives on Mathematics Education,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

COCKCROFT, W. (edt.) (1982): *Mathematics Counts,* Her Majesty's Stationery Office, Londres. Hay versión castellana (1985): *Las matemáticas sí cuentan,* Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

D'AMBROSIO, U. (1979): «Metas y objetivos generales de la Educación Matemática», en H. STEINER y B. CHRISTIANSEN (edts.): *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática,* Vol. IV, Unesco, París.

DAMEROW, P. y I. Westbury (1985): «Mathematics for all: Problems and implications», *Journal of Curriculum Studies,* Vol. 17(2), 175-186.

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE (1985): *Mathematics from 5 to 16*, Her Majesty's Stationery Office, Londres.

HOWSON, G. (1979): «Análisis Crítico del Desarrollo Curricular en Educación Matemática», en H. STEINER, y B. CHRISTIANSEN (edts.): *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática,* Vol. IV, Unesco, París.

HOWSON, G. (1983): *A review of research in Mathematical Education, Part C. Curriculum Development and Curriculum Research*, NFER-NELSON, Windsor.

HOWSON, G., C. KEITEL y J. KILPATRICK (1981): *Curriculum Development in Mathematics,* Cambridge University Press, Cambridge.

HOWSON, G. y J. P. KAHANE (1986): *School Mathematics in the 1990s.* ICMI Study Series,Cambridge University Press, Cambridge. Hay versión castellana (1987): *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90,* Mestral, Valencia.

JURDAK, M. (1989): «La religión y el lenguaje, medios de transmisión cultural y obstáculos en la enseñazan de las matemáticas», en *Mathematics, Education and Society,* Document Series n.° 35, Unesco, París.

KEITEL, C. (1987): «What are the goals of mathematics for all?», *Journal of Curriculum Studies in Mathematics,* Vol. 19 (3), 393-407.

Luis Rico
Departamento de Didáctica
de la Matemática
Universidad de Granada

KILPATRICK, J. (1992): «The History of Research on Mathematics Education» en GROUWS (edt.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig,* Macmillan, New York. Hay versión castellana en J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA, (1994): *Educación Matemática e Investigación,* Síntesis, Madrid.

KRULIK, S. (1975): *Teaching Secondary School Mathematics,* W. B. Saunders Company, Filadelfia.

MEAD, M. (1985): *Educación y Cultura en Nueva Guinea,* Paidós, Barcelona.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria,* MEC, Madrid.

NISS, M. (1995): «Why do we teach Mathematics in school?», en L. PUIG, y J. CALDERÓN (edts.): *Seminario de Investigación y Didáctica de la Matemática,* CIDE, Madrid.

RESTIVO, S. (1992): *Mathematics in Society and History,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

RICO, L. (1990): «Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectica cultural», en S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (edts.): *Teoría y práctica en Educación Matemática,* Alfar, Sevilla.

RICO, L. (1995): *Conocimiento Numérico y Formación de Profesorado,* Universidad de Granada, Granada.

ROMBERG, T. (1991): «Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas», *Revista de Educación,* n.° 294, 323-406.

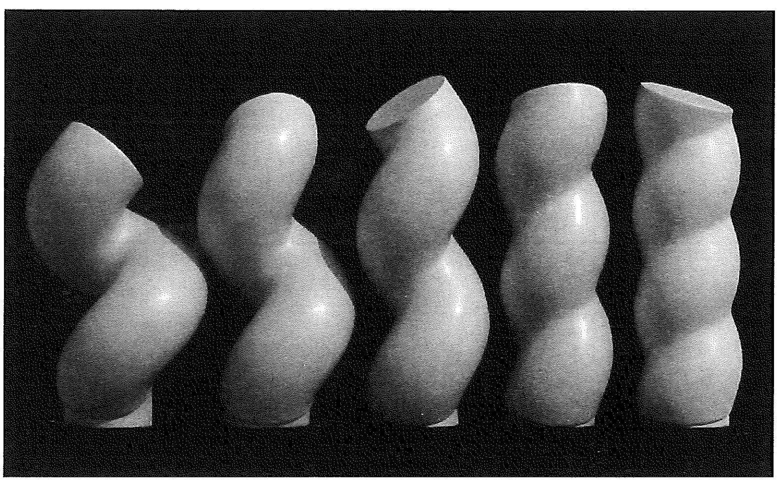
ROMBERG, T (1992): «Perspectives on Scholarship and Research Methods», en GROUWS (edt.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig,* Macmillan, New York.

SKOVSMOSE, O. (1994): *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

STEINER, H. y B. CHRISTIANSEN (1979): *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática,* Vol. IV, Unesco, París.

STEINER, H. (edt.) (1980): *Comparative Studies of Mathematics Currícula. Change and Stability 1960-1980,* Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld.

STENHOUSE, L. (1984): *Investigación y Desarrollo del Currículo,* Morata, Madrid.



Columnas salomónicas
Javier Carvajal

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Antoni Vila
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Nieves Zuasti
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidenta: Rosa Pérez García
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: J. Antonio Rupérez Padrón
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALÈNCIA

SUMA 24

febrero 1997, pp. 21-25

La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo

Luis Carlos Contreras González
José Carrillo Yáñez

ARTÍCULOS

Tras una introducción, en la que los autores expresan su manera de entender la resolución de problemas, este artículo trata de poner de relieve el importante papel que ésta desempeña como dinamizadora de un aprendizaje constructivista. En concreto, se utiliza un ejemplo para explicitar una forma de construir conocimiento significativo relativo a Números, a las propias estrategias de resolución e incluso a actitudes deseables para cualquier persona.
En definitiva, este trabajo intenta acercar al profesor de secundaria reflexiones extraídas en un proceso de investigación, alentando de esta forma la útil, a la vez que necesaria, colaboración entre docentes e investigadores.

HAN pasado ciertamente los años iniciales, dedicados a mostrar las bondades de la puesta en práctica de una metodología en la que la resolución de problemas ocupara un papel relevante; han pasado aquellos momentos en los que había que argumentar también que la dedicación a resolver problemas era una tarea obligada por el crecimiento del propio conocimiento matemático, de tal manera que cada vez tiene más sentido focalizar nuestra atención en los procedimientos matemáticos y en los procesos de pensamiento para capacitar al estudiante de cara a afrontar multitud de situaciones nuevas que se le presentarán a lo largo de su vida escolar y, lo que es más importante, a lo largo de su vida como ciudadano de un mundo en continuo cambio.

Es notorio que hay un sentir común, tanto entre los investigadores como entre los docentes, que otorga protagonismo a la resolución de problemas, lo que no conduce necesariamente a su puesta en práctica (en el caso de los docentes) de forma generalizada, debido a obstáculos que trascienden el puro ámbito de la capacitación profesional y entran de lleno en el de la actitud del profesor y en el de sus creencias o concepciones.

Durante estos últimos años también se ha desarrollado una cantidad ingente de estudios (teóricos, de síntesis y empíricos, tanto de corte cualitativo como cuantitativo) sobre las concepciones de los profesores hacia la matemática y su enseñanza (Thompson, 1992). Estos estudios han servido, entre otros fines, para diseñar instrumentos de catalogación de concepciones cada vez más finos y precisos en análisis cualitativos (Carrillo y Contreras, 1994 y 1995) y, de otro lado, para indagar sobre posibles relaciones entre las concepciones sobre la matemática y las concepciones sobre su enseñanza, particularizando en ocasiones en algún tópico matemático (McGalliard, 1983;

Thompson, 1984; Kesler, 1985; Lerman, 1990; Ruthven y Coe, 1994;...). La heterogeneidad de los resultados pone en entredicho suposiciones simplistas en las que a una concepción determinada de la matemática se le asocia una determinada concepción de la enseñanza de la matemática. Es obvio que este tipo de relaciones no se da, aunque, por otro lado, tampoco es cierto que suelan encontrarse relaciones entre polos opuestos.[1] Es decir, en lo relativo a las relaciones entre la concepción de la matemática y la de su enseñanza impera una *anarquía controlada.*

Asimismo, de entre todas las tendencias o formas de entender la enseñanza de la matemática, para muchos investigadores (entre los que se hallan los presentes) hay una (la *investigativa* –Porlán, 1989, 1992–) que puede ser considerada como la más idónea para propiciar un aprendizaje constructivista. Análogamente, entre los modelos de concepción de la matemática, estimamos, coincidiendo con gran parte de los investigadores actuales, que la concepción *dinámica o de resolución de problemas* (Ernest, 1989 y 1991) es la que se corresponde mejor con el proceso de creación del conocimiento matemático, no sólo a lo largo de la historia sino incluso a nivel educativo.

Sin embargo, no es la concepción dinámica la única posible dentro de los modelos de concepción de la matemática, al igual que la tendencia investigativa no es la única forma de entender y llevar a la práctica la enseñanza. De hecho, cada individuo posee su propia concepción de la matemática y su enseñanza, que se asemeja en mayor o menor grado a una o varias de las tendencias o concepciones que nos sirven de patrón. Pues bien, de la misma forma la concepción de la resolución de problemas difiere según el individuo. Por una parte, no hay unicidad en cuanto a lo que los docentes entienden por resolución de problemas y, por otra parte, aún más relevante, existen obvias y naturales discrepancias en lo que se refiere a cómo concibe y pone en práctica cada uno la resolución de problemas en el aula.

La resolución de problemas posee varias caras o facetas que, en ocasiones, son vistas como posicionamientos o interpretaciones diferentes, cuando, en realidad, la verdadera potencia reside en su complementariedad. De esta forma, Branca (1980) nos habla de la resolución de problemas como una meta u objetivo («si no la meta del aprendizaje matemático», p. 3), un proceso (de aplicación de los conocimientos previamente adquiridos a situaciones no familiares) o como una destreza básica. En efecto, pensamos que la resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en sí misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación cotidiana; pero esta declaración no ha de interpretarse como un posicionamiento radical que descarta las otras *caras.* Antes al contrario, esta declaración encierra un deseo de integrar las otras dos *caras*, de tal forma que, al

...la resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en sí misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación cotidiana...

mismo tiempo, pensamos que la resolución de problemas es un vehículo metodológico ideal para poner en funcionamiento y aplicar significativamente los conocimientos previamente adquiridos. Asimismo, la consideración de la resolución de problemas como destreza básica debe conducir a reformas curriculares que pueden incluso implicar la sustitución de *arcaicas destrezas mecánicas* por la resolución de problemas como destreza procedimental.

En ocasiones, quien entiende la resolución de problemas como destreza básica, entiende que los estudiantes, en general, deben adquirir destreza en el enfrentamiento de problemas rutinarios (ejercicios), dejando el abordaje de verdaderos problemas a los más avanzados. Por el contrario, la resolución de problemas, como tarea compleja que es, ofrece una posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula, es un marco ideal para la construcción de aprendizaje significativo (parafraseando a Claxton –1984–, diremos que éste es el único tipo de aprendizaje que propicia el progreso del hombre) y fomenta el gusto por la matemática (incardinada en la realidad) y el desarrollo de una actitud abierta y crítica, objetivos de gran valor educativo. La resolución de problemas no es un añadido de la clase de matemáticas, ni algo exclusivo de los días anteriores a las vacaciones, es el impulso, el motor de la clase, lo que pone al estudiante ante el reto de *hacer matemáticas.* Para el constructivista, como dice Confrey (1991), un problema es sólo un problema en la medida en que es sentido problemático por el resolutor, y añade:

> *El conocimiento no es la acumulación de información; es la construcción de estructuras cognitivas capacitadoras, generadoras y que verifiquen el éxito en la resolución de problemas. Así, la resolución de problemas se convierte en un acto intelectual esencial –no un enriquecimiento, un pasatiempos ocasional* (p. 118).

Ahora bien, resulta evidente que esta forma de entender la resolución de problemas, inmersa en una teoría constructivista del aprendizaje, no es comparti-

1. Una descripción exhaustiva de las tendencias en la concepción de la enseñanza de la matemática y de los modelos de concepción de la matemática puede encontrarse en Carrillo y Contreras (1995). Por su parte, en Carrillo y Contreras (1994) se puede ver una caracterización de dichas tendencias y modelos a partir de categorías e indicadores.

da, al menos en la práctica, por la mayoría de los docentes, en algunos casos (los menos) por discrepancias teóricas, pero generalmente porque el docente no conoce caminos de aplicación o no se ve capacitado para llevar a la práctica tal propuesta. En resumen, el docente no sabe, en muchos casos, extraer de un problema el partido suficiente para compensar la inversión de tiempo que supone la dedicación a resolverlo en clase. Por ello, el propósito de este artículo es poner de manifiesto la riqueza que entraña la resolución de problemas, a partir de los comentarios sobre la resolución del siguiente problema, el cual podría ser planteado a partir de los 14-15 años.

...el docente no sabe, en muchos casos, extraer de un problema el partido suficiente para compensar la inversión de tiempo que supone la dedicación a resolverlo en clase.

En un combate han participado 11.000 soldados. De los supervivientes se sabe que el 56'**56**% no fuma y que el 56'7**567**% no bebe. ¿Cuántos murieron?

[Se expresa en negrita el periodo].

En primer lugar podría asaltarnos el impulso de decir que el contexto no es el deseable, que, como todo, lleva su currículo oculto, y que podría plantearse una situación análoga (en cuanto a la estructura matemática intrínseca) recurriendo a contextos más formativos. Ahora bien, también podríamos argumentar que situaciones como ésta pueden servir de base de discusiones sobre los valores sociales. En cualquier caso, este enunciado cayó en nuestras manos procedente de un curso de geodestas militares, lo que explica claramente el contexto.

[Sería conveniente que el lector abordara el problema antes de continuar la lectura para poder sacar más partido de las siguientes reflexiones.]

Este enunciado da pie a poner en juego dos heurísticos importantes en la resolución de problemas, pertenecientes a la fase de comprensión y planificación, respectivamente. El primero de ellos se pregunta sobre los posibles datos implícitos que pueda haber en el enunciado, que en este caso se traduce en que el resultado ha de ser un número natural. La aparición de este heurístico puede estar motivada por el útil hábito de indagar en busca de posibles datos (semi-)ocultos o bien por la voluntad de resolver la situación planteada. En efecto, inicialmente es natural pensar que se trata de un problema de lógica o de pega y abandonar cuando no se encuentra nada lógico que conduzca a una solución rápida o tras fallidos intentos de representar los datos mediante diagramas de Venn-Euler. Pero, si decidimos hacerle frente, nos veremos obligados a escudriñar en busca de datos que, aun siendo obvios, pueden desempeñar un papel crucial en el proceso de resolución (precisamente por su obviedad a veces no son considerados). El otro heurístico se pregunta sobre las posibilidades existentes de simplificar la situación o hacerla más manejable, que en este caso nos lleva a expresar los porcentajes como fracciones y a ponernos ejemplos de más fácil manejo que conduzcan a una correcta planificación, sin la maraña (inicialmente) provocada por unos números con los que se hace difícil operar. (El trabajo con 100 o 1000 soldados y un 50 y un 60%, por ejemplo, da luz para decidir la estrategia a emplear.)

A tal respecto hay que comentar que algunos resolutores simplifican burdamente el enunciado, de forma que sustituyen los datos por otros *parecidos* sin intención de abordar finalmente la situación planteada. Unos escogen 56'56%, mientras que otros se quedan simplemente con 56%, poniendo de relieve el obstáculo que supone trabajar con números con infinitas cifras decimales, aunque sean periódicos. No obstante, tal situación se puede aprovechar para dejar que se aborde el problema con ese dato, con idea de proponer posteriormente otras modificaciones, ahora con la solución fijada, lo que provoca una comprensión profunda del papel que desempeña cada dato del enunciado. Finalmente, puede analizarse las condiciones que han de cumplir los datos para que se garantice, de manera general, la existencia de, al menos, una solución[2], lo que nos lleva ineludiblemente a abordar la estructura matemática del problema.

Por otra parte, puede aprovecharse un poco más el hecho de que la solución haya de ser natural para comentar que, aunque esto sea una restricción, es lo que le da sentido al problema, pues, si no, cualquier número valdría. Asimismo, la situación plantea un ejemplo de utilidad y relevancia de la relación existente entre fracciones, decimales y porcentajes. De hecho, el problema nos puede servir de ejemplo para ilustrar un proceso de construcción de conocimiento matemático.

Este problema, cuya solución pasa por un procedimiento de paso de decimal periódico puro o mixto a fracción, puede erguirse en potenciador de ese proceso. En efecto, tras haber decidido que los datos expresados como fracciones pueden ser más útiles, el resolutor puede encontrarse ante la dificultad de «no recordar» un procedimien-

2. La situación general puede formularse así: Una determinada proporción de supervivientes no fuman y otra no beben. ¿Cuántos murieron?

Llamemos: x a la cantidad de supervivientes, y a la cantidad de soldados participantes en la batalla ($x \leq y$), a/b a la fracción irreducible que expresa la proporción (parte de la unidad; $a \leq b$) de supervivientes que no fuman, c/d a la fracción irreducible que expresa la proporción (parte de la unidad; $c \leq d$) de supervivientes que no beben.

Es claro que la condición general es que mcm $(b,d) \mid x$.

Tomando $y=11000$, es fácil dar ejemplos imposibles para la situación planteada:

Basta elegir mcm$(b,d)>11000$; por ejemplo, 12000. Como $12000=2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$, podemos seleccionar $b=2^5 \cdot 3$ $(=96)$ y $d=5^3$ $(=125)$.

Así, si, por ejemplo, tomamos $a/b = 53/96$ y $c/d = 72/125$, no es posible encontrar más solución que la trivial (n.° de supervivientes = 0). En realidad, en concordancia con el enunciado inicial, los datos serían 55'20834375% y 57'6%.

to que años atrás fue simplemente memorizado. Se nos brinda una oportunidad de hacer un paréntesis y dotar de significado a una regla de conversión que, por desuso, ha caído en el olvido.

El proceso reconstructivo puede comenzar con la pregunta, ¿qué otra expresión racional existe para 0,999...?

Esta cuestión tiene una doble finalidad: de un lado, nos situamos ante un decimal periódico que no es identificado inicialmente con 1, su valor, hecho que evocará el proceso por su carácter conflictivo; de otro, nos sirve como primer ejemplo de transformación de decimal periódico puro a fracción.

Normalmente, tras el desconcierto ante la pregunta inicial, puede sugerirse averiguar la fracción equivalente a 0,111...,y después la de 0,333... y, mediante las relaciones entre ellas, conjeturar la de 0,999.... Después vendría el proceso algebraico conocido: x=0,999...; 10x=9,999...

El propio enunciado del problema invita a seguir en este paréntesis abierto para obtener la fracción generatriz de decimales periódicos mixtos (pues, de manera astuta, se ha escrito 56,7**567**, que podría expresarse en realidad como 56,**756**).

Una vez obtenidas las correspondientes fracciones, su lectura o interpretación como *partes del todo* (uno de los significados de las fracciones) y no como un simple número, dará significado al porcentaje correspondiente, con lo que hará más comprensible la situación planteada. Este es, de hecho, el segundo gran escollo del problema; un tanto por ciento no suele ser fácilmente identificable por el resolutor con una fracción y, sin embargo, de expresar que el 5600/99% de los supervivientes no fuman a decir que (5600xN)/(99x100)=M, donde N representa el número de supervivientes y M al total de no fumadores, hay un razonamiento proporcional y una transformación algebraica claves para el problema; la expresión simplificada 56N/99=M nos indica que N es 99 múltiplo.

Simultáneamente, y con la otra expresión, se hace necesario que numerador y denominador no tengan divisores comunes, o sea, que el mcd de ambos sea 1, o, en otras palabras, que la fracción sea irreducible, algo que en la mayoría de las ocasiones sólo parece ser un capricho del profesor. En este caso, si dejáramos la fracción 567/999, no podríamos afirmar que habría de haber grupos enteros de 999 para que la solución fuera natural, pues a un grupo de 37, por ejemplo, le corresponderían 21 no bebedores.

Finalmente, queda salvar un último obstáculo, que es de carácter puramente conceptual; se trata del hecho de reconocer que todo múltiplo de dos números lo es de su mínimo común múltiplo.

Este problema, además, trata de combatir la idea de que los problemas matemáticos sólo pueden tener una solución correcta y da lugar a la consideración de casos límite. Nos referimos al hecho de considerar 0 como mcm (momento para insistir en que 0 es múltiplo de todos los números, mientras que 1 es divisor de todos), lo que aporta una solución matemática del problema, aunque no demasiado lógica por el contexto. El hecho de que existan varias soluciones (no tan frecuente, por otra parte, como el hecho de existir varios caminos para la resolución), lejos de ser una mera anécdota, adquiere gran importancia cuando nuestra preocupación no se ciñe al ámbito conceptual: es coherente que, si pretendemos fomentar una actitud abierta en nuestros alumnos, demos lugar a situaciones, como este problema, en las que no exista una única verdad.

En definitiva, con este análisis hemos pretendido evidenciar la bondad de la resolución de problemas para propiciar conocimiento significativo en Matemáticas, refiriéndonos tanto al conocimiento específico como al conocimiento sobre resolución de problemas en general.

En definitiva, con este análisis hemos pretendido evidenciar la bondad de la resolución de problemas para propiciar conocimiento significativo en Matemáticas (a través de situaciones en las que se desarrolla el empleo de estrategias), refiriéndonos tanto al conocimiento específico como al conocimiento sobre resolución de problemas en general. Del mismo modo, se ha pretendido poner de manifiesto la posibilidad de abordar conocimiento de tipo actitudinal, como acabamos de referir.

Referencias

CARRILLO, J. y L. C. CONTRERAS (1994): «The relationship between the teachers' conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis», *Proceedings of the 18th PME Conference.* Lisboa (Portugal, 29 de julio al 3 de agosto), Vol. II, 152-159.

CARRILLO, J. y L. C. CONTRERAS (1995): *Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza,* Educación Matemática (en prensa).

BRANCA, N. A. (1980): «Problem Solving as a Goal, Process and Basic Skill», en S. KRULIK y R. E. REYS (Eds.): *Problem Solving in School Mathematics,* NCTM, Reston, Virginia.

CLAXTON, G. (1984): *Live and Learn. An Introduction to the Psychology of Growth and Change in Everyday Life*, Harper and Row Publishers, London.

CONFREY, J. (1991): «Learning to listen: a student's understanding of powers of ten», en Ernst von GLASERSFELD (Ed.): *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nederland.

ERNEST, P. (1989): «Beliefs Influence in Mathematics Teaching», *Mathematics Education and Society*, Document Series 35, Unesco, 99-101.

ERNEST, P. (1991): *The philosophy of mathematics education*, Falmer Press, London.

KESLER, R. Jr. (1985): *Teachers' instructional behavior related to their conceptions of teaching and mathematics and their level of dogmatism: Four case studies*, Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens.

LERMAN, S. (1990): «Alternative Perspectives of the Nature of Mathematics and their Influence on the Teaching of Mathematics», *British Educational Research Journal*, 16(1), 53-61.

McGALLIARD, W. A. Jr. (1983): *Selected factors in the conceptual systems of geometry teachers: Four case studies* (Doctoral dissertation, University of Georgia, 1982), Dissertation Abstracts International, 44, 1364A.

PORLÁN, R. (1989): *Teoría del Conocimiento, Teoría de la Enseñanza y Desarrollo Profesional*, Tesis doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Sevilla.

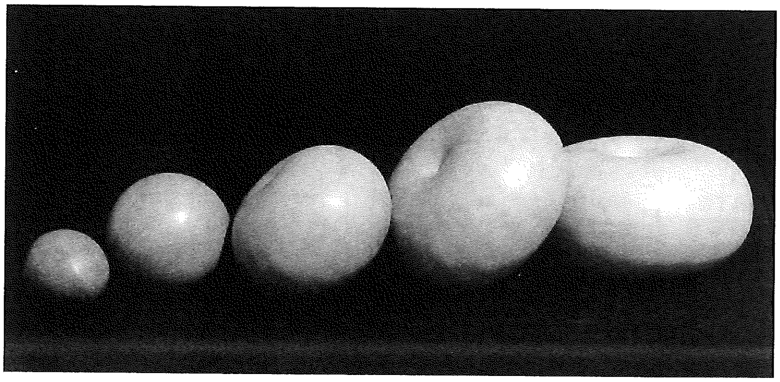
PORLÁN, R. (1992): «Teoría y práctica del currículum. El currículum en la acción», en AA.VV. *Curso de actualización científico-didáctica*, MEC, Madrid.

RUTHVEN, K. y R. COE (1994): «A Structural Analysis of Students' Epistemic Views», *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 101-109.

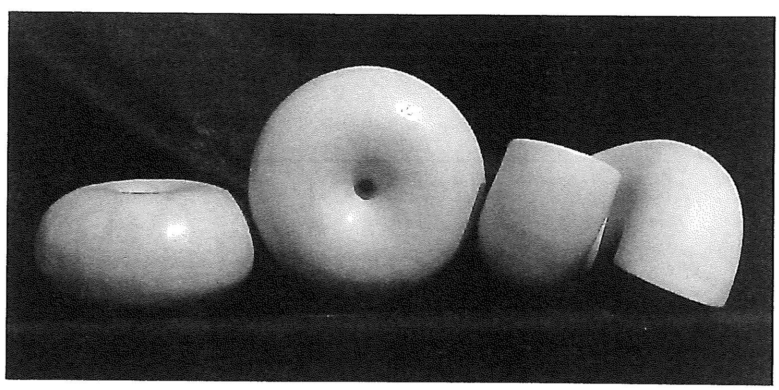
THOMPSON, A. G. (1984): «The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice», *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

THOMPSON, A. G. (1992): «Teacher's Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research», en D. A. GROUWS, (Ed.): *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*, McMillan, New York.

Luis Carlos Contreras
José Carrillo
Departamento
de Didáctica de las Ciencias
Universidad de Huelva.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
Thales



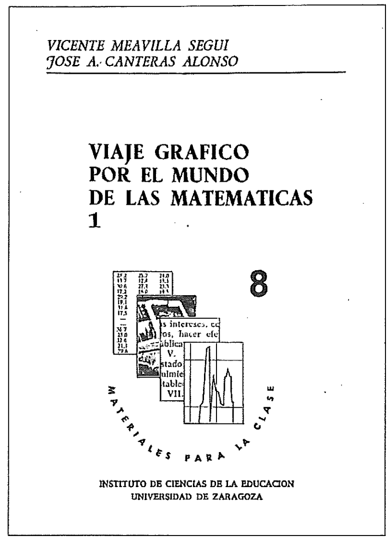
El ovoide, la esfera y las calabazas
Javier Carvajal



El toro
Javier Carvajal

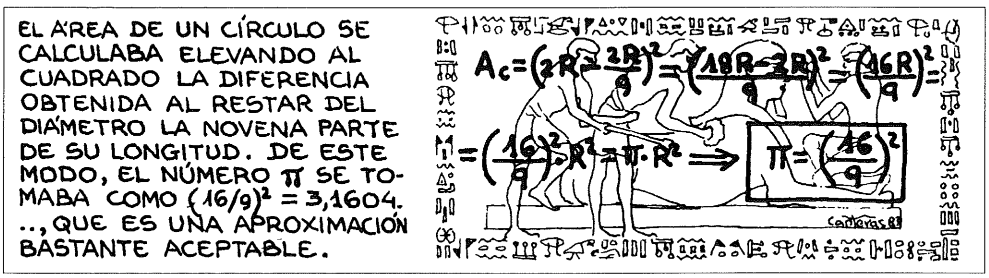
INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA



VIAJE GRÁFICO POR EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS

Vicente Meavilla Seguí
José A. Canteras Alonso



BOLETÍN DE PEDIDO

Deseo me envíen contra reembolso, más gastos de envío, los libros marcados con X:

☐ Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas 1 (750 ptas)

☐ Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas 2 (750 ptas)

Nombre: . . . .

Dirección: . . . .

Población: . . . . C.P.: . . . . Provincia: . . . .

CIF o NIF (a efectos de emitir la obligatoria factura): . . . .

Remitir a:
Instituto de Ciencias de la Educación. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761991. Fax: (976) 761345

SUMA 24
febrero 1997, pp. 27-38

Julio Rey Pastor y la enseñanza de las matemáticas

Luis Español González

ARTÍCULOS

Después de una breve nota biográfica, el artículo se fija en la «pasión por la ciencia», uno de los rasgos dominantes del carácter de Rey Pastor, y en el reflejo que este temperamento, tan manifiesto en la actividad investigadora, tuvo también en la obra educativa que dejó plasmada en múltiples libros de texto de todos los niveles. Se describen algunas de estas obras –aparecidas entre 1915 y 1935– agrupadas en tres apartados: dos de ellos recogen los textos para el primer curso universitario, tanto los dirigidos a la formación de matemáticos cuanto los que adaptan la matemática a las necesidades utilitarias de los ingenieros y de los físicos y químicos; el tercero se ocupa de los textos de matemáticas para bachillerato y niveles afines.

Agradecimiento

Este artículo ha sido elaborado con motivo de la participación del autor en una Sesión Especial del ICME-8 (8.° Congreso Internacional de Educación Matemática) celebrado en Sevilla del 14 al 21 de julio de 1996. Bajo el título «Matemáticos españoles en el siglo XX», cuatro ponentes glosaron respectivamente las figuras de García de Galdeano, Rey Pastor, Puig Adam y Santaló. Dada la brevedad de las intervenciones, la exposición oral consistió en un recorrido muy rápido sobre unas notas que han sido el germen de este texto. El autor agradece a los responsables de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas haber sido invitado a hablar sobre Rey Pastor en una ocasión tan extraordinaria, y les ofrece este trabajo como correspondencia a su amabilidad.

Nota biográfica[1]

Rey Pastor nació riojano (Logroño, 1888) y acabó siendo un hombre oceánico, español en Argentina y argentino en España, cruzando una y otra vez el Atlántico. Su asentamiento argentino no fue, como a veces se dice, un exilio político, sino una opción personal tomada libremente en 1921. Murió en la orilla americana (Buenos Aires, 1962) dejando en ambas la huella profunda de su personalidad aguda y polifacética. Fue el matemático más influyente de la primera mitad del siglo XX entre los que se expresaron en lengua española.

Terminado el bachilerato logroñés, dedicó el curso 1903-04 a preparar en Zaragoza su fallido ingreso en la Academia Militar, y en 1904 se matriculó en la Facultad de Ciencias aragonesa, donde fue el único licenciado en ciencias

1 Este apartado es, aproximadamente, un resumen de la introducción que el autor realizó para Rey Pastor (1993), que es una variada colección de discursos, artículos en prensa y revistas, prólogos, etc., seleccionados entre los escritos por Rey Pastor en el periodo que va de 1915 a 1956.

exactas del año 1908, y lo fue con premio extraordinario. Allí conoció la modernidad matemática de la mano del catedrático Zoel García de Galdeano, figura principal de la matemática española del cambio de siglo; su magisterio, su obra y su biblioteca, sus contactos internacionales, fueron el mejor taller para el aprendizaje matemático del brillante discípulo. Gracias a Galdeano y a su colega J. Ríus, Zaragoza era pionera en la publicación de revistas matemáticas; en dos de ellas, la *Revista Trimestral de Matemáticas* y los *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza*, Rey resolvió problemas propuestos, destacando por su agudeza y capacidad de síntesis, llegando en la segunda incluso a publicar recensiones de libros extranjeros de actualidad y trabajos originales que, aun siendo elementales, anunciaban la llegada de un destacado matemático creador.

Dos acontecimientos importantes para la ciencia nacional se produjeron en el tramo final de la licenciatura de Rey Pastor, y ambos ofrecieron al brillante estudiante unas oportunidades de desarrollo profesional desconocidas antes en el país. En 1907 se fundó la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE), presidida por Santiago Ramón y Cajal, y un año después se constituyó, precisamente en Zaragoza, la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Así que el joven estudiante ingresó en el mundo matemático en un marco social muy oportuno.

Durante el curso 1908-09 realizó el doctorado en Madrid –única universidad que expedía este título– y a continuación se incorporó como auxiliar a la cátedra de Torroja, el director de su tesis doctoral. Llegamos así al inicio de su ejercicio profesional, que conviene dividir en cuatro periodos: 1911-20 (Década española), 1921-35 (Primera alternancia), 1936-46 (Década argentina) y 1947-62 (Segunda alternancia).

La década española es una década prodigiosa, en la que aparecen incipientes y comprimidas casi todas las facetas que Rey desarrollará a lo largo de su vida. Continuó su formación pensionado por la JAE en Alemania, llegando a catedrático de la Central en 1913, después de un fugaz paso por Oviedo, cuya cátedra ganó en 1911, año en que participó intensamente en la redacción de la revista de la recién creada Sociedad Matemática Española. En 1913 se inició como historiador con un estudio sobre los matemáticos españoles del siglo XVI.

Terminadas a causa de la guerra sus salidas a Alemania, el año 1915 consolidó su posición en la matemática española, dictó cursos, pronunció importantes discursos y conferencias y empezó a organizar la investigación en el Laboratorio y Seminario Matemático creado por la JAE. Dedicó la segunda parte de la década a desarrollar todas estas iniciativas de la primera mitad, intercalando en 1917-18, de nuevo gracias a la JAE, su primer viaje a Argentina,

...conoció la modernidad matemática de la mano del catedrático Zoel García de Galdeano, figura principal de la matemática española del cambio de siglo...

donde dejó inoculado su espíritu renovador de la matemática. Su acceso a la Academia de Ciencias de Madrid, aprobado en 1918 y efectuado en 1920, cierra este primer periodo en el que se afirma en la matemática española como investigador, profesor, historiador y organizador.

Volvió a Buenos Aires para el curso 1921-22, pero luego prorrogó su contrato hasta 1928, años en los que la investigación dejó de ser su actividad principal. La Dictadura de Primo de Rivera permitió a Rey Pastor, que fue propagandista del régimen militar, compatibilizar su contrato americano con su sueldo de funcionario en Madrid, donde trabajaba de diciembre a febrero, el trimestre de vacaciones australes. En 1924, repitiendo la experiencia española, fundó la Sociedad Matemática Argentina y una revista como medio de expresión de la misma. En 1928 pasó a ser profesor funcionario en Argentina y fundó el Seminario Matemático Argentino, en el que reanudó la investigación matemática. Vivió intensamente la reforma universitaria argentina del 32, lo que le granjeó enemistades, mientras en España la II República decretó en 1931 su cese como catedrático por incompatibilidad; pero siguió con sus viajes de verano-invierno hasta que quedaron interrumpidos a causa de la guerra civil española. A partir de 1933 pasó a representar a Argentina en la Academia Internacional de Historia de las Ciencias.

Durante el tercer periodo permanece en Argentina con una tarea profesoral muy intensa, y dedicado a la edición o reedición de apuntes de cursos y libros de texto, pero iniciando al final el declive como matemático investigador. A cambio incrementa su actividad en historia de la ciencia y epistemología, materias sobre las que comienza a impartir cursos al obtener una cátedra en 1943. Poco después de acabada la guerra civil inició contactos con las autoridades franquistas para volver a España, pero sin llegar a acuerdos sobre las condiciones de su establecimiento.

Rey Pastor en Göttingen (1915)

Rey Pastor en 1918

Rey Pastor en Buenos Aires (1938)

Al iniciar el cuarto periodo encontramos un Rey Pastor próximo a los sesenta años que acepta al fin las gestiones de Terradas para alternar de nuevo Argentina –allí fue cesado en la cátedra por tres años en las depuraciones peronistas de 1952– y España, donde realiza una influyente actividad institucional vinculada a la ciencia y además es nombrado, en 1954, Académico de la Lengua. Sus investigaciones matemáticas siguen disminuyendo, a la vez que surge una nueva generación de textos universitarios elaborados con algunos de sus discípulos que han alcanzado la madurez profesional. Durante este periodo continuó su actividad publicista, pero sobre todo alcanzó la plenitud su obra histórica, reflejada en libros notables escritos con diversos colaboradores. En 1958 se jubiló y siguió hasta su muerte vinculado a la Universidad de Buenos Aires como profesor emérito.

Pasión científica y magisterio

Unos meses después de su muerte, la Unión Matemática Argentina dedicó a Rey Pastor un acto de homenaje que se inició con un discurso de M. Sadosky que refleja la fuerza temperamental del desaparecido profesor, que dificultó su relación incluso con amigos y discípulos, y la pasión que constituyó el núcleo energético de su actividad profesional. Vale recoger aquí algunos fragmentos del discurso:

> *Resulta muy difícil evitar que la muerte lime las filosas aristas de don Julio y que el tiempo envuelva en brumas piadosas las facetas extrañas y muchas veces contradictorias de su exuberante personalidad. [...]*
>
> *Su rasgo saliente era el* fuego sagrado *que animaba su espíritu, su pasión por la ciencia, su amor por la razón, su capacidad de gozar aprendiendo.*
>
> *Sólo ese fuego, esa pasión, ese don de transmitir el goce que le proporcionaba el descubrimiento científico, la originalidad de un hallazgo matemático, es lo que hizo que don Julio Rey Pastor creara en nuestro país una escuela. El no tuvo discípulos en el sentido clásico de la palabra, no podía tenerlos, pero él transmitió su amor. [...]*
>
> *Sus 45 años de estudio y de trabajo aquí nos hicieron a todos, a los que lo quisimos y a los que lo temieron. [...]*
>
> *Esa es su obra: la suya propia y la de todos los que la siguieron, aunque no la hayan hecho con él.*

En efecto, no cabe duda que Rey Pastor era no sólo un estudioso sino que se definía como «*homo faber*, que es superior a *homo sapiens*; porque, además de saber, crea», afirmando que un matemático es quien resuelve problemas y no sólo quien conoce más o menos teorías.[2] Estas y otras características de su credo científico investigador –curiosidad, amor a la verdad y a la gloria, ambición, laboriosidad y constancia– aparecen nítidas en una conferencia, con título *La vocación científica*, dictada en Buenos Aires en 1923 y publicada repetidas veces,[3] en Argentina y en España; en ella se muestra como un fiel y brillante seguidor de las ideas expuestas por Ramón y Cajal en *Los tónicos de la voluntad*,[4] obra cuyo fin era fomentar y orientar la formación de los investigadores científicos, considerando su crecimiento en cantidad y calidad como una necesidad del país. Rey Pastor ejerció esta vocación investigadora con intensidad y creatividad más notables en dos etapas bien delimitadas de su biografía.

Rey Pastor en su incorporación a la Real Academia Española (1954)

2 Esta última idea es una enseñanza que Sixto Cámara agradece a Álvarez Ude en el preámbulo de su tesis doctoral de 1908. Cámara estudió en Zaragoza, donde Álvarez Ude era profesor de geometría de la posición, dos cursos antes que Rey Pastor.

3 Está reproducida en un apéndice de Ríos y otros (1979).

4 Discurso de ingreso en la Academia de Ciencias en 1897, que tuvo una 2ª edición ampliada en 1898 y una tercera con nuevas adiciones en 1912. Años después, la «Colección Austral» de Espasa-Calpe popularizó la obra con sucesivas reediciones desde 1941.

Durante la década española se ocupó de geometría proyectiva sintética y de representación conforme en el plano complejo, asuntos sobre los que escribió y dirigió tesis doctorales a estudiantes a los que Sadosky no llamaría discípulos. De esta época es el interesante artículo metodológico *La investigación científica*,[5] en el que se pregunta: «¿Cuál es la esencia de la investigación matemática? ¿Cómo se amplía el patrimonio de esta ciencia?», para responder señalando «cuatro camino cardinales» que ilustra con numerosos ejemplos tomados de las teorías que ocupaban su investigación; como resumen final afirma:

> *[...] la correlación, la generalización y la especialización, trazan vías seguras a las inteligencias más mediocres, para dilatar los dominios de la matemática por yuxtaposición de capítulos, a veces interesantes; pero la sublime cópula de ideas [la anastómosis], patrimonio de los elegidos, ha sido y será siempre la generadora de entes nuevos, tanto más vigorosos cuanto más heterogéneas sean las ideas generatrices y más lejano parentesco exista entre ellas.*

En estas reflexiones se aprecia con claridad el eco de su maestro García de Galdeano, prolífico autor de escritos metodológicos, quien había señalado pocos años antes el «fusionismo» característico de la nueva matemática emergente.

Pero años antes, al iniciar su carrera de catedrático, ya era consciente, de nuevo en línea con Cajal, de que la investigación puntera sólo podía crecer en un ambiente científico suficientemente denso, de manera que la labor esencial de su generación debía ser la creación de dicho ambiente. La herencia de Cajal presente en este sentimiento patriótico se aprecia recordando estas palabras del sabio aragonés en *Los tónicos...*:

> *los genios, como las cumbres más elevadas, surgen solamente en las cordilleras. Para producir un Galileo o un Newton es necesario una legión de investigadores estimables.*

...al iniciar su carrera de catedrático, ya era consciente, de nuevo en línea con Cajal, de que la investigación puntera sólo podía crecer en un ambiente científico suficientemente denso, de manera que la labor esencial de su generación debía ser la creación de dicho ambiente.

5 (Rey Pastor, 1919). Se publicó en una revista de García de Galdeano y años después apareció como apéndice en Toranzos (1943).

Por su parte, Rey Pastor (1913) se contó entre «los que aún tenemos fe en el porvenir de España, y confiamos en una próxima orientación de sus clases intelectuales seguida de un progreso rápido en todos los órdenes», señalando luego la necesidad de unir todas las fuerzas disponibles

> *en la cruzada que actualmente quiere emprender la juventud para la conquista y asimilación de la ciencia europea; preliminar indispensable para que la siguiente generación, educada en otro ambiente, pueda comenzar la Historia científica de España.*

Este ideario forjado en sus primeros años profesionales fue desarrollado en España y en Argentina. En la segunda etapa investigadora, a partir de 1928, tal vez se puede identificar con mayor propiedad algún discípulo, como por ejemplo L. A. Santaló, que estudió en Madrid y emigró a Buenos Aires tras la guerra civil, y R. San Juan, permanentemente ligado a la capital española. Al ingresar este último en la Academia de Ciencias el año 1956, Rey Pastor, próximo ya a la jubilación, pronunció el discurso de recepción dedicando algunos párrafos a glosar la relación entre el maestro y el discípulo en los términos pasionales que le caracterizan:

> *Todo maestro teme el fracaso, porque la producción escrita tiene vida efímera, y sin discípulos que prolonguen la vida espiritual, única que vale, el fracaso pedagógico es sinónimo de muerte. Es, por el contrario, motivo de satisfacción, porque lo es de esperanza, [...] el ser superado por algún discípulo; porque en su obra revivirá una porciúncula de nuestro ser.* Vencer *a sus discípulos significa morir,* ser vencido *por ellos es a la vez revivir y renacer.*

Con esta vivencia de la transmisión del testigo generacional de la excelencia, que resumía haciendo suya la conocida sentencia que reza «si no vencí reyes moros, engendré quien los venciera», se volcó con espíritu cajaliano en la formación superior y elemental esperando obtener una masa crítica en la que pudiera brillar el genio.

Enseñanza para matemáticos

Los primeros libros de texto que preparó enlazan con los temarios de los dos primeros curso de análisis matemático, que eran el contenido de su cátedra. Aunque los cursos agrupaban a estudiantes de diversas carreras científicas y técnicas, Rey eligió adecuar los textos a la formación de matemáticos, dejando que fueran la labor del profesor y las clases prácticas las que adaptaran la enseñanza a cada tipo de estudiantes. Publicó en primer lugar los apuntes de sus lecciones en la Universidad de Madrid, de primer curso en 1914-15 y de segundo, ensayado en Oviedo tres años antes, en 1915-16; del primero y parte del segundo surgió en 1917 la obra *Elementos de análisis* *algebraico (EAA)*. Sus primeros apuntes son también el germen de otros libros más avanzados de análisis y álgebra, pero desde el punto de vista del enfoque pedagógico basta considerar *EAA*, en cuya introducción el autor dejó impresos en fecha temprana unos criterios pedagógicos que ya no modificó.[6]

Quizás el criterio básico, instalado en un difícil equilibrio, en torno al cual se articulan los demás, es el que se contiene en el siguiente párrafo:

> *Huyendo de la general tendencia a elevar por abstracción los asuntos elementales, hemos prescindido de todo formalismo, esforzándonos, por el contrario, en elementalizar las cuestiones difíciles sin menoscabo del rigor.*

Rey Pastor pretende con *EAA* corregir y mejorar la calidad de los libros españoles existentes, en algunos de los cuales señaló públicamente errores, y ante los que esgrime el rigor, pero se desmarca de algunos extranjeros rechazando el formalismo, término cuyo significado explica en una nota a pie de página:

> *Como hace notar el profesor Pascal, toda abstracción exige una base previa que sirva de punto de apoyo para poder elevarse, y no sólo carecen los alumnos de esta base, sino que precisamente vienen a la Universidad en busca de ella.*
>
> *«Hacer descender de lo alto los conceptos del Análisis es didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil».*

El rechazo del formalismo, entendido como abstracción prematura y perniciosa, se manifiesta especialmente en el tratamiento de los temas algebraicos contenidos en *EAA*; y es una posición que mantuvo toda su vida, a pesar de la extensión del álgebra abstracta a partir de los años treinta, postura resistente que alcanzó su máxima expresión en las últimas ediciones de sus *Lecciones de álgebra*.[7]

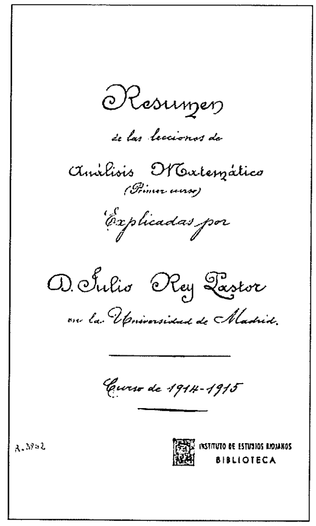
Para mostrar lo que entiende por rigor recurre a la vía negativa, afirmando que una demostración no rigurosa es la que «exigiendo un complemento de fe en el alumno, ahoga su naciente sentido crítico, inutilizándolo para toda ulterior labor original». De este modo, no duda en adoptar «el método *lógico* y no el *intuitivo*», procurando además «alcanzar en el lenguaje el grado de concisión y precisión usuales en casi todos los libros extranjeros». La precisión es compañera del rigor y con la concisión pretende evitar que los alumnos se acostumbren a «delegar en las páginas impresas el trabajo de discurrir». Resulta así que Rey Pastor exige la colaboración del lector para la comprensión de sus lecciones y por eso afirma tajante:

> *No se nos oculta el peligro de que los alumnos mediocres hallen algunas dificultades en la lectura de este libro; la misión del profesor, en tal caso, no es resolver las dificultades, sino educar al alumno para que pueda vencerlas por sí mismo. Y cuando se trate de un caso de incapacidad para*

Para mostrar lo que entiende por rigor recurre a la vía negativa, afirmando que una demostración no rigurosa es la que «exigiendo un complemento de fe en el alumno, ahoga su naciente sentido crítico, inutilizándolo»

6 En la segunda edición de 1922 la obra quedó prácticamente ultimada, pues sólo sufrió leves retoques en las ediciones siguientes, realizadas en Madrid. En 1945 tuvo una edición especial en Buenos Aires con alguna adición al final de la obra, pero sin variar el enfoque pedagógico que ahora nos ocupa.

7 Ver Llorente (1985) y Arenzana y otros (1985).



Resumen

de las lecciones de

Análisis Matemático

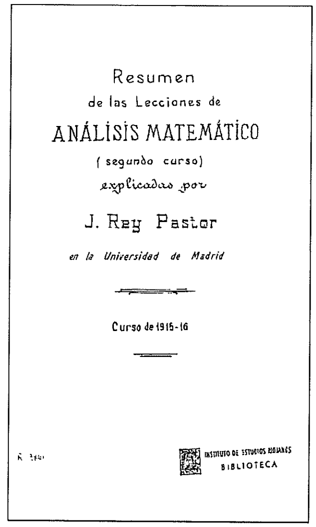
(Primer curso)

Explicadas por

D. Julio Rey Pastor

en la Universidad de Madrid.

Curso de 1914-1915



Resumen

de las Lecciones de

ANÁLISIS MATEMÁTICO

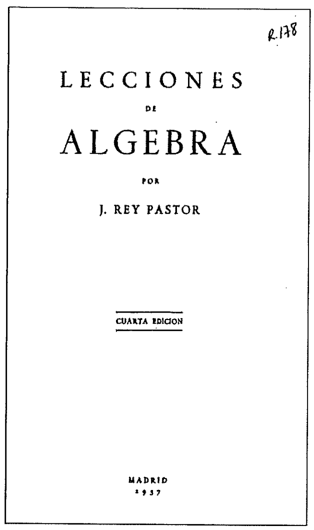
(segundo curso)

explicadas por

J. Rey Pastor

en la Universidad de Madrid

Curso de 1915-16



LECCIONES

DE

ALGEBRA

POR

J. REY PASTOR

CUARTA EDICIÓN

MADRID

1937

tales estudios, como ésta no se vence con montones de papel impreso, lo procedente es aconsejar el desistimiento.

La experiencia demuestra, en cambio, que las inteligencias normales no toleran una trituración excesiva de los teoremas, de igual modo que los aparatos de masticación artificial sólo aprovechan a quienes carecen de dentadura.

Se aprecia en las citas anteriores que Rey cree imperativo el rigor de la matemática del XIX para evitar caer en errores, pero esquiva el formalismo que se va imponiendo en el XX porque sostuvo la primacía de la invención, que puede ser ahogada por el exceso de lógica –la cual tiene ventajas expositivas, pero no creadoras–, de modo que equilibrando rigor y concisión en el lenguaje –que al no estar formalizado mantiene aspectos polisémicos del lenguaje literario, más aún en el estilo reypastoriano[8]– deja una parte de la asimilación del texto a la capacidad creadora del lector inteligente, condición que presupone al futuro matemático.

Una última característica de los *EAA* que asoma en la introducción, y que también va en la línea de formar matemáticos actualizados y futuros investigadores, es la apuesta de Rey Pastor por una nutrida bibliografía, cualidad heredada de Galdeano que contrasta con la ausencia de referencias en la mayoría de las obras españolas del momento.

Además de *EAA* y de las *Lecciones de álgebra* ya mencionadas, hay una tercera obra que se originó en los apuntes de sus primeros cursos de análisis, la *Teoría de las funciones reales,*[9] que se eleva sobre los EAA con análogos criterios pedagógicos dirigidos a la formación de matemáticos.

Enseñanza para técnicos y científicos

Ahora nos ocuparemos de los libros de texto de matemáticas que escribió para universitarios no matemáticos, para los que la matemática es un medio y no un fin. Rey Pastor conocía bien los debates que en Europa se producían desde finales del siglo anterior sobre el contenido matemático de las enseñanzas básicas y de aplicación. Entonces dominaban la tendencia alemana de separar las matemáticas de la ingeniería, reduciéndolas a formularios, y también la escuela inglesa de Perry que propugnaba una enseñanza intuitiva y práctica.[10] Pero este tipo de libros surge al enfrentarse Rey Pastor a las necesidades educativas que encuentra en Argentina.

Rey Pastor conocía bien los debates que en Europa se producían desde finales del siglo anterior sobre el contenido matemático de las enseñanzas básicas y de aplicación.

En su viaje de 1917 tuvo que preparar lecciones de análisis complejo para los estudiantes de ingeniería de Buenos Aires, lecciones que quedaron escritas en 1918 bajo el título *Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas*, de cuya introducción son estos párrafos:

En muchas ocasiones hemos insistido sobre las razones que han motivado esta aritmetización del Análisis, con exclusión de consideraciones geométricas, las cuales desempeñaron en su tiempo misión especial y hoy han quedado relegadas al secundario papel de interpretar o aclarar demostraciones analíticas. [...]

Teniendo en cuenta las costumbres de los ingenieros a quienes suele repugnar los razonamientos puramente analíticos, debiéramos haber sacrificado todo rigor, salvando las dificultades del infinito actual con atrevidos pasos al límite, apoyados en imprecisas consideraciones espaciales. Atendiendo a los deseos de los espíritus curiosos, a quienes interesa conocer el estado actual del Análisis, debiéramos seguir método aritmético puro. Hemos intentado salvar esta incompatibilidad usando constantemente en las explicaciones lenguaje geométrico *con sus correspondientes representaciones gráficas; pero susceptible de ser sustituido por conceptos aritméticos previamente definidos, así se gana en claridad sin perder en rigor.*

De vuelta a España tras su primera experiencia argentina, en el año 1919 coincidieron el inicio de la publicación de la *Revista Matemática Hispano-Americana* y la celebración del Congreso Nacional de Ingeniería en el que se debatieron estas cuestiones, circunstancia que aprovechó el matemático riojano para mostrar sus preferencias insertando en dicha revista,[11] con el título *Matemática de precisión y matemática de aproximación*, una texto de Klein en el que se lee:

La Matemática de aproximación es la parte que realmente se utiliza en las aplicaciones; la Matemática de precisión es, por decirlo así, la armazón de aquélla.

Este espíritu kleineano se refleja con toda claridad en la orientación metodológica del *Resumen del curso de cálculo infinitesimal*, de 1922, que recoge las lecciones dictadas el curso anterior en la Facultad de Ingeniería de Buenos Aires, nada más llegar a tierras platenses por segunda vez. En la introducción a este texto, que como casi todos los suyos tuvo repetidas ediciones a lo largo de

8 Para la asignación de la pedagogía de Rey Pastor al estilo impresionista definido por Glaeser ver: Hernández (1985), especialmente p. 93.

9 Tuvo ediciones en 1918, 1924 y 1929, todas ellas en Madrid.

10 Para más detalles sobre este asunto ver Lusa (1985).

11 (1919), I(10), 305-314. Es la traducción parcial de un artículo original de 1907.

toda su vida, define el rigor como «la precisión y la claridad» y lo reclama para el ingeniero porque «nadie como el técnico, que ha de manejar realidades y no abstracciones, debe ser exigente en claridad y precisión», pero notando que la esencia de este rigor en el estudio de las funciones «no es sino la noción clara de aproximación suficiente»:

> *Nadie como el Ingeniero necesita este rigor; para nadie es tan necesario el sentido de la aproximación. [...]*
>
> *Cultivar el sentido de la* aproximación *es el principal objeto de estas lecciones.*

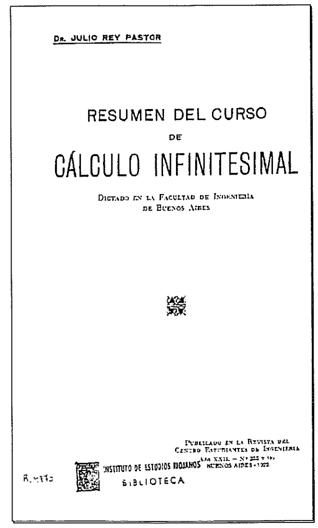
Sostiene que los ingenieros necesitan conocer la matemática rigurosa, aunque prescindan de ciertas demostraciones largas o difíciles y se ayuden de métodos gráficos y numéricos, de manera que rechaza muy especialmente la enseñanza basada en recetarios. Además, al enseñar matemáticas a los estudiantes de ingeniería, muy numeros, esperaba conquistar alguna vocación hacia las matemáticas, carrera elegida por muy pocos estudiantes.

Sin embargo, Rey Pastor se mostró menos exigente en la enseñanza para físicos y químicos, a la que aplicó el criterio de Perry cuando escribió en 1924 el primer volumen del *Curso cíclico de matemáticas*, que tuvo una segunda edición en 1929 a la vez que aparecía el segundo volumen; un año después publicó en colaboración con J. Babini, un ingeniero argentino ganado para su causa, *Ejercicios de matemáticas generales para físicos y químicos*, libro adaptado al primer volumen del *Curso cíclico*. El diferente planteamiento que sigue la obra para físicos y químicos frente a la dirigida a los ingenieros es explicado por el autor en la cuarta edición del *Cálculo*, de 1944, cuando reafirma su proyecto con estas palabras:

> *[...] rigor implica concentración de pensamiento y abandono de imágenes intuitivas, rápidas pero engañosas. Quienes se conformen con ese criterio de verdad* probable, *podrán consultar [...] nuestro* Curso cíclico, *donde todo es sencillo y convincente, mientras el lector no se percate del escaso valor de tales razonamientos. Son los propios técnicos quienes exigen rigor, que equivale a claridad, aunque lograda a más alto precio; [...]*

Por otra parte, en el prólogo de 1924 el autor explica que el *Curso cíclico* es «un libro desordenado» porque no respeta la «fragmentación» habitual de la matemática en sus diversas ramas, sino que se plantea como una obra «fusionista» basada en que las ideas matemáticas «se desarrollan y entremezclan en múltiples direcciones« manteniendo «una unidad funcional»; este planteamiento es otro de los aspectos del método Perry.

Sostiene que los ingenieros necesitan conocer la matemática rigurosa, aunque prescindan de ciertas demostraciones largas o difíciles y se ayuden de métodos gráficos y numéricos, de manera que rechaza muy especialmente la enseñanza basada en recetarios.



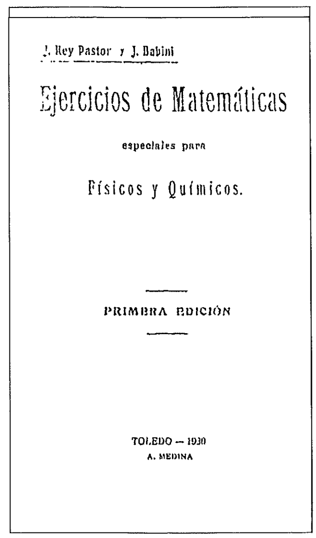
DR. JULIO REY PASTOR

RESUMEN DEL CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

DICTADO EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE BUENOS AIRES

PUBLICADO EN LA REVISTA DEL CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AÑO XXII. – Nº 223 Y 24 BUENOS AIRES - 1922

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS BIBLIOTECA

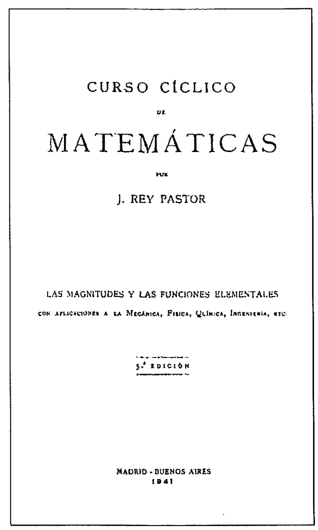


J. Rey Pastor y J. Babini

Ejercicios de Matemáticas especiales para Físicos y Químicos.

PRIMERA EDICIÓN

TOLEDO – 1930
A. MEDINA



CURSO CÍCLICO DE MATEMÁTICAS

POR J. REY PASTOR

LAS MAGNITUDES Y LAS FUNCIONES ELEMENTALES CON APLICACIONES A LA MECÁNICA, FÍSICA, QUÍMICA, INGENIERÍA, ETC.

5.ª EDICIÓN

MADRID - BUENOS AIRES
1941

Pasando a la actividad en la enseñanza elemental, recordemos que Rey Pastor se formó en unos años en los que la comunidad matemática internacional, que empezaba a tener vida mediante los congresos internacionales de matemáticos, debatía con profundidad sobre la enseñanza en los niveles elementales y aplicados, movimiento en el que F. Klein ejercía un notable liderazgo, mientras que el papel principal en España le correspondía a García de Galdeano, el maestro que dejó en Rey Pastor no pocas influencias. Mencionemos simplemente que Galdeano estuvo en el Congreso de Roma de 1908 en el que se creó la actual ICMI (Comisión Internacional sobre Educación Matemática).[12]

...Rey Pastor se formó en unos años en los que la comunidad matemática internacional, que empezaba a tener vida mediante los congresos internacionales de matemáticos, debatía con profundidad sobre la enseñanza en los niveles elementales y aplicados, movimiento en el que F. Klein ejercía un notable liderazgo, mientras que el papel principal en España le correspondía a García de Galdeano...

En 1918 se fundó en Madrid el Instituto-Escuela de la JAE, cuya sección de matemáticas dirigió Rey Pastor hasta 1921, y los años siguientes continuó asistiendo a sus actividades durante su trimestre madrileño (Millán, 1990). En dicho establecimiento se explicaba la influyente obra en dos volumenes de F. Klein *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, que en 1927 y 1931 sería traducida al español en la Biblioteca Matemática, colección dirigida por Rey Pastor. En relación con esto, merece citarse que en 1920, próxima ya su marcha a Buenos Aires, Rey Pastor fue llamado a ocupar una cátedra, de reciente creación, dedicada a Metodología y Crítica Matemáticas, asuntos muy queridos por su maestro García de Galdeano, entonces jubilado.

Finalmente, Rey Pastor cultivó más la parcela educativa elemental en la Argentina debido a que lo hizo sobre todo en los años veinte, cuando pasaba tres cuartos de año en la orilla americana. Toranzos (1945), uno de sus colaboradores en esta materia, dejó señaladas las tres vías por las que Rey ejerció una poderosa influencia sobre la enseñanza secundaria argentina: 1.°) los cursos conferencias y libros, especialmente los EAA; 2.°) la docencia en el Instituto del Profesorado Secundario; 3.°) los libros de texto. Según Toranzos, en los EAA encontraban los profesores una formación básica suficientemente moderna y rigurosa y de ellos extraían material que adaptaban para sus cursos y textos. Esta influencia se extendió también a Brasil unos años más tarde, según cuenta D'Ambrosio (1990).

La primera actuación de Rey Pastor en el campo de la formación de profesores en Argentina fue un *Curso de metodología matemática* que impartió en Paraná en 1922, cuyos contenidos más conocidos son los que se recogieron en el libro *Metodología y didáctica de la matemática elemental*, publicado en Madrid en 1933 con la colaboración de P. Puig Adam. A pesar de la tardía publicación, conviene empezar por aquí para apreciar las ideas que guiaron la acción de Rey Pastor en este campo desde sus primeros pasos. Lo primero que debe señalarse es que plantea una distinción entre la «metodología de la ciencia» y la «metodología de la enseñanza», o sea la «didáctica», y que el libro de 1933 se presenta como el volumen primero, dedicado a la «metodología matemática», que debería continuarse con un segundo volumen sobre «didáctica matemática» que nunca apareció. Se desprende de ello que Rey estaba más preocupado por los contenidos matemáticos de la enseñanza que por los problemas de la transmisión y recepción del mensaje educativo, actitud que era mayoritaria en el movimiento reformador de la enseñanza de la matemática europea anterior a la primera guerra mundial, que en la década de los veinte repercutía en Argentina; no hay que olvidar que los aspectos psicológicos del aprendizaje no ganaron importancia hasta que llegó la gran extensión de la enseñanza que siguió a la segunda guerra mundial.

Dejando de lado la enseñanza superior que persigue un fin profesional, Rey Pastor y Puig Adam distinguen entre la enseñanza primaria y la secundaria con estos criterios:

> *La enseñanza matemática en la escuela primaria tiene carácter predominantemente* instrumental, *y se propone ante todo adiestrar a los niños en el cálculo numérico, [...]*
>
> *Con la enseñanza secundaria se persigue modernamente un fin predominantemente* educativo *a la par que que se amplían ciertas nociones de la enseñanza primaria útiles para la vida, pero más bien por deficiencias y excesiva brevedad de aquélla que por corresponder en verdad a este segundo período de formación humanística en el más amplio sentido de la palabra.*

Luego afirman que cada periodo plantea sus propias preocupaciones educativas:

> *mientras en el primero la educación es un medio para llegar a los conocimientos, en el segundo son los conocimientos el medio necesario para llegar a la educación mental.*

12 Aquí es recomendable la lectura de Hormigón (1991) y (1995).

Con estos planteamientos generales expuestos en la introducción, los autores pasan a desarrollar la metodología matemática comenzando por explicar el significado de inductivo y deductivo, de analítico y sintético, manteniendo como criterio que la mezcla óptima entre estas parejas de opciones contrapuestas será aquella que deje abierta la puerta al estímulo de la invención. Merece la pena reproducir este fragmento que conecta la pedagogía de la investigación con la escolar general:

> *En toda invención hay tanto de análisis como de síntesis, y en la exposición didáctica veremos que no es el método exclusivamente sintético el más adecuado y eficaz; pero ciertamente es indispensable el análisis en toda invención, así como en la resolución de todo problema, y es indispensable una síntesis en toda exposición científica. Lo que acontece es que la moderna pedagogía, que utiliza además conjuntamente el análisis en la enseñanza, lo hace precisamente para seguir el mismo camino de la invención; [...]*

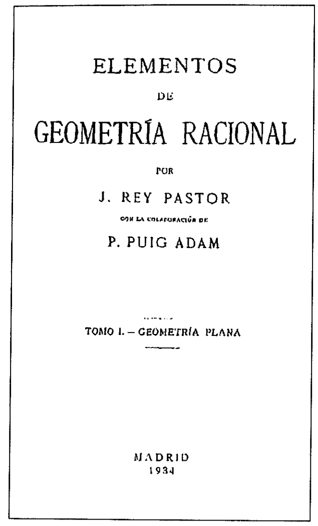
Estas eran las ideas que Rey Pastor desarrollaba en el Instituto de Profesorado Secundario, en el que profesores emigrantes alemanes habían introducido el método heurístico, del que también él era partidario. La oportunidad de llevar a la práctica estas ideas mediante la confección de libros de texto le llegó con el plan de estudios argentino de 1926, que propugnaba la enseñanza de carácter lógico con la que Rey Pastor no estaba de acuerdo porque es difícil armonizar rigor y sencillez, por lo que defendía retrasar en secundaria el método lógico intercalando antes unos años de método intuitivo, siguiendo un esquema similar al que en la enseñanza universitaria aplicaba a la secuencia de ejemplos y abstracciones. Por eso en sus libros para dicho plan de estudios procuraba salirse del meticuloso programa oficial para acercar a los textos «la realidad física de que proceden las abstracciones matemáticas». En este nivel secundario, insistía en una distinción entre rigor y formalismo que ya hemos visto en los *EAA*:

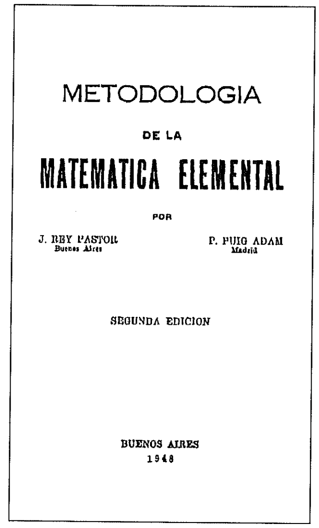
> *No se confunda rigor y formalismo. Una demostración puede ser perfectamente rigurosa sin presentarla en forma cuadriculada, sino más bien de la manera natural con que las ideas se encadenan en el pensamiento; en cambio hay demostraciones perfectas en su aspecto formal, que encierran graves defectos lógicos, ocultos entre el frondoso formalismo.*

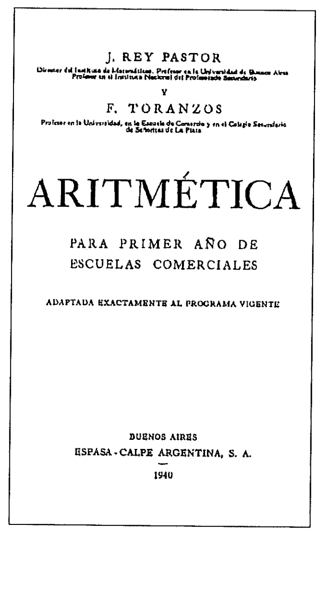
Aprovechando el impacto del nuevo plan de estudios publicó un artículo titulado *Valor educativo de la enseñanza matemática,*[13] en el que expuso sus ideas con su característico tono culto y lenguaje brillante. A su vez, y paralelamente a la redacción de sus textos oficiales con método racional, escribía con P. Puig Adan una colección intuitiva que se difundió notablemente en España. Pasado el tiempo, ambos repertorios cruzaron el Atlántico en sentidos opuestos llevados por los vaivenes de los planes de estudios oficiales; por una parte Puig Adam adaptó la serie racional argentina al plan español de 1934 y, por

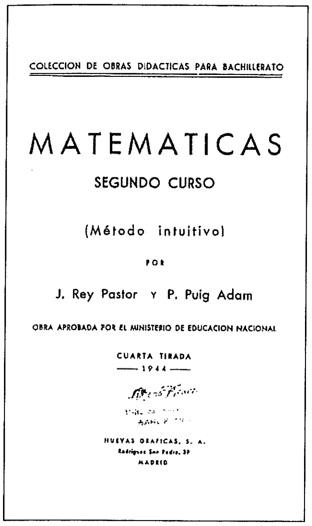
...los autores pasan a desarrollar la metodología matemática comenzando por explicar el significado de inductivo y deductivo, de analítico y sintético, manteniendo como criterio que la mezcla óptima entre estas parejas de opciones contrapuestas será aquella que deje abierta la puerta al estímulo de la invención.

13 Artículo recogido en Rey Pastor (1993).


ELEMENTOS
DE
GEOMETRÍA RACIONAL
POR
J. REY PASTOR
CON LA COLABORACIÓN DE
P. PUIG ADAM
TOMO I. – GEOMETRÍA PLANA
MADRID
1934


METODOLOGIA
DE LA
MATEMATICA ELEMENTAL
POR
J. REY PASTOR
Buenos Aires
P. PUIG ADAM
Madrid
SEGUNDA EDICION
BUENOS AIRES
1948


J. REY PASTOR
Director del Instituto de Matemáticas. Profesor en la Universidad de Buenos Aires
Profesor en el Instituto Nacional del Profesorado Secundario
Y
F. TORANZOS
Profesor en la Universidad, en la Escuela de Comercio y en el Colegio Secundario de Señoritas de La Plata
ARITMÉTICA
PARA PRIMER AÑO DE
ESCUELAS COMERCIALES
ADAPTADA EXACTAMENTE AL PROGRAMA VIGENTE
BUENOS AIRES
ESPASA-CALPE ARGENTINA, S. A.
1940



COLECCION DE OBRAS DIDACTICAS PARA BACHILLERATO

MATEMATICAS

SEGUNDO CURSO

(Método intuitivo)

POR

J. Rey Pastor y P. Puig Adam

OBRA APROBADA POR EL MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

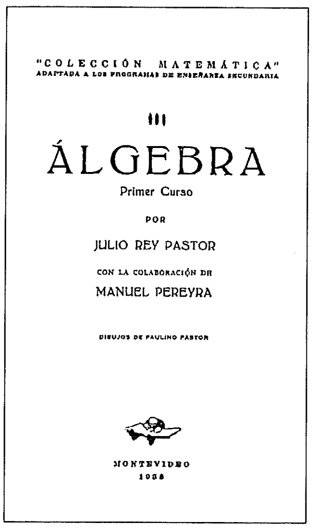
CUARTA TIRADA

1944

NUEVAS GRAFICAS, S. A.

Rodríguez San Pedro, 39

MADRID



"COLECCIÓN MATEMÁTICA"

ADAPTADA A LOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

III

ÁLGEBRA

Primer Curso

POR

JULIO REY PASTOR

CON LA COLABORACIÓN DE

MANUEL PEREYRA

DIBUJOS DE PAULINO PASTOR

MONTEVIDEO

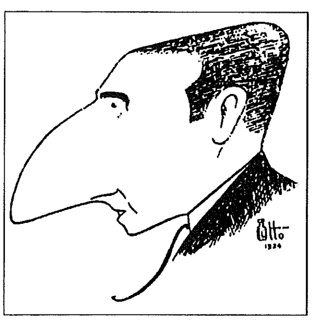
1938

otra, la colección intuitiva sirvió de guía con motivo del plan intuitivo argentino de 1937, al que Rey Pastor acusó de ser en exceso pendular, por

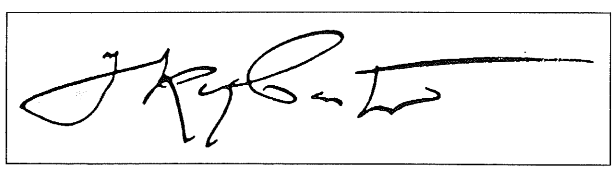
> *renunciar al mínimo de estructura lógica, usual en todos los países cultos para alumnos de tal edad, e indispensable para dar a la enseñanza matemática el valor educativo que justifica su inclusión en el plan de cultura general de la enseñanza secundaria.*

En los últimos años treinta, M. Pereyra adaptó en Montevideo los textos intuitivos de Rey Pastor y, a partir de 1940, hizo lo propio Toranzos para utilizarlos en las enseñanzas de comercio y otros establecimientos de secundaria. Todos estos textos siguieron llevando el nombre de Rey Pastor en cabecera junto con el coautor o colaborador correspondiente, y todos ellos poseen además la característica de ir acompañados de introducciones o apéndices históricos de las materias que trataban, hecho éste que era también una constante en los textos universitarios de Rey Pastor.

A manera de colofón, podemos decir que la actividad de Rey Pastor en la esfera educativa elemental se concentra en los últimos años de la década española y el primer periodo de alternancia, entonces con presencia mayoritaria en la Argentina; su extensión más allá de estos límites temporales se debe más bien a la labor de colaboradores, principalmente Puig Adam en España. Estos años de fuerte contenido metodológico corresponden a una laguna en su producción investigadora, un paréntesis entre el cierre de las líneas de trabajo nacidas en la primera mitad de la década española y la reapertura de un nuevo impulso investigador. Este impulso domina en su espíritu y se traduce en la enseñanza elemental en una primacía de la intuición y la imaginación propias de la creación científica, dejando para la lógica el papel posterior de control y orden, en una decidida apuesta por los métodos que dejan una vía para que el alumno manifieste su *esprit de finesse* pascaliano, sin dejar por ello de lado el educativo *esprit géométrique*, teniendo en cuenta que, para Rey Pastor, quien posee el primero también posee, en mayor o menor grado, el segundo. Este planteamiento, que lleva implícita una cierta selección de los alumnos que se acentúa a medida que se eleva el nivel de enseñanza, corresponde a una época anterior a la pedagogía que pone mayor énfasis en los aspectos psicológicos del aprendizaje, cuando la enseñanza básica se hace obligatoria y se generaliza la secundaria.



Rey Pastor visto por los estudiantes argentinos en 1924. (*Boletín del Centro de Estudiantes de Ingeniería*).



Firma autógrafa de Rey Pastor

Referencias

ARENZANA, V. y M. L. RODRÍGUEZ (1985): «El álgebra moderna en 'Lecciones de Algebra' de J. Rey Pastor», en ESPAÑOL (ed.) (1985), 155-161.

D'AMBROSIO, U. (1990): «La didáctica de la matemática y la obra de Rey Pastor», en ESPAÑOL (ed.) (1990), 209-215.

ESPAÑOL, L. (ed.) (1985): *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor* (Logroño, 28 de octubre-1 de noviembre 1983), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño.

ESPAÑOL, L. (ed.) (1990): *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Instituto de Estudios Riojanos, Logroño.

HERNÁNDEZ, J. (1985): «Rey Pastor y Ortega y Gasset: un aire de familia», en ESPAÑOL (ed.) (1985), 91-103.

HORMIGÓN, M. (1991): «El affaire Cambridge: nuevos datos sobre las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX», en *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* (Murcia, 18-21 de diciembre de 1989), DM y PPU, I, Murcia, 135-171.

HORMIGÓN, M. (1995): «Histoire de l'enseignement des mathématiques en Espagne», en *Actes de la Première Université d'été Européenne* (Montpellier 19 au 23 juillet 1993), IREM, Montpellier, 351-361.

LUSA, G. (1985): «Las matemáticas en la ingeniería: La obra de Rey Pastor», en ESPAÑOL (ed.) (1985), 205-219.

LLORENTE, P. (1985): «Una presentación de la obra de Julio Rey Pastor en álgebra», en ESPAÑOL (ed.) (1985), 119-136.

MILLÁN, A. (1990): «Sobre la incorporación de la mujer a la actividad científica en España: la primera doctora en Matemáticas», en R. CIDONA y R. LLOBERA (eds.): *Història, Ciència i Ensenyament*, E.U. del Professorat d'EGB/SEHCYT, Barcelona, 505-515.

RAMÓN Y CAJAL, S. (1961): *Los tónicos de la voluntad*, Espasa-Calpe, Madrid. (Ediciones originales de 1898 y 1912).

REY PASTOR, J. (1913): «Nuestra cultura físico-matemática», *Revista de Libros* II, 22-24.

REY PASTOR, J. (1919): «La investigación científica», *Boletín de Crítica, Pedagogía, Historia y Bibliografía* I(4), 97-108.

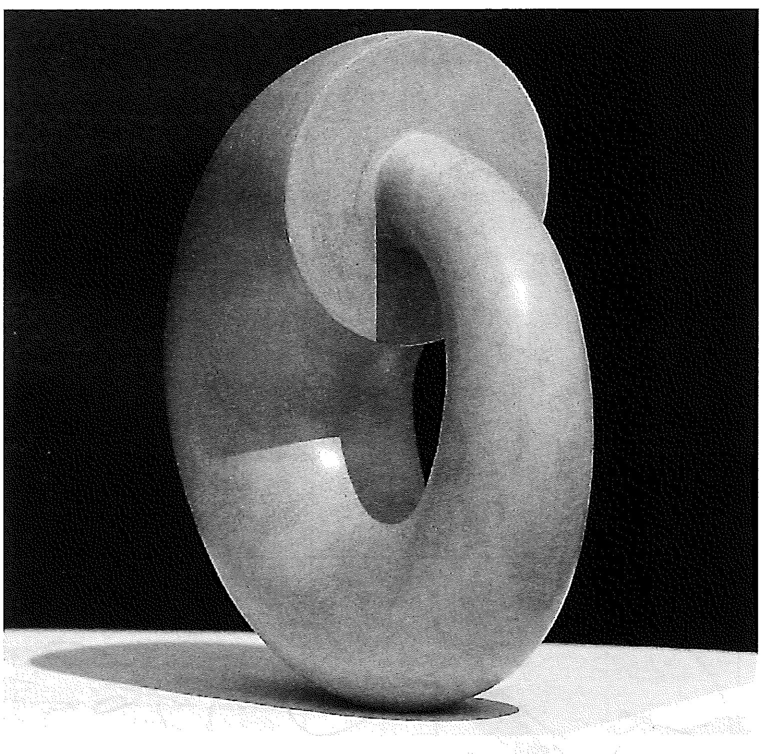
REY PASTOR, J. (1993): *Escritos de las dos orillas* (Selección, introducción y notas por L. ESPAÑOL), Gobierno de La Rioja, Logroño.

RIOS, S., L. A. SANTALÓ y M. BALANZAT (1979): *Julio Rey Pastor matemático*, Instituto de España, Madrid.

TORANZOS, F. I. (1943): *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*, (Prólogo de J. REY PASTOR), Espasa-Calpe, Buenos Aires.

TORANZOS, F. I. (1945): «Rey Pastor y la enseñanza de las matemáticas en la Argentina», en *Homenaje a Julio Rey Pastor*, Instituto de Matemática, Rosario, Tomo I, 38-44.

Luis Español
Departamento de
Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja



Transformación del toro. Javier Carvajal

SUMA 24
febrero 1997, pp. 39-45

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la forma escalonada reducida de una matriz

Leandro Tortosa Grau
Javier Santacruz Cutillas

En este artículo se analiza el método de reducción de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y se pone de manifiesto los problemas de estabilidad numérica que el método tiene. Para solucionar estos problemas se propone el método de reducción de Gauss con pivote. También se introduce el concepto de matriz escalonada reducida para realizar la discusión y posterior resolución de sistemas de ecuaciones, efectuando algunos ejemplos. Para finalizar, se muestra un programa para la calculadora Ti-82 que resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

ARTÍCULOS

TENEMOS en una mesa unos cuantos libros de texto de matemáticas de COU y tomamos uno de ellos cualquiera al azar.

Nos disponemos a buscar el apartado dedicado a sistemas de ecuaciones lineales, por lo que nos vamos al índice y, ¡ya está!, el primer capítulo del libro trata de álgebra lineal. Allí encontramos el primer tema, cuyo título es el de sistemas lineales de dos y de tres ecuaciones. Seguimos leyendo el índice y los títulos de los temas siguientes son matrices, determinantes y vuelve a aparecer en el último tema el nombre de sistemas de ecuaciones lineales.

La primera pregunta que nos surge antes de comenzar a leer es: ¿por qué separan en dos temas los sistemas de ecuaciones, tratando el primero de ellos los de dos y tres ecuaciones y el siguiente los sistemas de ecuaciones en general? ¿Es que en el último tema se estudian sistemas de 50 ecuaciones y 50 incógnitas? ¿Es que los sistemas que se estudian en el siguiente capítulo no se parecen a los de dos y tres ecuaciones?

Ante tan atrayentes perspectivas y con una curiosidad creciente en nosotros, decidimos abandonar el índice y empezar a leer el primer tema.

Sin ánimo de ser exhaustivos, describiremos algunos aspectos que consideramos esenciales de lo que leímos en esas páginas.

En el primer punto del tema se establecen las definiciones básicas relacionadas con la forma que tienen los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se nos indica qué es una solución del mismo y, posteriormente, se nos habla de qué son sistemas equivalentes. A lo largo del tema se nos indican algunos ejemplos y nos proponen problemas para resolver. En el siguiente apartado se desarrolla el método de Gauss, realizándose algún ejemplo del mismo. En el siguiente punto encontramos las definiciones de vectores, de combinaciones lineales, de dependencia e independencia lineal, con lo que acaba el primer tema.

Después de leer este tema, decidimos detenernos a pensar un instante sobre lo leído y nos hacemos la pregunta: ¿qué hemos aprendido hasta aquí?

Tras unos duros momentos de pausa nos damos cuenta de que, en teoría, ya sabemos resolver sistemas de dos y de tres ecuaciones utilizando un método, llamado de Gauss, que consiste, básicamente, en transformar el sistema inicial en otro equivalente en el que en la última fila aparece despejada la última incógnita.

Después de esto, la siguiente pregunta que nos hacemos es: ¿qué representan los sistemas de ecuaciones, «de dónde salen»? ¿ Qué situaciones «reales» podemos estudiar que nos conduzcan al planteamiento y posterior resolución de un sistema de ecuaciones lineales como los que ya sabemos resolver?

La respuesta, basándonos en lo que hemos leído, es nula. No sabemos nada acerca de las aplicaciones que todo esto tiene.

Ante esta decepción, decidimos que nuestra única esperanza es acudir al tema siguiente. Quizás allí encontremos algunas respuestas a nuestros interrogantes y quizás allí encontremos algunos problemas algo más interesantes que los propuestos hasta ahora.

Eso es precisamente lo que hacemos. Después de un tema de matrices y otro de determinantes, llegamos al último tema cuyo título era el de sistemas de ecuaciones lineales.

Al comienzo del mismo se generaliza el concepto de sistema lineal para un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas. Después de estas primeras definiciones se estudia el criterio de Rouché para estudiar la compatibilidad o incompatibilidad del sistema. En el siguiente apartado se insiste en el método de Gauss. También se explica posteriormente el método de Cramer para sistemas compatibles determinados. En el último apartado del tema se indica una aplicación de los sistemas de ecuaciones a la posición que ocupan dos rectas en el plano y, posteriormente, utilizando ahora tres ecuaciones, se estudia la posición de tres planos en el espacio. Ciertamente este último apartado es el que más interesante nos ha parecido.

La conclusión que obtenemos de todo esto, tras una reflexión más profunda, es que puede que sepamos efectuar de una forma mecánica una serie de operaciones que nos resuelvan sistemas de ecuaciones pero, desde luego, no tenemos claras cuáles son sus aplicaciones ni tenemos muy claro tampoco el por qué de algunos conceptos que aquí se han mezclado y entrelazado para resolver estos problemas. Por ejemplo, ¿qué relación tiene el concepto de determinante con la resolución de sistemas? ¿Es el método de Gauss una especie de panacea que nos resuelve todo tipo de sistemas? Si esto último es así, ¿por qué debemos estudiar el método de Cramer? ¿Acaso no nos sirve el de Gauss? Podríamos seguir con algunas preguntas más en la misma línea. Nuestra conclusión es clara: en general, no nos gusta el tratamiento que los libros de texto hacen de los temas de álgebra lineal y, en particular, del que aquí nos ocupa: la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

¿Es el método de Gauss una especie de panacea que nos resuelve todo tipo de sistemas? Si esto último es así, ¿por qué debemos estudiar el método de Cramer? ¿Acaso no nos sirve el de Gauss?

Hecha esta reflexión inicial, vamos a profundizar un poco en algunos aspectos que nos parece importante tratar y comentar sobre este tema; aspectos que pueden parecer bastante elementales, pero que los libros de texto no recogen en profundidad y con claridad.

Resolución de sistemas por Gauss

Pese a que una gran mayoría de los profesores de matemáticas seguimos enseñando a nuestros alumnos el tradicional método de discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales basado en el teorema de Rouché Fröbenius para rangos de matrices y en la regla de Cramer, podemos decir que el método de Gauss es, en la actualidad, una de las «estrellas» de la resolución de sistemas. Pero, contra lo que *a priori* podamos pensar, no es un método ni mucho menos infalible, como luego veremos.

Supongamos que queremos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss, que consiste en ir aplicando transformaciones elementales a la matriz ampliada del sistema, de manera que lleguemos, si es posible, a un sistema de la forma:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & {}^*y & + & {}^*z & = & * \\ & & y & + & {}^*z & = & * \\ & & & & z & = & * \end{array}$$

Realmente lo que hacemos es convertir el sistema inicial en un sistema cuya matriz ampliada asociada al mismo es una matriz triangular superior.

Si observamos este último sistema, vemos que tenemos despejada la tercera incógnita de la tercera ecuación. Podemos sustituir su valor en la ecuación anterior y despejar la variable *y*; una vez despejada la *y*, sustituyendo de forma análoga en la primera ecuación, obtenemos *x*, con lo que el sistema queda resuelto. Esto es lo que normalmente se llama *sustitución por regresión hacia atrás*.

Podemos ver un ejemplo resolviendo el sistema anterior:

SISTEMA INICIAL

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad \text{Sumar la primera ecuación a la segunda}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & - & y & - & z & = & -1 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad 3^{a}\text{ fila} - 2\text{x}1^{a}\text{ fila}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad 3^{a}\text{ fila} + 2^{a}\text{ fila}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad 1/2\text{ x }3^{a}\text{ fila}$$

SISTEMA FINAL

De la última expresión obtenemos que z = 2, sustituyendo en la segunda tendremos que y = –1 y, finalmente, x = 1, con lo que tenemos resuelto el sistema de ecuaciones inicial.

El método de Gauss, como vemos, es un método bastante «mecánico» en cuanto al cálculo y al tipo de operaciones que debemos realizar. Disponemos como herramienta de cálculo de las tres operaciones elementales básicas, que son las que nos proporcionan ecuaciones equivalentes, y sabemos también el tipo de resultado al que debemos llegar, utilizando esas operaciones.

Pero la gran ventaja de este método de resolución reside en que no tenemos por qué realizar una discusión previa del tipo de sistema con el que trabajamos, es decir, no es necesario determinar *a priori* si el sistema tiene o no solución y si ésta es única o existen infinitas soluciones. El propio desarrollo del método y su resultado final nos dan la clave para estudiar el tipo de sistema que estamos resolviendo. Veamos algún ejemplo de lo que queremos decir.

Consideremos el sistema siguiente que se desea resolver por Gauss:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 2z & = & -4 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Si realizamos el proceso de resolución por filas de Gauss a la matriz ampliada del sistema, seguiremos los siguientes pasos :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{f1–f2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{f3–2f1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \ \text{f2/2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \ \text{f3+3f2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \ \text{–f3/4} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ [1]$$

Llegamos finalmente a la matriz [1], una vez reducida según el procedimiento de Gauss. Si observamos detenidamente la última fila de la matriz ampliada del sistema y queremos despejar la incógnita z, tendremos que 0·z = 1, lo cual es una contradicción. Esto nos lleva a asegurar que el sistema no tiene solución.

Para llegar a la conclusión anterior no hemos necesitado calcular ni rangos de matrices, ni determinantes, ni nada más que la simple aplicación del método.

Ahora consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & 3z & = & -1 \\ -x & + & 3y & & & = & 1 \end{array}$$

Si efectuamos las operaciones elementales adecuadas para resolver el sistema, siguiendo el método de Gauss, llegamos a un sistema equivalente de la forma:

$$\begin{aligned} x \qquad - 3z &= -1 \\ y - z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vemos que el sistema original de tres ecuaciones con tres incógnitas se convierte en un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Esto significa que podemos escribir las dos primeras incógnitas, x e y, en función de la tercera, z, lo que nos indica que el sistema tiene infinitas soluciones. Podemos escribir el sistema de la forma:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3z \\ y &= z \end{aligned}$$

De esta forma tenemos la solución general del sistema en función del parámetro z. Como vemos, tampoco en este caso hemos necesitado un estudio previo del sistema mediante el concepto de rango, para llegar a las soluciones del mismo. Y esta es, precisamente, la conclusión más importante que debemos tener en cuenta a la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Entonces, si con el método de Gauss podemos establecer el carácter y calcular la solución del sistema, ¿por qué utilizar el tradicional método basado en el cálculo de rangos a través de determinantes y menores de una matriz?

...si con el método de Gauss podemos establecer el carácter y calcular la solución del sistema, ¿por qué utilizar el tradicional método basado en el cálculo de rangos a través de determinantes y menores de una matriz?

Pero tampoco debemos pensar que este método es una especie de herramienta infalible a la hora de resolver sistemas. Para demostrar esto calculemos ahora la solución del siguiente sistema :

$$\begin{aligned} 0{,}143x + 0{,}357y + 2{,}01z &= -5{,}17 \\ -1{,}31x + 0{,}911y + 1{,}99z &= -5{,}46 \\ 11{,}2x - 4{,}30y - 0{,}605z &= 4{,}42 \end{aligned}$$

Vamos a resolver este sistema de forma análoga a como lo hemos hecho anteriormente. Vamos a calcular la solución del sistema aproximando en el tercer decimal, es decir, en cada paso de cálculo trabajamos con dos cifras decimales.

$$\begin{pmatrix} 0{,}143 & 0{,}357 & 2{,}01 & -5{,}17 \\ -1{,}31 & 0{,}911 & 1{,}99 & -5{,}46 \\ 11{,}2 & -4{,}30 & -0{,}605 & 4{,}42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ -1{,}31 & 0{,}911 & 1{,}99 & -5{,}46 \\ 11{,}2 & -4{,}30 & -0{,}605 & 4{,}42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ 0{,}00 & 4{,}19 & 20{,}5 & -52{,}9 \\ 11{,}2 & -4{,}30 & -0{,}605 & 4{,}42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ 0{,}00 & 4{,}19 & 20{,}5 & -52{,}9 \\ 0{,}00 & -32{,}3 & -159 & 409 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 4{,}89 & -12{,}6 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & -2{,}00 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Forma reducida de Gauss}$$

Si resolvemos este sistema partiendo de la incógnita z que tenemos despejada en la última ecuación, es decir, $z = -2{,}00$, obtenemos las soluciones:

$$x = -0{,}950 \ ; \ y = -2{,}82 \ ; \ z = -2{,}00.$$

Pero si sustituimos esta solución en el sistema inicial, comprobamos que no se verifican las ecuaciones iniciales. ¿Qué ocurre entonces? ¿Por qué el método nos falla, si hemos seguido los pasos correctamente?

Las respuestas a estas preguntas debemos encontrarlas en el error de redondeo que se produce en el transcurso de todo el cálculo. Este error se va propagando al ir efectuando las operaciones sucesivas en los pasos que nos llevan al resultado final. Si nos fijamos en la primera columna, el elemento a_{11} es 0,143, mientras que el elemento a_{31} es 11,2. Existe una diferencia de una potencia de 10 entre estos valores. Esto supone que estos factores tienden a propagar el error de redondeo, provocando una solución final distorsionada totalmente respecto de la solución verdadera del sistema.

¿Cómo solucionar esto? La idea para solucionar este problema de propagación del error de redondeo consiste en modificar el método de Gauss de la siguiente manera: en el primer paso en la columna de la izquierda buscamos el elemento de mayor valor absoluto, y a este elemento lo llamamos *pivote*. Inmediatamente después lo que hacemos es intercambiar la primera fila con la fila donde se encuentra el pivote. Después dividimos la primera fila por el pivote. Posteriormente se utilizan las operaciones elementales para reducir a cero los demás elementos de la primera columna. De la misma forma se reducen los siguientes elementos, eligiendo los elementos pivote de cada columna de la misma forma.

Este método, que resulta de efectuar estas modificaciones anteriormente citadas al método de Gauss, lo llamamos *Gauss con pivote*.

Vamos ahora a resolver el sistema anterior utilizando este nuevo método modificado.

Si nos fijamos en la matriz inicial, en la primera columna el elemento que tiene el mayor valor absoluto es el 11,2, por lo que el primer paso será el intercambio de las filas 1 y 3.

$$\begin{pmatrix} 0,143 & 0,357 & 2,01 & -5,17 \\ -1,31 & 0,911 & 1,99 & -5,46 \\ 11,2 & -4,30 & -0,605 & 4,42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pivote: } 11,2}$$

$$\begin{pmatrix} 11,2 & -4,30 & -0,605 & 4,42 \\ -1,31 & 0,911 & 1,99 & -5,46 \\ 0,143 & 0,357 & 2,01 & -5,17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Hacemos uno y ceros en la } 1^{a} \text{ columna}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 0,408 & 1,92 & -4,94 \\ 0,00 & 0,412 & 2,02 & -5,23 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pivote: } 0,412}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 0,412 & 2,02 & -5,23 \\ 0,00 & 0,408 & 1,92 & -4,94 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Hacemos uno y ceros en la } 2^{a} \text{ columna}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 1,00 & 4,90 & -12,7 \\ 0,00 & 0,00 & -0,08 & 0,240 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Hacemos uno en la } 3^{a} \text{ fila}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 1,00 & 4,90 & -12,7 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & -3,00 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la solución a partir de la última matriz obtenemos las soluciones

$$x = 1 \ ; \ y = 2 \ ; \ z = -3$$

lo que coincide con la solución exacta cuando aproximamos hasta la tercera cifra significativa.

Vemos, por lo tanto, que el método de Gauss con pivote puede ayudarnos a resolver algunos sistemas de ecuaciones en los que el error de redondeo puede causar graves problemas para su resolución.

La matriz escalonada reducida

Recordemos que el sistema inicial

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

lo reducíamos mediante el método de Gauss, a otro sistema equivalente de la forma:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Si analizamos todo el proceso en conjunto, nos damos cuenta de que no tenemos por qué detener el proceso en este punto. Igual que hemos reducido las columnas a uno en el elemento diagonal y a ceros por debajo del elemento diagonal, podemos perfectamente hacer ceros también por encima del elemento de la diagonal principal. Para hacer esto basta que realicemos las oportunas operaciones elementales. Podemos efectuar las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned} \xrightarrow{2^{a} - 3\text{x}3^{a} \text{ fila}}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 0z &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned} \xrightarrow{1^{a} - 3\text{x}3^{a} \text{ fila}}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 0z &= 3 \\ y + 0z &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned} \xrightarrow{1^{a} + 2\text{x}2^{a} \text{ fila}}$$

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z &= 1 \\ y + 0z &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

El sistema reducido es:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

y la matriz reducida asociada a este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Forma escalonada reducida}$$

Como podemos ver obtenemos el sistema en su forma más reducida posible, con unos en la diagonal principal y ceros en el resto de elementos. La solución se obtiene de forma inmediata. A una matriz como la que hemos obtenido anteriormente la llamamos *forma escalonada reducida*. La columna que tiene un uno en su elemento diagonal y ceros en el resto de los elementos de la columna diremos que tiene un *uno principal*. La matriz anterior del ejemplo tiene tres unos principales.

Establecemos los siguientes criterios para la discusión del sistema en función del número de unos principales de la matriz escalonada reducida:

- Cuando la matriz tiene tantos unos principales como número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. (Existe una única solución.)
- Cuando el número de unos principales es menor que el de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. (Existen infinitas soluciones.)
- Cuando la matriz tiene un uno principal en la última columna, entonces el sistema no tiene solución.

A partir de estos criterios, podemos establecer la discusión del sistema y, a partir de la forma escalonada reducida, podemos obtener la solución del mismo. Hay que volver a insistir en que no hemos utilizado hasta aquí el concepto de determinante ni de rango de una matriz.

Un programa de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para la Ti-82

Si analizamos el programa GAUSS82, que se distribuye con el Link de la Texas 82 con el ordenador, advertimos que el programa exhibe el mensaje de matriz mal condicionada en casos en los que queremos resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones linealmente dependientes. Un sistema de este tipo o es incompatible o es compatible indeterminado, pero no nos parece lo más adecuado hablar de matriz mal condicionada.

Vamos a analizar un programa escrito para la calculadora gráfica Ti-82 que nos proporciona la solución de un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Debemos introducir en el registro de memoria del editor de matrices etiquetado con [A] la matriz ampliada del sistema, es decir, la matriz cuadrada de coeficientes del sistema añadiendo una columna con los términos independientes del sistema. Una vez introducida la matriz en el registro [A], ya podemos ejecutar el programa.

El programa efectúa operaciones elementales sobre las filas hasta llegar a una matriz del tipo escalonada reducida. El programa nos indica si existe solución o no. Una vez ejecutado el mismo, si visualizamos en la calculadora la matriz [A], tendremos la matriz del último paso cuya columna final representa la solución del sistema.

El programa es el siguiente :

Vamos a analizar un programa escrito para la calculadora gráfica Ti-82 que nos proporciona la solución de un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

```
:dim [A] →L6
:L6 (1) →F
:F+1→C
:1→A
:While A<C
:0→P
:0→B
:For(D,A,F,1)
:If abs [A](D,A)>P
:Then
:abs [A](D,A)→P
:D→B
:End
:End
:If B>0
:Then
:If B≠A
:Then
:Disp "CONMUTO",{B,A}
:rowSwap([A],A,B)→[A]
:Pause [A]↓ Frac
:End
:Disp "MULTIPLICO..."
:*row([A](A,A)^-1,[A],A)→[A]
:Pause [A] ↓Frac
:For(D,1,F,1)
:If D≠A
:Then
:Disp "RESTO..."
:*row+(-[A](D,A),[A],A,D)→[A]
:End
:End
:Pause [A] ↓Frac
:End
:A+1→A
:End
:prgmHAYSOLUC
:Disp "EL SISTEMA ES"
:If S=1
:Then
:If B>0
:Then
:Disp "DETERMINADO"
:Else
:Disp "INDETERMINADO"
:End
:Else
:Disp "INCOMPATIBLE"
:End
```

```
Programa HAYSOLUC
:1→S
:For(G,1,F,1)
:0→I
:For(H,1,F,1)
:If [A](G,H) ≠0
:I+1→I
:End
:If I=0 and [A](G,C)→0
:0→S
:End
:Return
```

Comentarios del programa [1]

Lo primero que hacemos es obtener las dimensiones de la matriz. Después, el programa va a ir buscando columna a columna los elementos de mayor valor absoluto, que son los llamados pivotes. Una vez identificado el pivote en cada columna, se realizarán las correspondientes operaciones elementales por filas necesarias para ir construyendo la matriz escalonada reducida final.

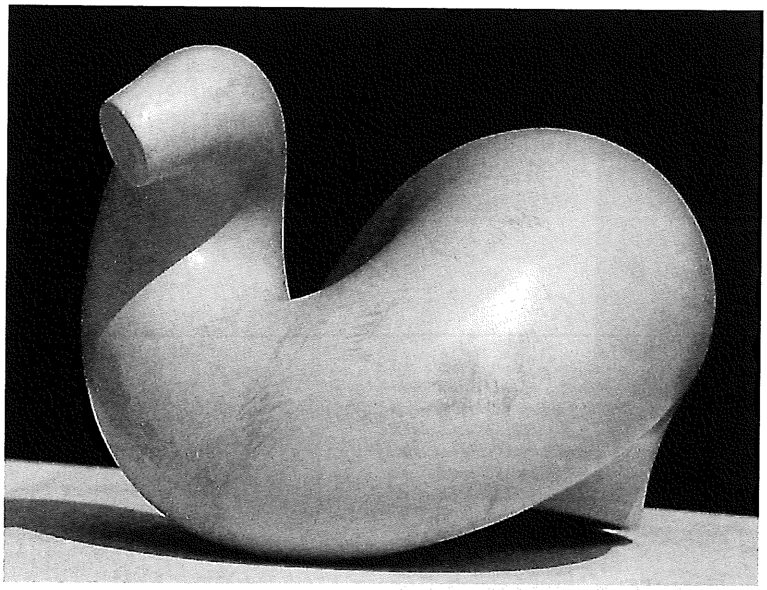
Es decir, inicialmente tomamos la primer columna, A = 1. Ahora, una vez fijada la columna, recorre las filas buscando el elemento con mayor valor absoluto. Si lo encuentra, conmuta las filas; después de este paso, realiza las operaciones elementales (primero multiplicando y luego restando), mediante las instrucciones *row() y *row+(), para conseguir un uno en la posición (1,1) y ceros en el resto de la columna. Posteriormente, pasa al elemento (2,2) de la diagonal, repitiendo el mismo proceso, teniendo en cuenta que la búsqueda del mayor valor absoluto la realiza para los elementos (i,2) con i > 2. Realiza este proceso de forma iterativa hasta llegar a la escalonada reducida. Finalmente, se discute los distintos tipos de solución existentes, a partir de la forma particular de la escalonada reducida.

1 Los autores disponen de la versión en lenguaje C de este programa. Si alguien está interesado en el código, puede contactar con cualquiera de nosotros.

Leandro Tortosa
IES Haygón.
San Vicente de Raspeig
Javier Santacruz
Escuela de Informática
de Alicante

Para obtener la solución una vez ejecutado el programa, visualizamos en pantalla la matriz [A]. Si el sistema es compatible determinado, la solución es el último vector de la matriz. Si el sistema es compatible indeterminado, las incógnitas correspondientes a las columnas que no tengan un uno principal, serán los parámetros dependientes en la solución general.

Para terminar, podemos preguntarnos para qué nos puede servir disponer de este programa o uno similar. Pensamos que los alumnos deben saber resolver sistemas de ecuaciones «a mano», utilizando el método de Gauss tradicional; deben también conocer los peligros numéricos que se esconden en el método, así como posibles alternativas. Pero también pensamos que es interesante disponer de un programa de este tipo para resolver sistemas. ¿Por qué? Porque nos va a permitir no consumir tanto tiempo en cálculos repetitivos y plantearnos «problemas más reales», donde las matrices involucradas en los mismos no serán de orden 3 x 3 o 4 x 4, sino mucho mayores. Es evidente que a mano no podemos resolver un sistema 10 x 10, pero sí con la calculadora y con programas de este tipo. Por lo tanto, nuestro esfuerzo debe ir dirigido también a estudiar este tipo de aplicaciones que requieren resolver sistemas grandes, y no solamente a enseñar destrezas de cálculo de una forma rutinaria y mecánica. Aplicaciones como, por ejemplo, las relacionadas con la teoría de grafos, con las matrices de Markov, los modelos económicos de entrada-salida de Leontief, la criptografía, estudio de poblaciones a lo largo del tiempo, etc. En definitiva, debemos plantearnos enseñar las aplicaciones del álgebra lineal y no sólo las operaciones aritméticas y los cálculos tediosos que el álgebra matricial supone.



El cuerno
Javier Carvajal

SUMA 24
febrero 1997, pp. 47-58

La enseñanza matemática en Alemania*

Christine Keitel
Uwe Gellert

ARTÍCULOS

Este artículo intenta presentar el estado actual y el desarrollo histórico del sistema educativo en Alemania. Como punto esencial vamos a considerar el papel de la enseñanza de las Matemáticas en esos desarrollos.

Antes de explicitar contenidos y métodos de la enseñanza matemática, así como las correspondientes reformas y la formación de profesores de secundaria y maestros, mostraremos el marco institucional de la enseñanza matemática, es decir, la estructura general del sistema educativo en Alemania.

Las instituciones de la Enseñanza

El sistema educativo de Alemania se distingue de los sistemas educativos de la mayoría de los demás estados industriales, especialmente, por dos características:

(1) En el nivel secundario I, que sigue después de la Escuela primaria común para todos, hay tres o cuatro diferentes tipos de escuelas en paralelo.

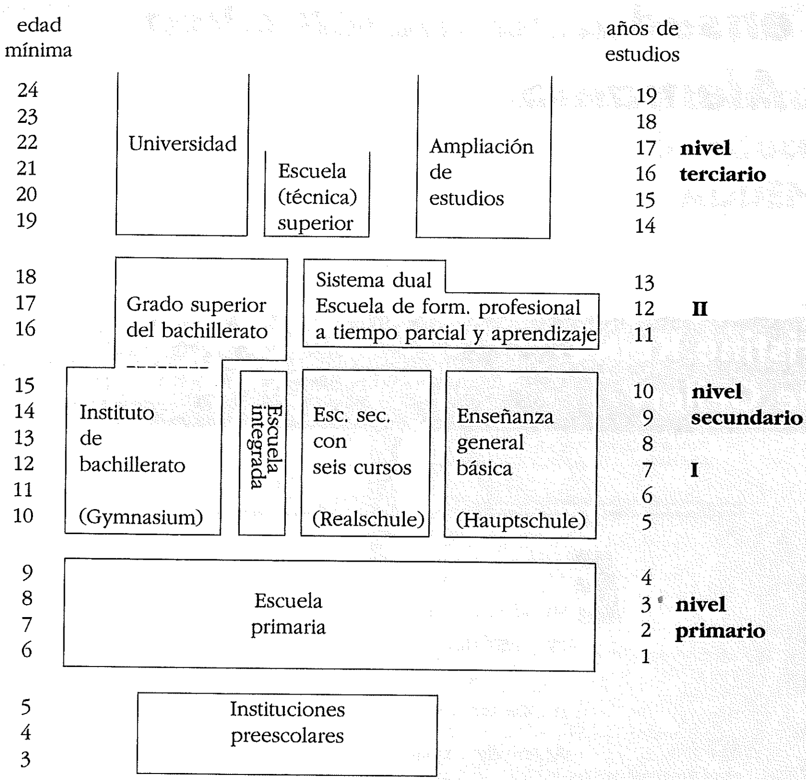
(2) Es muy importante el modo *dual* de la educación profesional que tiene su punto clave en una formación empresarial. A esa formación empresarial se añade como obligación la asistencia a una escuela estatal de formación profesional a tiempo parcial.

Se tiene que añadir que la estructura del sistema educativo representado en el cuadro 1 no muestra el esquema de una organización estatal de la enseñanza en toda Alemania, sino, por así decirlo, el término medio nacional porque:

(3) La estructura federal del Estado alemán reserva la soberanía cultural (*Kulturhoheit*) a cada uno de los 16 Estados confederados (*Länder*). Ese hecho significa

* Por no llegar a tiempo a la redacción de SUMA este artículo no se pudo incluir en el Informe del n.° 23 sobre «La enseñanza de las Matemáticas en Europa», coordinado por Florencio Villarroya.

Dado el interés del mismo, que completa la visión de la enseñanza de las matemáticas en Europa, se incluye en este número.



Cuadro 1: El sistema de Enseñanza en Alemania

que no se organiza la enseñanza centralmente sino multicentralmente. Dos ejemplos: hay unos Länder donde no existen escuelas integradas y, particularmente en Berlín, la disociación de la Secundaria no tiene lugar después de cuatro años, sino de seis años de estudios en la Escuela primaria común para todos los alumnos.

Aun así, en líneas generales, la enseñanza en Alemania presenta cierta homogeneidad. En la mayoría de los casos esa uniformidad se basa en convenios entre los Ministerios de Cultura de los 16 Länder que han establecido un órgano de coordinación: la Conferencia Permanente de los Ministros de Cultura de los Länder (*Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder, KMK*).

La homogeneidad de la enseñanza se explica también por la falta de competencia entre escuelas estatales y privadas:

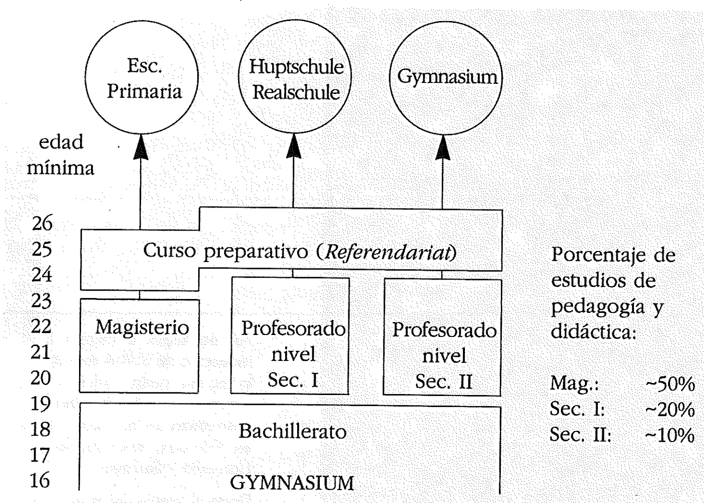
(4) La gran mayoría de los alumnos y estudiantes asiste a instituciones estatales de enseñanza; solamente una pequeña minoría frecuenta escuelas privadas que, principalmente, son de la Iglesia, si bien están subvencionadas por el Estado. La mayoría de las escuelas en Alemania era y es de media jornada.

(5) Al contrario de lo que sucede en la enseñanza escolar, las escuelas superiores y las universidades tienen bastante autonomía respecto a la administración científica.

Así, las universidades alemanas, que en sus concepciones siempre se han sentido comprometidas con la tradición científica del ideal neohumanista de Wilhelm von Humboldt (1767-1835), no están coordinadas ni con una administración educativa centralista ni con una jerarquía de carreras.

Unos datos concretos de la Enseñanza

El año escolar consta de 40 semanas de clases y 12 semanas de vacaciones. Comienza en agosto y termina –interrumpido por las vacaciones de otoño, Navidad, invierno y Pascua– en julio, y va seguido de 6 semanas de vacaciones de verano. En los diferentes Länder y según la edad del alumno, el horario va desde 24 hasta 36 clases de 45 minutos (los domingos quedan libres) en grupos de un promedio de 30 alumnos. Las clases de matemáticas disminuyen desde las cinco de los primeros cursos hasta tres en el décimo año. En los cursos superiores del bachillerato, los alumnos eligen entre cursos de diferentes niveles, de modo que las matemáticas que se enseñan varían entre tres y seis horas cada semana. Desde hace unos 10 años, las clases de matemáticas son obligatorias hasta el final de los estudios.



Cuadro 2:
Estructura de la formación de profesores y maestros en Alemania

Cada tipo de Escuela secundaria concede su propio certificado de fin de estudios. Así se produce como resultado una jerarquía en cuatro niveles de los certificados:

1. Bachillerato (*Abitur*).
2. Fin de estudios de la Escuela secundaria de seis cursos (*Realschulabschluß*).
3. Fin de estudios de la Enseñanza general básica (*Hauptschulabschluß*).
4. Sin terminar los estudios (*Ohne Schulabschluß*).

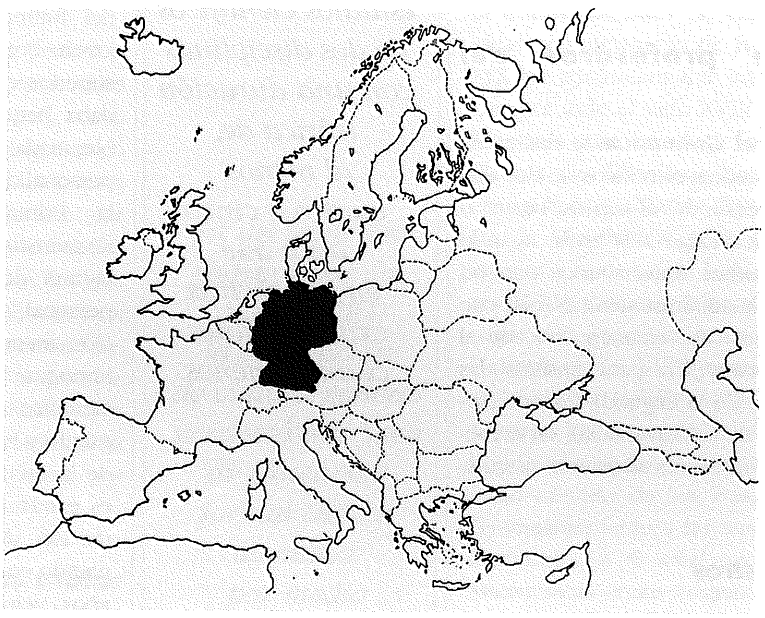
En este sistema, el bachillerato es la condición previa para acceder a la Universidad. Para acceder a las escuelas técnicas superiores basta con un bachillerato con especialización técnica que tiene menor valor que el bachillerato (general). Debido a los *numerus clausus* y a la falta de puestos escolares, hay ciertas asignaturas en las que las universidades eligen a sus futuros estudiantes según sus notas del bachillerato.

La formación de profesores y maestros

La organización y el diseño de la formación tanto de los profesores de secundaria como de los maestros, sin alguna duda, figuran entre las características más importantes del sistema educativo alemán. Las discusiones sobre las reformas actuales de la formación de profesores y maestros, que han tenido lugar durante algunos decenios en la República Federal de Alemania, muchas veces estaban determinadas por la idea de asegurar para la pedagogía más autoridad e influencia. Sin embargo, en una comparación con otros países, parece característica la importancia de la pedagogía científica para la formación de profesores y maestros en Alemania. En consecuencia, en los últimos años, se aumentaron las referencias profesionales de los estudios universitarios para futuros profesores. Pese a ello, a muchos críticos de la formación de profesores y maestros no les basta con la calificación profesional de los futuros enseñantes: una vez que se ha establecido la pedagogía en Alemania en el campo de la formación de profesores y maestros como disciplina académica, se dirigen los esfuerzos hacia una mejora de la formación en esa nueva disciplina.

La estructura de la formación

La organización de la formación de profesores y maestros se basa en peculiaridades profundamente arraigadas en el desarrollo de las instituciones de la enseñanza. Los diferentes modos de la formación para los profesores de secundaria y los maestros (aquí: para el *Gymnasium* y para la Primaria) se aproximaron, si bien no antes de la nivelación de los tipos de escuelas. Las diferencias en la preparación de profesores y maestros se manifiestan significativamente en la cantidad de los estudios de pedagogía. En una resolución del año 1990 de la KMK sobre la formación de profesores y maestros se propone que en los estudios de la carrera de los futuros maestros tenga un peso relativamente mayor la pedagogía, y en los de los futuros profesores del *Gymnasium* mucho menos.



Por un lado, es llamativa la larga duración de la formación de profesores y maestros en Alemania –sobre todo, si se consideran los tiempos efectivos de estudios. Sin embargo, se puede decir que esa duración, que es la misma que en las demás profesiones académicas, beneficia a las pretensiones político-profesionales y económicas de las profesores y maestros. Por otro lado, es una singularidad la organización independiente por la Universidad de una segunda fase de práctica profesional. Esa separación de la formación muestra, por una parte, el predominio de la formación de profesores del *Gymnasium* del siglo XIX como modelo de toda formación; por otra, la distancia entre la pedagogía académica y la práctica escolar, abierta durante los últimos decenios, que legitima y apoya la institucionalización general de una fase particular de introducción profesional.

Entre los elementos más importantes de la primera fase de la formación figura el estudio científico de la disciplina.

Tiene mucha importancia durante la primera fase, casi tanto como en Francia. Allá, como en Alemania, ese hecho refleja la mejora de posición social de los maestros, cuyo acceso a las universidades y escuelas superiores aumentó, en primer lugar, el estudio científico de las disciplinas.

En lo esencial, se distinguen dos modelos básicos en la formación de profesores y maestros que tienen raíces lejanas. Se trata, por un lado, de la formación de profesores del *Gymnasium* cuya tradición tiene su origen en las reformas prusianas de principios del siglo XIX. Como modelo establecido de largo tiempo y al mismo tiempo relacionado con más prestigio y más sueldo, influía fuertemente en el desarrollo de la política de la enseñanza: al mismo tiempo, encauzaba los intentos de equiparar la formación de profesores y maestros como objetivo, y los contrarrestaba como medio de diferenciación de la posición social entre los diferentes tipos de profesores y maestros.

La formación de profesores del Gymnasium

La formación de profesores del *Gymnasium* se realiza en la Universidad, a través de estudios científicos de dos disciplinas con una duración teórica de, al menos, cuatro o cinco años que en la práctica exige seis años, cuando menos. Se terminan los estudios universitarios con un examen estatal realizado por la administración escolar con la cooperación de catedráticos. Ese examen concede al candidato la *autorización científica* para enseñar las correspondientes asignaturas. En la segunda fase de formación, totalmente separada de la Universidad, en escuelas y seminarios, los futuros profesores adquieren la *autorización práctica* para enseñar.

La formación de profesores del Gymnasium se realiza en la Universidad, a través de estudios científicos de dos disciplinas con una duración teórica de, al menos, cuatro o cinco años que en la práctica exige seis años, cuando menos.

La formación de maestros

La pedagogía académica en ese ciclo de estudios para profesor de *Gymnasium* tiene, tradicionalmente, en comparación a los estudios de las disciplinas, un papel inferior. Encontró su lugar propio en la Escuela pedagógica superior (*Pädagogische Hochschule*), fundada en los años veinte y, después de la segunda guerra mundial, extendida a toda Alemania. De allí, se desarrolló el segundo modelo de la formación de enseñantes en Alemania basado en la formación de los *Volksschullehrer* (en denominación actual: de los maestros de la Primaria y los profesores de la Enseñanza general básica). En el siglo XIX, recibían su formación directamente después de terminar su asistencia a la *Volksschule,* como maestros auxiliares, formados paralelamente en los métodos y en la práctica de la enseñanza primaria. Ya a finales del siglo XIX se criticó esa manera de formar maestros porque no correspondía a las exigencias complejas de esa profesión pedagógica. Por eso, la formación en la Escuela pedagógica superior reclamó, en oposición a la orientación práctica de la antigua formación de maestros, una concepción más teórica. Exteriormente, se nota en la exigencia del bachillerato como condición previa para la entrada en la Escuela pedagógica superior.

Pero el aumento de las exigencias se refería menos a los estudios científicos de disciplinas. La función de los tres años de estudios era la adquisición de una competencia profesional relacionada con la compleja tarea educativa de la Escuela. No sólo se concebía esa cualificación con vistas a la disciplina o a la pedagogía sino además como resultado de una actitud personal y fundamental del futuro maestro hacia el hombre joven. Por eso, la Escuela pedagógica superior que conscientemente se fundaba pequeña y socialmente apreciable, tenía la función de desarrollar la personalidad de los estudiantes. Como la Primaria, en comparación al *Gymnasium,* transmitía conocimiento y cultura de gusto menos refinado, su personal docente recibía una calificación menor, la cual se advertía en la importancia relativa de los estudios científicos de disciplinas, así como en el estado y el origen del personal docente de la Escuela pedagógica superior. No es extraño que el desarrollo de la formación de maestros no se quedase parado en esa solución esbozada de los años veinte. Desde el año 1958 se incluye progresivamente la Escuela pedagógica superior en la Universidad. De esa manera, la formación de maestros y profesores para todo tipo de Escuela fue integrada en la Universidad.

La integración de todos los cursos de formación de profesores y maestros en la Universidad trajo consigo que la preparación práctica, que antes era parte de la formación en la Escuela pedagógica superior, se organizase (a excepción de unas fases prácticas de corta duración) fuera de la Universidad. Con el argumento de dar estudios científicos de la disciplina también para los maestros se han descargado los cursos universitarios de formación, de la preparación práctica.

Esa formación en dos fases corresponde a los modelos para médicos y juristas. Con el Examen estatal, que finaliza los estudios universitarios, los futuros profesores y maestros reciben el derecho a realizar el curso preparatorio cuya duración es de (desde el año 1990) dos años. Ese curso contiene actividades prácticas en escuelas, y también un suplemento de una formación pedagógica y didáctica orientada a la práctica escolar, impartido por profesores experimentados del mismo tipo de escuela. Se termina esa fase de formación con el *Segundo examen estatal* que supone la condición previa para el empleo como profesor o maestro, pero no lo garantiza.

Por lo general, el acceso a la profesión de enseñante exige tener, durante unos tres años, un contrato laboral como empleado público antes de ingresar en el funcionariado, es decir en un puesto permanente. Las horas de clase por semana de cada profesor o maestro difieren según el nivel escolar: los que menos, los profesores del *Gymnasium* que tienen que dar clase aproximadamente 24 horas por semana (según los acuerdos específicos de los Länder) y los que más los maestros de la Primaria con, aproximadamente, 27 horas por semana.

Los programas y los métodos de la enseñanza matemática

En Alemania, el siglo XIX se caracterizó por una explosión del conocimiento científico, especialmente por parte de la universidad. Como resultado de ese proceso, la especialización del personal científico de las universidades –por lo que se refiere en concreto a nuestro estudio, dentro del campo de las Matemáticas– y la particular importancia que concedía a las Matemáticas el concepto humboldtiano (es decir, el concepto oficial de la administración) de cultura general, habían propiciado la autonomía de las Matemáticas respecto a las ciencias naturales y a las demás asignaturas.

En un principio (hasta fines del siglo XVIII) la concepción de cultura general se asoció a la idea de educación formal clásica alemana: por medio del desarrollo armonioso y mental del intelecto, de la fantasía y del carácter se crea la personalidad como obra estética.

Cultura general (*Allgemeinbildung*) no quería decir formación para todos, sino formación universal para la futura elite. Dentro del marco de las reformas prusianas de principios del siglo XIX, la cultura general funcionaba como estabilizador del sistema de clases sociales. Sustituyó al criterio del nacimiento como regulador de la jerarquía social, con la ventaja además de contar con la posibilidad administrativa de definir las fronteras entre las clases (Beisenherz, 1979). En un principio (hasta fines del siglo XVIII) la concepción de cultura general se asoció a la idea de educación formal clásica alemana: por medio del desarrollo armonioso y mental del intelecto, de la fantasía y del carácter se crea la personalidad como obra estética. El filósofo Hegel consideraba la cultura de la Antigüedad, especialmente la de la polis griega, paradigma de esa concepción; es decir, que la cultura general es un producto de la conexión de la filología clásica con la filosofía.

La interacción entre las exigencias de la burocracia y las ideas neohumanistas de Humboldt a principios del siglo XIX fue particularmente importante para las Matemáticas. Durante todo el siglo XVIII se habían hecho esfuerzos en Alemania para introducir las Matemáticas en el canon tradicional de disciplinas; pero esos esfuerzos habían sido esporádicos y aislados. La posición social de los profesores de Matemáticas y de Cálculo era significativamente inferior a la de los de Letras. Era normal que los profesores de Matemáticas vivieran de actividades suplementarias o que obtuvieran sus ingresos principales de otros empleos. Hasta fines del XVIII, cuando al amparo de una política racionalista (*Aufklärung*) y del neohumanismo, se intensificaron los esfuerzos estatales dirigidos a la Educación, la posición de las Matemáticas no se consolidó. Se convirtió en uno de los *tres pilares* de la Enseñanza del Gymnasium junto a las lenguas antiguas y las disciplinas históricas. En el ideal neohumanista de formación, las Matemáticas como asignatura desempeñaban un importante papel (Jahnke, 1985).

Desarrollos y reformas de los programas entre 1900 y 1949

La explosión del conocimiento que se había experimentado en el siglo XIX, la autonomía de las Matemáticas y su parcelación en diversas disciplinas relacionadas habían complicado la formación del profesorado, si había que atender a la demanda humboldtiana de cultura general. Para estar al tanto del desarrollo y de la diversificación de las Matemáticas en especialidades, los futuros profesores habían tenido que estudiar cada vez más Matemáticas especializadas. Dado que en las universidades cada vez se hacía menos esfuerzo por ofrecer cursos de ideas generales de Matemáticas, se había producido una crisis en la formación de los profesores de Matemáticas. Lo que había sido posible para los profesores de Matemáticas a principios del siglo

XIX, resultó en adelante imposible: adquirir una visión general de todos los conocimientos matemáticos.

Dándose cuenta de la naturaleza de los contenidos de la enseñanza matemática y de las nuevas necesidades respecto de las exigencias científicas y técnicas de la industria, la crisis en la formación de los profesores resultó evidente y significativa en la práctica de la enseñanza secundaria de los últimos treinta años del siglo XIX. Lo que se tiene que destacar, y que es un hecho curioso, es que no había ninguna iniciativa de modernización por parte de los profesores de la Secundaria. Aunque en el año 1891 se fundó la Asociación para la Promoción de la Enseñanza Matemática y de las Ciencias Naturales (*Förderverein für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht*) que se movilizaba para mantener la importancia de las matemáticas en la enseñanza, los profesores de la secundaria no se interesaban por cambios de los contenidos (Schubring, 1996).

Reformas de los programas a principios del siglo XX

En el vacío de esa crisis de la enseñanza matemática tuvo lugar una conferencia sobre reformas organizada por la Administración alemana. Esa conferencia estuvo dominada, sobre todo, por los representantes de la enseñanza militar. En esa conferencia se proporcionó a las matemáticas por primera vez una función central en el sistema de la enseñanza desde la *Elementarschule* (Escuela elementar) hasta el *Abitur* (bachillerato). Quedó muy claro que las Matemáticas tenían un importantísimo papel en la formación de ingenieros y técnicos así como en la de oficiales. Para actuar con una política de fuerza, el gobierno alemán necesitaba personas bien formadas científicamente respecto a las Matemáticas y las Ciencias naturales.

A ello se añaden las tempranas iniciativas del matemático Felix Klein, con la intención de influir en la enseñanza matemática en todos niveles, desde la Universidad hasta la Primaria, –Felix Klein fue eligido primer Presidente de la Comisión Internacional de la Enseñanza Matemática (CIEM)– producirá en Alemania una notable modernización: los cambios en el campo de la enseñanza, al menos en la enseñanza secundaria, serán profundos y duraderos. Postulaba Felix Klein que era función de todo matemático mediar entre las ciencias teóricas, así como entre las ciencias y la vida moderna. No consideraba a las Matemáticas como producto de períodos singulares de la historia humana, sino como acompañante del desarrollo de la cultura en todos sus escalones: «las Matemáticas están íntimamente ligadas tanto a la cultura griega, como a las exigencias más modernas de la ingeniería» (Otte, 1989). Las Matemáticas se convirtieron en una categoría filosófica. Para cumplir las exigencias epistemológicas de las Matemáticas y para propiciar la creación de un conocimiento metamatemático, Klein desarrolló el concepto de formación universitaria de profesores *Mathematik vom höheren Standpunkte aus* (las Matemáticas de nivel superior). Ese programa intentaba estructurar las Matemáticas de acuerdo con las nociones centrales: función, representación y análisis. Para llegar a una nueva concepción a largo plazo de las Matemáticas y de la cultura general, Klein difundió su concepto de formación de profesores. Ese concepto debía funcionar como moderador entre las exigencias específicas de la ciencia y de la cultura. El programa intentaba estandarizar las Matemáticas sobre el fundamento de unas nociones de base. Al mismo tiempo, esa concepción y reorganización del álgebra, el análisis y la geometría acordes al concepto de función, provocaban una dinamización de las Matemáticas. La dinamización de las Matemáticas condicionaba el consiguiente desarrollo de la investigación matemática y además proporcionaba con garantías un conjunto de teoría y aplicaciones.

Postulaba Felix Klein que era función de todo matemático mediar entre las ciencias teóricas, así como entre las ciencias y la vida moderna. No consideraba a las Matemáticas como producto de períodos singulares de la historia humana, sino como acompañante del desarrollo de la cultura en todos sus escalones...

El final de ese desarrollo a principios del siglo XX lo ponía la adopción oficial, el año 1925 en Prusia, de la introducción de elementos del cálculo diferencial e integral en los cursos superiores. Esa orientación, propuesta por las reformas de Felix Klein, fue y sigue siendo aceptada para toda la comunidad de profesores de Secundaria en Alemania. Se trata, por eso, de un caso muy raro de una reforma eficazmente realizada en la enseñanza.

La Reformpädagogik como método de enseñar

Los desarrollos pedagógicos, antes de la toma del poder por los nacionalsocialistas, se consideran como un movimiento internacional llamado *Reformpädagogik* (pedagogía reformadora). La base de esa pedagogía de innovación la formaban temas como *la imagen nueva del niño, el mundo propio del niño, pedagogía activa por parte del niño, el movimiento de la escuela trabajadora*

(*Arbeitsschulbewegung*) y *comunidades pedagógicas*. El alumno con sus disposiciones individuales, sus intereses y actividades y sus maneras de aprender tenía un papel importantísimo en la discusión pedagógica y didáctica. La *Reformpädagogik*, a principios del siglo XX, no era un movimiento homogéneo, sino que se formaba de una multitud de concepciones individuales, dándose cuenta más tarde de la falta de relación con conceptos políticos generales. Esa *pedagogía basada en el niño* también incluía la enseñanza matemática. Citamos las directivas prusianas del año 1922:

«La elección de los contenidos de la enseñanza está determinada, en primer lugar, por las capacidades y los deseos del crecimiento intelectual de los niños y, en segundo, por la importancia de los contenidos para la vida futura. [...] Siempre se tiene que prestar atención a las conexiones entre el cálculo, sus aplicaciones en otras asignaturas y el mundo de los niños.»

Como resumen de la importancia de la *Reformpädagogik* para la enseñanza moderna, se pueden considerar las proposiciones metódico-didácticas de ese tiempo como las raíces históricas de los dos primeros cursos de la enseñanza matemática (Radatz, 1984).

Las Matemáticas y el nacionalsocialismo

Generalmente, los objetivos de la educación más significativos respecto de la práctica escolar durante los años 1933-1945 eran:

- la ideologización de la enseñanza (el tema central se cambió de las capacidades individuales al cuerpo humano y a los ideales),
- la militarización de la enseñanza (la educación se convertió en adiestramiento),
- la formación del carácter, la promoción de los sentimientos para la nación.

Por eso, en esos años a partir de 1933, se reducía fuertemente la importancia y el valor de las Matemáticas. En particular, en las escuelas de elite de los nacionalsocialistas donde se formaba a los líderes futuros del Partido y del Estado, las Matemáticas tenían un papel insignificante. Como reacción, y para mantener las Matemáticas en el canon de las asignaturas, los didactas de las Matemáticas intentaban aumentar el valor de la educación matemática y de las Ciencias naturales, de manera que entrelazaban las Matemáticas con el conjunto de la vida racista. Felix Klein, por ejemplo, señaló que la concepción natural del espacio era característica destacada de la raza germánica, mientras que las razas latinas y hebreas habían desarrollado más el sentido crítico y lógico. Se intentaban solucionar los problemas del pensamiento científico desde un punto de vista racista. Se concebían diferentes *Denktypen* (tipos de gente pensando) y se categorizaba el *Denktyp* alemán en relación a las matemáticas como utilizador de métodos geométricos y de renunciador de la *aritmetización de las matemáticas*. En la práctica de la enseñanza matemática, los pensamientos nacionalsocialistas y racistas entraban principalmente en los libros de texto en el contexto de las aplicaciones.

La Reformpädagogik, a principios del siglo XX, no era un movimiento homogéneo, sino que se formaba de una multitud de concepciones individuales, dándose cuenta más tarde de la falta de relación con conceptos políticos generales. Esa pedagogía basada en el niño también incluía la enseñanza matemática.

La crítica vehemente de los teóricos nacionalsocialistas de la educación respecto de la orientación de la enseñanza hacia el conocimiento antes del año 1933, no puede disimular que se intentaba evitar la formación de capacidades individuales y de un metaconocimiento, es decir un conocimiento sobre el conocimiento. Particularmente las Matemáticas ponen a disposición métodos para tal metaconocimiento. Otras razones para la reducción de los contenidos matemáticos eran la desestimación del desarrollo matemático y de las ciencias naturales así como el aumento de la importancia de otras asignaturas para la ideología nacionalsocialista de *Blut und Boden* (sangre y tierra). Consecuentemente, en el año 1940, se suprimieron los estudios académicos para profesores y se cortó la correspondiente formación (Radatz, 1984).

Desarrollos y reformas de la política educativa después de la segunda guerra mundial

Raschert (1980) divide la política educativa después de la segunda guerra mundial en Alemania en cuatro fases de desarrollo:

1ª. Fase: 1949 - 1959.
Reconstrucción y restauración de la enseñanza.

2ª. Fase: 1959 -1965.
Período transitorio, crítica y tendencias reformistas.

3ª. Fase: 1965 - 1973.
Reforma y ampliación de la enseñanza (expansión educativa).

4ª. Fase: desde 1973.
Consolidación, conflicto y polarización de la política educativa.

Reorganización del sistema de la enseñanza y primeras recomendaciones con relación a los programas

En la República Federal de Alemania, después de la segunda guerra mundial, se reorganizó el sistema de la enseñanza con referencia al sistema de los años veinte de ese siglo (Damerow, 1977; Keitel, 1980 y 1986; Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 1991). La característica más significativa de ese sistema era la organización de la enseñanza secundaria en tres partes, es decir en tres tipos de escuelas: *Hauptschule, Realschule* y *Gymnasium.* La diferencia tanto cualitativa como cuantitativa respecto al conocimiento que se intentaba enseñar a los alumnos, se muestra ya en los nombres diferentes de la misma disciplina escolar: Aritmética en la *Volksschule* y Matemática en la *Realschule* y en el *Gymnasium.* Ciertos prejuicios que decían que los alumnos *ordinarios* de la *Volksschule* eran incapaces de adquirir un conocimiento más amplio –ni hablar de las Matemáticas– también decían que ese conocimiento limitado satisfacía a los alumnos para sus vidas personales y profesionales, y además les mantenía en su nivel social original.

Hasta el final de los años sesenta, los intentos de reformar la enseñanza matemática se concentraron principalmente en el *Gymnasium.* El problema tradicional de la enseñanza matemática era, además de su carácter, al mismo tiempo reiterativo y aislado, una sobrecarga de los programas. La reforma de Felix Klein del año 1925 intentó reorganizar y reestructurar la disciplina de las matemáticas, pero realmente su aplicación parcial produjo una expansión de los programas. Para suprimir o reducir esa sobrecarga, a partir del año 1955, la KMK empezó a publicar *Recomendaciones e instrucciones para la enseñanza matemática en el Gymnasium.* Eran recomendaciones con la intención de unificar y reducir el canon tradicional de la enseñanza matemática en el *Gymnasium.* También se recomendaba la introducción de unas pocas cuestiones de matemáticas modernas, es decir universitarias, pero solamente en los últimos dos años de las Matemáticas y las Ciencias Naturales del *Gymnasium.* En el año 1958, a estas instrucciones se añadió el *Trutzinger Maturitätskatalog* preparado por representantes de la KMK y por la conferencia de rectores universitarios. Ese *Trutzinger Maturitätskatalog* señaló el regreso a una concepción tradicional de la educación (*Bildung*) al modo cristiano-conservador: a las Matemáticas y a las Ciencias Naturales se les reconocía un valor menor con respecto a la cultura general (*Allgemeinbildung*) y, por eso, se les asignaba un puesto de menor importancia en los programas escolares. Consecuentemente, las convenciones del año 1960 de la KMK sobre la estructura del sistema de enseñanza y la función de disciplinas escolares (*Saarbrücker Rahmenvereinbarungen*) redujeron el contenido y los horarios de Matemáticas y Ciencias naturales en el *Gymnasium.*

En la República Federal de Alemania, después de la segunda guerra mundial, se reorganizó el sistema de la enseñanza con referencia al sistema de los años veinte de ese siglo. La característica más significativa de ese sistema era la organización de la enseñanza secundaria en tres partes, es decir en tres tipos de escuelas: Hauptschule, Realschule *y* Gymnasium.

En los años sesenta, se reformaba profundamente el ciclo superior de la *Volksschule* (Escuela elemental). Hasta hoy, la *Volksschule* –mucho más que el *Gymnasium*– se ha orientado en función de las diferentes tradiciones políticas, religiosas y regionales de los diferentes Länder. En el año 1964 se la reorganizó completamente (*Hamburger Abkommen*), transformando el ciclo superior en *Hauptschule* (Enseñanza general básica). Se concibió la enseñanza de la *Hauptschule* como enseñanza moderna con vistas a la industria y al mundo de trabajo. Para mejorar el estado de la *Hauptschule,* se establecían clases específicas para alumnos de talento (*Förderstufe*). En unos Länder, se prolongaba la estancia escolar por uno o dos años, pero no se aumentaba el programa matemático. De hecho, los años suplementarios servían solamente de profundización del conocimiento de los años anteriores. Con respecto a las Matemáticas, el programa también ponía el acento en la preparación hacia el mundo del trabajo reclamando aplicaciones de la aritmética a diferentes contextos de la vida social y económica.

La economía determina los objetos de la enseñanza matemática

En las reformas de los años setenta, los representantes de la economía tomaron el papel de los militares en las reformas de 1900. La Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) dirigió a sus miembros (sobre todo, a la mayor parte de los países europeos occidentales) hacia reformas de la enseñanza matemática. Explicó sus intenciones en una visión general de directrices para la enseñanza matemática, la *Sinosis para una moderna matemática escolar.* En la introducción de esa sinopsis se dice:

«La tasa de crecimiento más alto motiva una intensificada demanda de personal técnico. Solamente las escuelas pueden formar ese personal especializado. Ya no se entiende cultura como educación del hombre hacia su desarrollo personal, sino que pasa, junto a los gastos tradicionales de trabajo y capital, como factor esencial y crítico de la producción, que en realidad hace posible el crecimiento económico en su deseada extensión. Hay, por fin, algo nuevo y excitante para nosotros, como es una economía planificada de la educación, con la tarea de poner a disposición el potencial de mano de obra (*Human Man Power*), que necesita una economía moderna y de alto nivel. [...] La comisión *Personal científico y técnico* tenía que averiguar cuántos matemáticos, científicos, ingenieros y técnicos se deben formar para aumentar el producto nacional un 50%. Por otro lado, tenía que determinar el conocimiento que hay que transmitir a los jóvenes que será el que necesitarán en el momento en que entren en el mundo moderno del trabajo».

No se puede subordinar de un modo más claro la enseñanza escolar a los intereses de la industria. La clave es: formación y aumento del potencial de los trabajadores.

Las recomendaciones del año 1968: Las Matemáticas para todos

La publicación, el año 1968, de las *Recomendaciones e instrucciones para la modernización de la enseñanza matemática en escuelas primarias y secundarias* de la KMK dio una nueva orientación a la enseñanza matemática y a las ciencias naturales (Damerow, 1977; Howson y otros, 1981; Keitel, 1980). Esa transformación era parte de un movimiento internacional de reformas. El movimiento de reformas para la enseñanza matemática inaugurado por los EE.UU. y Gran Bretaña, en los años cincuenta, se había extendido progresivamente a los demás países occidentales. Esa política activa de reformas se basaba en objetivos generales: aumentar el nivel general de la educación de la mayoría definiendo una formación general con punto esencial en Ciencias naturales y Matemáticas. Se tenía que movilizar el potencial intelectual de toda la nación animando a los alumnos discretos, particularmente a las niñas, a proseguir cursos superiores, y hacer equivalentes los diferentes elementos del sistema escolar, permitiendo el acceso a estudios superiores y a las universidades de cada rama del sistema.

En el año 1970, las resoluciones de la KMK unificaron la formación de profesore y maestros independizándola más del tipo de escuela.

Otro objetivo era la mejora y la evaluación del nivel científico de las matemáticas enseñadas para armonizarlas con el desarrollo de la enseñanza superior y con la investigación matemática.

El punto crucial de la reforma en Alemania era una política que intenta unificar todo el sistema escolar respecto a las asignaturas. La integración de las tres ramas secundarias no era una reestructuración del sistema de tres partes, sino que tomaba por modelo un desarrollo de un programa matemático global –las matemáticas para todos–, común y unificado, y diferenciado con los tipos de escuelas (Keitel, 1987 y 1989). Al mismo tiempo, como plan general, se facilitaba el paso a los cursos superiores de la enseñanza secundaria, llevando consigo un desarrollo del *Gymnasium,* y se prolongaba la escolarización hasta 9 o 10 años según los Länder. En unos Länder, se abrían escuelas experimentales (*Gesamtschulen*-escuelas integradas) con enseñanza secundaria de diferentes niveles.

En el año 1970, las resoluciones de la KMK (*Frankenthaler Beschlüsse*) unificaron la formación de profesores y maestros independizándola más del tipo de escuela (Keitel, 1992). A largo plazo, esa reforma del sistema de la formación transformó más la enseñanza matemática que la reforma de los programas. La introducción de una formación científica para todos, casi siempre a nivel universitario, la obligación de proseguir paralelamente estudios en ciencias de la educación, en ciencias sociales y en psicología, y la complementación de la formación práctica daban a la enseñanza matemática general una nueva base teórica y práctica. Esa reforma funcionó y funciona como revolución tranquila: invisible pero decidida.

Instrucciones oficiales y manuales

Después del año 1970, el interés se dirigía a la redacción de instrucciones y manuales nuevos para la enseñanza matemática en los diferentes Länder de la República Federal de Alemania. Antes, la redacción servía principalmente para ordenar los programas de enseñanza que apenas estaban sistematizados, ni en su estructura ni en la definición del contenido y de los métodos, y que solamente eran especificaciones de cuestiones matemáticas. En sus introducciones se resumieron objetivos y métodos de la enseñanza matemática. Se consideraba suficiente la redacción codificada de cuestiones en la medida en que existía un consenso general, nacido de una tradición de muchos años, sobre la manera de practicar los temas en clase. Además, los manuales tradicionales servían como realización de los programas, estructurando las cuestiones propuestas por los textos oficiales. Debido a su contenido y sus métodos, se consideraban estos manuales como representación –de un modo reducido– del proceso didáctico, que los profesores mismos tenían que enriquecer.

Las decisiones de la KMK del año 1968 han cambiado completamente la función de programas oficiales y manuales: llegaron a ser los instrumentos principales para reformar. Su función nueva era hacer pasar los objetivos de la reforma –tanto los contenidos como los métodos– al campo práctico. Ese proceso de transferencia pasó por etapas: cada Land tuvo que interpretar y traducir las recomendaciones globales de la KMK a programas oficiales para los tipos diferentes de escuelas del sistema escolar en tres partes. Las directivas de la KMK dejaban abiertos muchos problemas básicos, por ejemplo ¿cómo diferenciar un programa global según los tipos de escuelas? ¿En qué consiste una formación matemática de base para todos? ¿Cómo conciliar las tradiciones diferentes de la enseñanza científica y de la enseñanza práctica de las Matemáticas? Toda interpretación de las directivas de la KMK y toda aplicación de las mismas en el campo práctico tenía que producir tensiones entre, por una parte, la tradición didáctica y práctica y, por otra, con las proposiciones reformadoras inspiradas en el extranjero. Las directivas de la KMK ya eran una compilación ecléctica de tradiciones e innovaciones. Ese eclecticismo se convertía en la característica de todo el proceso de reforma.

Hacer la lista estaba lejos de ser suficiente para asegurar el éxito de las reformas. La necesidad de poner en claro y de precisar los planes de innovación reclamaba la redacción de los programas oficiales. Una solución era modificar la forma de los planes y presentar los programas en términos de *objetivos operacionalizados* o de *objetivos de comportamiento*, que se importaba de modelos teóricos estadounidenses del desarrollo curricular. Pero estas listas de objetivos tenía que ser explicada y completada por descripciones de los nuevos contenidos que había que enseñar. Se tenían que presentar los métodos y los procesos de la enseñanza en los manuales para profesores. Así, los nuevos programas oficiales se transformaban en folletos voluminosos.

La reforma se refería al acceso de las Matemáticas modernas que exigía, no solo modernizar, sino también aumentar el nivel de todas matemáticas escolares a partir de la escuela primaria. Esa reorganización tenía que basarse en conceptos de base como el conjunto, la relación y el grupo. Además, la adquisición de estructuras y métodos fundamentales de la ciencia matemática como la axiomatización, la deducción, la lógica formal, la generalización, la abstracción, la formalización y la matematización resultaban los fines y la materia de enseñanza. La utilización general de una lengua formal y rigurosa se hacía símbolo de la reforma: se aplicaban literalmente los conceptos y los términos de la teoría de los conjuntos a las definiciones, teoremas y toda manera de demostrar. La teoría de los conjuntos penetraba hasta la enseñanza primaria.

El paso de las ideas de la reforma a la práctica escolar no estuvo acompañado de una renovación pedagógica. En esta época, no se lanzaba ningún programa pedagógico innovador, ninguna investigación oficial o experimentación pedagógica. El éxito de los nuevos programas dependía principalmente de la difusión comercial de manuales escolares que no podía ser ni organizada ni controlada por la administración. Gracias a una activa propaganda reformadora, los manuales para alumnos contenían menos ejercicios y problemas y más lectura y explicaciones. El objeto no sólo era informar a los profesores sobre las nuevas tendencias didácticas, sino también facilitar el trabajo autónomo de los alumnos. Los editores, esforzándose en adaptarse al mercado y a las exigencias de los profesores, estaban abiertos respecto a las innovaciones: se dirigían a maestros y profesores capaces y bien informados para redactar, en poco tiempo, nuevos manuales según el acceso estricta y rigurosamente científico que era prescrito. De esa manera, ensayaban llevar apoyos para los profesores y los alumnos para modificar su modo de considerar la enseñanza matemática. La elección de los manuales era libre. Los profesores y los alumnos tenían a su disposición una amplia diversidad de obras a las cuales se añadía un abundante material pedagógico. A pesar de todo, las condiciones contradictorias en que se aplicó la reforma y su fin prematuro, llevaban consigo una cierta ambigüedad en la recepción práctica de los nuevos programas.

El paso de las ideas de la reforma a la práctica escolar no estuvo acompañado de una renovación pedagógica.

La aceptación de la reforma burocrática

Se puede caracterizar esa reforma de la enseñanza matemática como reforma burocrática cuyo propósito no se explicó nunca y que no fue acompañado ni de discusiones públicas ni de debates profesionales. Se tomaron las decisiones arriba de la jerarquía, y se tuvieron que poner en marcha sin ninguna preparación. Así, ese proceso administrativo siguió el modelo didáctico que inspiró al contenido de la reforma: a partir de temas interesantes de las matemáticas en nivel universitario y de conceptos *nece-*

sarios o *fundamentales,* se definieron y seleccionaron las cuestiones y los métodos de enseñar en secundaria. Una vez elegidos, lógica y racionalmente los temas matemáticos, se consideró el proceso de *simplificación* y de *elementarización* –es decir la transformación de temas matemáticos en objetos de la enseñanza, no identificado cualitativamente sino estructuramente, quizás enriquecido por una reflexión pedagógica y psicológica– como responsabilidad de la enseñanza y del mismo profesorado matemático.

Paradójicamente, esa situación no era asunto de los matemáticos que, en Alemania, no tenían un papel importante en la reforma. Al contrario de los matemáticos de otros países, la mayoría de ellos consideraba el problema de la modernización así: «cómo enseñar a los niños las cuestiones y los hechos más importantes de las matemáticas de hoy en día». En efecto, se pensaba que la transformación de las Matemáticas en matemáticas escolares se aplicaba a todo el conjunto de los estudios matemáticos. Esa argumentación era, evidentemente, la herencia de concepciones que predominaban en la enseñanza secundaria.

El beneficio social de las Matemáticas (sea explícito o implícito), que era un argumento a favor de la reforma, no contaba, o solamente tenía poca importancia, en ese punto de vista. El concepto de la transposición didáctica no reflejaba de ninguna manera esa preocupación. De acuerdo con su filosofía de base, explícita o implícita, estaba de acuerdo con el prejuicio académico referente a los valores relativos del conocimiento de disciplinas y del conocimiento social. Por eso, se apoyaba en la convicción de que una sólida formación general por conocimientos de disciplinas respondería mejor y de una manera más extensa al conjunto de las necesidades y aplicaciones a la realidad. De este modo, se cuidaban de determinar, precozmente, un estilo profesional de las matemáticas en la enseñanza (aunque solamente una pequeña minoría llegaría a ser matemático profesional). Para la *Hauptschule,* igual que para las nuevas escuelas polivalentes, ese punto de vista llevó más problemas que posibilidades de solucionarlos: el acento puesto por los profesores en la práctica social de las matemáticas exigía criterios de contextualización de las matemáticas, en función de las aplicaciones y las actividades que pasan la frontera de las asignaturas. A esos problemas, la reforma no contestaba.

La Hauptschule que contó con más del 60% de los alumnos en los años sesenta, no escolarizó más que una tercera parte en el año 1988. Se la había transformado progresivamente en una escuela desatendida, pero además con problemas graves de disciplina y con un nivel escolar muy bajo.

Después de la última reforma: revisiones

En el año 1976, la KMK renunció a introducir los conceptos y el idioma de la teoría de los conjuntos en primaria. Esa decisión marcó simbólicamente el fin del período activo de reformas: en lugar de continuar consolidando los pasos reformadores, se decidió volver las espaldas a la modernización. Los programas oficiales anhelaron otra revisión, es decir hacia las tradiciones antiguas y especificándolos para cada nivel. Los editores de los manuales volvieron al modelo tradicional de colecciones de problemas y ejercicios, abandonando los modelos integradores para todo tipo de escuelas. El compromiso de los profesores en favor de la reforma se transformó en rechazo.

El objetivo ambicioso de cubrir el vacío entre las Matemáticas del *Gymnasium* y de la Universidad –que era un objetivo de las matemáticas modernas– se basaba en la introducción de cursillos opcionales de perfeccionamiento en matemáticas. De hecho, en el año 1972, una nueva distribución de las asignaturas de la enseñanza de los últimos dos años del *Gymnasium* otra vez redujo el nivel matemático de la mayoría de los diplomas del *Abitur.* Efectivamente, se establecieron cursos de diferentes niveles, ofreciendo la elección entre un curso de matemáticas de base y un curso de matemáticas especializadas. De esa elección no se daba cuenta en las notas del examen final.

Los verdaderos efectos de ese período de reformas de la enseñanza fueron cambios estructurales y radicales en el sistema secundario en Alemania después de los años sesenta. El desarrollo interno del *Gymnasium,* su expansión del alumnado y la creación de escuelas polivalentes tenían una influencia considerable en el reparto de la población escolar. La *Hauptschule* que contó con más del 60% de los alumnos en los años sesenta, no escolarizó más que una tercera parte en el año 1988. Se la había transformado progresivamente en una escuela desatendida, pero además con problemas graves de disciplina y con un nivel escolar muy bajo. Contrariamente, del año 1966 al año 1988, en la *Realschule* y en el *Gymnasium* aumentó el número de alumnos de 18% y 20% hasta 27% y 30%.

Después de la caída del Muro de Berlín en el año 1989, Alemania experimentó cambios profundos. Alemania se encontró enfrentada con los problemas planteados por la unificación de los sistemas escolares oriental y occidental, particularmente respecto a la enseñanza de las Matemáticas. Ese desafío, del que para decir verdad se subestimó el alcance, implica modificaciones profundas. Se alineó el sistema escolar de los nuevos Länder orientales al sistema occidental, volviendo a un sistema tripartito, que antes se había considerado como anticuado. Además, la enseñanza matemática, que tenía un papel importante en el sistema de Alemania oriental, ha perdido gran parte de su importancia, aunque hoy día, se reclama una matemática para todos. Debido a esas contradicciones, nuevos cambios parecen inevitables.

El sistema de evaluación

El primer examen estatal de la formación de maestros y profesores, realizado por la administración escolar con la cooperación de la Universidad, verifica ejemplarmente el nivel científico del examinado. Además, la segunda fase de la formación sirve principalmente para desarrollar las capacidades prácticas y para transmitir las ideas de Estado, Escuela y Enseñanza. La inspección escolar elige a profesores experimentados como instructores de la segunda fase, de manera que los métodos didácticos canónicos se perpetúan. A ese profesorado formado moderna y científicamente, pero orientado también a la tradición y a la subordinación a los objetivos del Estado, los Ministerios de Cultura, no sólo le pueden conceder una amplia autonomía en la interpretación del currículo y en la elección del material didáctico, sino también en la realización de todos exámenes, incluyendo el bachillerato.

Normalmente, en la Secundaria, los profesores de matemáticas legitiman las notas para los alumnos por los resultados de unos seis *Klassenarbeiten* cada año (evaluaciones escritas de contenidos matemáticos de 45 min. de duración, que nunca se hace como trabajo en equipo) y la colaboración del alumno en clase. Lo que el alumno necesita, para ganar los mejores resultados al fin del año escolar, es una buena cabeza y solamente la capacidad de practicar los algoritmos enseñados. En clase, el profesor y los alumnos muy raramente consideran los métodos y los *valores* de las matemáticas científicas (como argumentar, verificar, demostrar, la abstracción, los modelos); única excepción son los cursos especializados de matemáticas en Secundaria II.

Una vez empleado como funcionario, al profesor no se evalúa más.

Bibliografía

ARBEITSGRUPPE BILDUNGSBERICHT AM MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG (1991): *Das Bildungswesen in der Bundesrepublik Deutschland*, Rowohl, Reinbek bei Hamburg.

BEISENHERZ, H. G. (1979): «Zur gesellschaftlichen Funktion und Entwicklung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung an den Gymnasien und Realschulen im 19. Jahrhundert», en: IDM - *Epistemologische und soziale Probleme der Wissenschafts-entwicklung im frühen 19.* Jahrhundert. Bielefeld, 1-14.

Christine Keitel
Universidad Libre de Berlín
Uwe Gellert
Universidad Libre de Berlín

DAMEROW, P. (1977:) *Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe,* Band 1, Klett-Verlag, Stuttgart.

HOWSON, G., C. KEITEL y J. KILPATRICK (1981): *Curriculum Development in Mathematics*, CUP, Cambridge.

JAHNKE, N. (1985): «Die Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform des frühen 19. Jahrhunderts», *ZDM* 85/1, 14-20.

KEITEL, C. (1980): «Entwicklungen im Mathematikunterricht», en MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG (ed.) *Bildung in der Bundesrepublik Deutschland.* Band 1, Klett-Verlag,, Stuttgart, 447-500.

KEITEL, C. (1986): «Social Needs and Secondary Mathematics Education», *For the Learning of Mathematics,* 6, 3, 27-33.

KEITEL, C. (1987): «What are the Goals of Mathematics for All?», *Journal of Curriculum Studies,* 19, 5, 393-403.

KEITEL, C. (1989): «Mathematics, Education and Technology», *For the Learning of Mathematics*, 9, 1, 7-13.

KEITEL, C. (1992): «Mathematician or Pedagogue?», *The Curriculum,* 3, 3, 291-309.

KEITEL, C. (1996): «Réformes et développements de l'enseignement mathématique en R.F.A. depuis 1950», en BELHOSTE, B. (ed.) *Les sciences au lycée,* Librairie Vuibert, París, 303-310.

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG (1991): *Traditions et transformations*, Économia, París.

OTTE, M. (1989:) «Die Auseinandersetzungen zwischen Mathematik und Technik als Problem der historischen Rolle und des Typus von Wissenschaft», en S. HENSEL (1989): *Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland.*

RADATZ, H. (1984): «Der Mathematikunterricht in der Zeit des Nationalsozialismus», *ZDM,* 16, Heft 6, 199-206.

RASCHERT, J. (1980): «Bildungspolitik im kooperativen Förderalismus. Die Entwicklung der länderübergreifenden Planung und Koordination des Bildungswesen der Bundesrepublik Deutschland», en PROJEKTGRUPPE BILDUNGSBERICHT AM MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG (ed.): *Bildung in der Bundesrepublik Deutschland. Daten und Analysen,* Band 1, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 103-215.

SCHUBRING, G. (1996): «La réforme de l'enseignement des mathématiques en Allemagne dans les années 1900-1914 et son rôle dynamique dans le mouvement international de réforme», en B. BELHOSTE (ed.) *Les sciences au lycée,* Librairie Vuibert, París, 237-248.

SUMA 24
febrero 1997, pp. 59-62

Una visión distinta de un problema clásico

Jorge Fernández Herce
Mercedes González Menorca

IDEAS Y RECURSOS

Pretendemos plantear un problema clásico:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$$

en términos totalmente diferentes, prescindiendo del cálculo diferencial que es en general el modo de abordarlo, y aprovechar toda la intuición del enunciado dentro de un desarrollo sobre relaciones entre razones trigonométricas y arcos, potenciando el concepto de radián, la proporcionalidad y la semejanza.

EL papel de la geometría en nuestros actuales planes de estudio de Enseñanza Secundaria es, en el mejor de los casos, muy deficiente. La mayor parte de esos conocimientos clásicos sobre paralelismo, perpendicularidad, ángulos, triángulos, polígonos,... son totalmente desconocidos para los alumnos que terminan el Bachiller o el COU.

Afirmar que la regla y el compás son elementos fundamentales en el estudio de la trigonometría y la geometría de 3.° de BUP suena ridículo y, lo único importante, son las recetas que nos lleven a soluciones de las que se desconoce totalmente su significado geométrico. Algo tan matemático a lo largo de los siglos, como las construcciones con regla y compás, han sido desterradas de nuestro entorno para pasar a ser meras cuestiones de dibujo técnico sin ningún rigor científico.

El siguiente ejemplo concreto tiene su origen en la primera fase de la XXVI Olimpiada Matemática Española (año 1990). De los ocho problemas que en ella se enunciaban el segundo decía así:

Sean los ángulos α y β tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$; demostrar que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta} \; ; \; \frac{\operatorname{tag}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tag}\beta}{\beta}$$

Ante este ejercicio se plantea el reto de una solución tan intuitiva y clara como su enunciado y, sobre todo, soportando el contenido geométrico que las desigualdades representan.

Parece evidente que la solución más rápida e inmediata al problema no pasa por el aspecto geométrico-intuitivo sino por la aplicación mecánica del cálculo diferencial; en efecto, transformando mínimamente el enunciado, se reduce a demostrar que:

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad \text{es decreciente en} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{\text{tag } x}{x} \quad \text{es creciente en} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Esta es una solución fácil pero carente de intuición y que permite resolver la cuestión sin apreciar su significado geométrico. Por otro lado, es preciso manejar conceptos de cálculo diferencial. El problema queda planteado pues a un nivel de COU.

Pretendemos aquí resolverlo dentro de un desarrollo un poco más global que constituye un ejercicio muy completo sobre la relación entre las razones trigonométricas y el arco de un determinado ángulo, que potencia el concepto de radián, la proporcionalidad, la semejanza de triángulos,..., basándonos en un desarrollo puramente geométrico y, en teoría, permitiendo que alumnos de un nivel de 2.° de BUP sean capaces de abordarlo. Concretamente vamos a presentar sólo la desigualdad de los senos y, tal vez en una próxima entrega, desarrollaremos la de las tangentes que tiene algunas diferencias.

Si bien este ejercicio en ningún caso cabría dentro de la nueva ESO, sí queremos resaltar algunas de las ideas que el DCB de esta etapa ilustra. Estas, por su carácter global y su trasfondo, sirven perfectamente para aplicar en cualquiera de las etapas de la enseñanza.

En cuanto a criterios en la selección de contenidos:

Los problemas pueden abordarse por distintas vías, que admiten varios niveles de solución razonables, permiten que el alumno adquiera una visión de las matemáticas como ciencia abierta y asequible...

Nos acercamos a algunos objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria:

Mostrar actitudes propias de la actividad matemática (exploración de alternativas, tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones, flexibilidad para cambiar de punto de vista, etc.) en situaciones cotidianas o de resolución de problemas.

Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

Elaborar estrategias para la resolución de problemas, utilizando distintos recursos.

Primera etapa

Partimos de nociones geométricas que en este desarrollo damos por conocidas para no alargar la exposición. Además de tener un valor en sí mismas, son una forma lógica de llegar a definir la longitud de la circunferencia y, con ello, obtener π, razonando en términos de polígonos regulares inscritos y circunscritos que se vayan «aproximando» cada vez más hacia la circunferencia.

- En un triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.
- En toda línea poligonal convexa cerrada, un lado cualquiera es menor que la suma de los demás.
- Toda poligonal convexa cerrada que se ubique en el interior de otra, tiene un perímetro menor que el de la que la envuelve.
- El perímetro de todo polígono cerrado que envuelve a una circunferencia, es mayor que el perímetro de todo polígono cerrado convexo interior a dicha circunferencia.

A partir de este momento, considerando polígonos regulares inscritos y circunscritos, y usando la noción de límite, se llega a una definición coherente de longitud de la circunferencia. Evidentemente, el proceso sería el mismo si tratamos de longitud de un arco y no de la circunferencia completa. Y un resultado que se deduce de los anteriores será:

{A.1} Dado un arco de circunferencia, toda línea poligonal convexa, con los mismos extremos, que lo envuelva, es mayor que dicho arco.

{A.2} Dado un arco de circunferencia, toda línea poligonal convexa con los mismos extremos, que sea envuelta por él, es menor que el arco.

Pretendemos aquí resolverlo dentro de un desarrollo un poco más global que constituye un ejercicio muy completo sobre la relación entre las razones trigonométricas y el arco de un determinado ángulo, que potencia el concepto de radián, la proporcionalidad, la semejanza de triángulos,...

Segunda etapa

Para ver hasta qué punto la geometría, por elemental que sea, está desterrada de nuestra enseñanza media, planteamos junto con el ejercicio citado inicial una cuestión mucho más sencilla en sí misma pero que resulta clave en el enfoque gráfico de nuestro desarrollo.

Demostrar:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x > \text{sen } x$$

El planteamiento más habitual de este problema en nuestra enseñanza actual sería:

Considerando la función $f(x) = x - \operatorname{sen} x$, como es continua en $[0, \pi/2]$ y $f(0) = 0$, si demostramos que es creciente en $(0, \pi/2)$, estará demostrado.

Basta derivar $f(x)$:

$f'(x) = 1 - \cos x > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Esta respuesta sitúa el ejercicio a nivel de COU.

La solución más próxima a la intuición pasa sin duda por la figura 1. En ella α es un ángulo expresado en radianes del primer cuadrante. La aplicación de la semejanza de triángulos y la proporcionalidad entre ángulo en radianes y arco[1]:

arco = radio x ángulo en radianes

permite suponer sin ninguna restricción que el radio de la circunferencia es igual a la unidad y con ello:

El problema consiste en demostrar que la longitud del arco (AB) es mayor que la del segmento BP.

Hay quien, enfocando de este modo la solución, daría ésta por evidente sin considerar que no lo es tanto, bastaría que la desigualdad fuera con la tangente para verlo más difícil:

$$\operatorname{tag} \alpha > \alpha \text{ con } 0 < \alpha < \pi/2$$ [2]

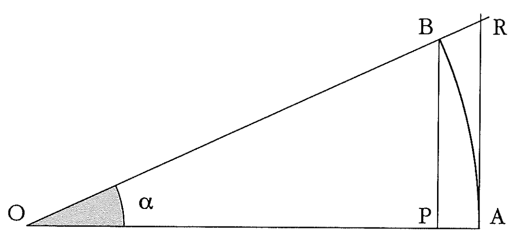


Figura 1

Concretamente un estudio detallado de tal afirmación lleva a la noción de límite y la obtención de π. Esto es precisamente lo que hemos querido fijar con la *Primera Etapa* y basándonos en los resultados {A.1} y {A.2} que allí se enunciaron:

Basta mirar a la figura 2 y queda demostrado que, al ser BC una línea poligonal convexa con los mismos extremos que el arco (BC) se tiene por {A.2} que en términos de longitudes:

$$2\operatorname{sen} \alpha = |BC| < \text{arco (BC)} = 2\alpha$$

y entonces:

$$\operatorname{sen} \alpha < \alpha \text{ si } 0 < \alpha < \pi/2$$

Esto demuestra lo que buscamos.

1 En este caso, razonar en términos de proporcionalidad entre el valor del ángulo en radianes y el área del sector circular sería más sencillo de ver, pero elegimos el método del razonamiento mediante longitudes porque se ajusta mejor a la idea central del desarrollo.

2 La evidencia, mirando a la figura 1, no es tan clara, pues podría suceder que al «rectificar» el arco de circunferencia superase al valor de la tangente que obviamente es |AR|.

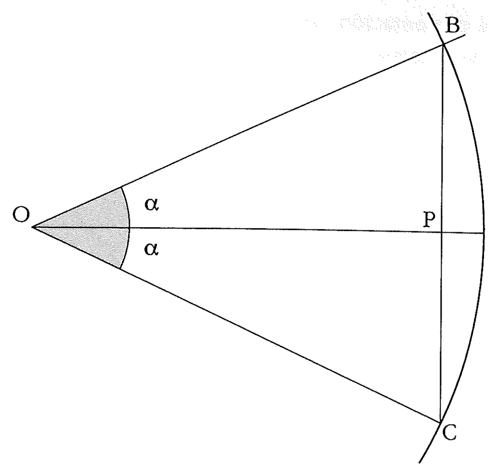


Figura 2

Tercera etapa

Abordamos ahora nuestro objetivo central:

Sean los ángulos α y β tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$; demostrar que:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}$$

Vamos a dar nuestra solución siguiendo la pauta de las relaciones entre longitud de arco y longitud de segmentos. Observemos que si fuésemos capaces de rectificar los arcos en sendos segmentos, las desigualdades se pueden entender geométricamente como una relación de semejanza. No se trata exactamente de la rectificación, pero sí de llegar a una «posición de Thales» entre seno y arco.

Partimos de un dibujo como el de la figura 3 en el cual supondremos que la circunferencia tiene radio 1 y, por tanto:

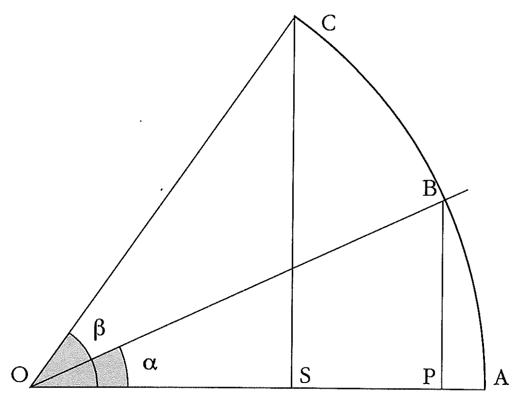


Figura 3

$$|OA| = |OB| = |OC| = 1$$

En estas condiciones:

$$\operatorname{sen} \alpha = |BP| \qquad \operatorname{sen} \beta = |CS|$$

Con la presentación de la figura 3 no parece haber «posición de Thales» aparente, sin embargo, «arrastrando el ángulo β» de modo que |CS| = |C'S'| y con ello

arco (CA) = arco (C'A').

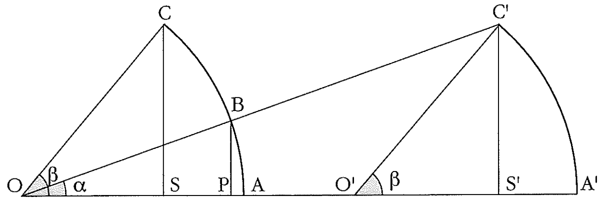


Figura 4

Sin perder de vista el origen de nuestro dibujo, eliminemos las partes accesorias de la figura 4 y limitémonos únicamente a la parte del gráfico que nos interesa. Así construimos la figura 5 en la que se aprecia lo que llamamos «posición de Thales» entre los arcos (BA) y (C'A') y los segmentos |BP| y |C'S'|.

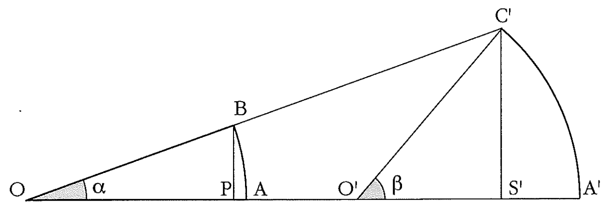


Figura 5

Por último, completemos el dibujo trazando la circunferencia de centro O y radio |OC'|:

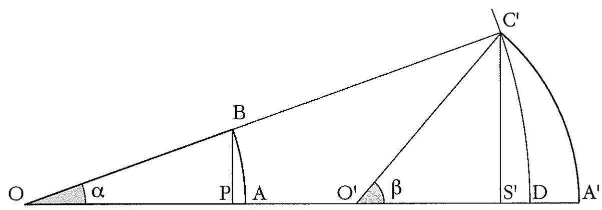


Figura 6

De esta figura se obtienen las conclusiones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \times |OB| = \alpha \times 1 = \text{arco (BA)} \\ \alpha \times |OC'| = \text{arco (C'D)}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|OC'|}{|OB|} = \frac{\text{arco (C'D)}}{\text{arco (BA)}} \quad [1]$$

Y por simple proporcionalidad

$$\frac{|OC'|}{|OB|} = \frac{|C'S'|}{|BP|} \quad [2]$$

De [1] y [2] se sigue:

$$\frac{|C'S'|}{|BP|} = \frac{\text{arco (C'D)}}{\text{arco (BA)}} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\text{arco (C'D)}}{\alpha} \quad [3]$$

Este resultado es prácticamente el que buscamos con sólo demostrar que

β > arco (C'D).

Sabemos que β = arco (C'A'), luego todo se resume a probar que:

arco (C'A') > arco (C'D)

Para ello, construyamos la figura auxiliar siguiente:

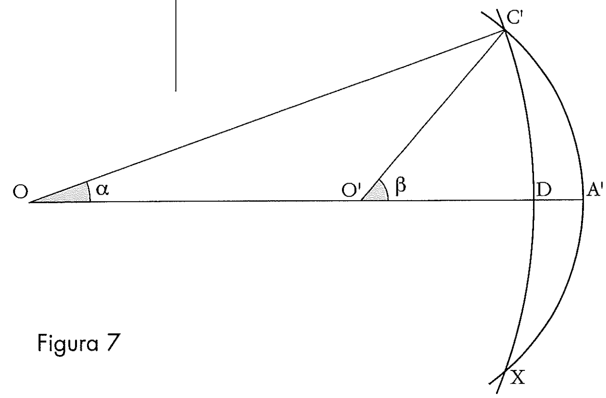


Figura 7

En ella se ve claramente que podemos dibujar una línea poligonal convexa que contenga al arco (C'DX) y esté contenida en el arco (C'A'X). Viendo las conclusiones {A.1} y {A.2} de la *Primera etapa*, queda demostrado que:

arco (C'A'X) > arco (C'DX)

Y es evidente que

arco (C'A'X) = 2 x arco (C'A') = 2 x β

arco (C'DX) = 2 x arco (C'D)

De donde se sigue inmediatamente que

β > arco (C'D)

Como conclusión, sustituyendo en [3]:

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}$$

Jorge Fernández
Mercedes González
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton

Bibliografía

GUZMÁN, M. (1976): *Mirar y Ver*, Alhambra, Madrid.

FIOL, M. L. y J. M. FORTUNY (1990): *Proporcionalidad Directa. La forma y el número*, Síntesis, Madrid.

GARCIA ARENAS, J. y C. BERTRAN I INFANTE (1978): *Geometría y Experiencias*, Alhambra, Madrid.

GRUPO BETA (1990): *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*, Síntesis, Madrid.

KÜRSCHAK, J. (1963): *Hungarian Problem Book*, Vol. 2, Random House, New York.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Ejemplificaciones*, MEC, Madrid.

ROANES MACÍAS, E. (1987): *Introducción a la Geometría*, Anaya, Madrid.

Geometría. Curso Superior (1978): Bruño, Madrid.

SUMA 24
febrero 1997, pp. 63-66

La medida de distancia en Barcelona

K. E. Hirst

IDEAS Y RECURSOS

En este trabajo se define una distancia entre dos puntos de la ciudad de Barcelona, considerando que las calles forman un enrejado de vías paralelas y perpendiculares y que además existe la avenida *Diagonal* que las atraviesa. Finalmente, el autor pregunta cómo se podría definir la distancia si hubiese dos avenidas diagonales en una ciudad.

BARCELONA es una ciudad muy bonita. Muchas de las calles están en forma de reja rectangular, así como Manhattan (Nueva York) o en partes de Lisboa. Pero en Barcelona existe una calle que se llama la *Diagonal* (*Avingunda Diagonal* en catalán) (ver figura 1).

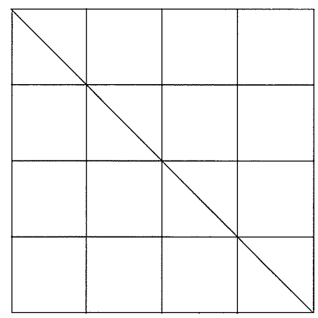


Figura 1

Sin la *Diagonal* la fórmula para la distancia entre dos puntos es muy fácil:

$$d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

Esta fórmula define una métrica para el plano (*Manhattan metric*).

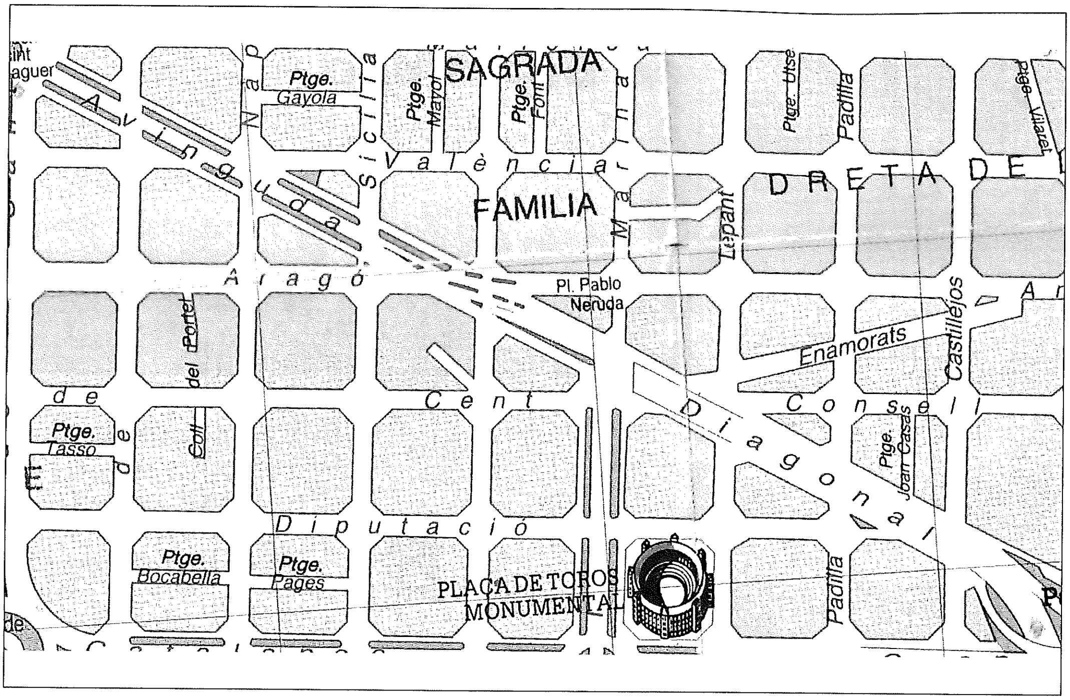
¿Pero cuál es la fórmula para la distancia entre dos puntos con la *Diagonal*?

Usamos coordenadas cartesianas y suponemos que la *Diagonal* tiene ecuación y = –x. La fórmula para la distancia d(A, B) depende de A y B. Hay varios casos.

Suponemos que $y_A \geq y_B$. Si A, B forman un segmento horizontal o vertical,

$$d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

(Si AB es horizontal, $y_A - y_B = 0$, y si AB vertical $x_A - x_B = 0$.)



Plano parcial de Barcelona

Si A, B son las esquinas noreste y sudoeste de un rectángulo,

$$d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

sin reparar si la *Diagonal* atraviesa el rectángulo, como en la figura 2.

Tenemos la misma fórmula si A, B son las esquinas noroeste y sudeste de un rectángulo que no esté atravesado por la *Diagonal*.

Pero si la *Diagonal* atraviesa este rectángulo la fórmula para la distancia es diferente. Por ejemplo, en la figura 3,

$$A = (-2, 0);\ B = (1, -2);$$

$$|x_A - x_B| + |y_A - y_B| = 5,$$

pero

$$d(A,B) = AO + OC + CB = 2 + \sqrt{2} + 1 < 5$$

No es posible descubrir una fórmula única para d(A, B) en estos casos, porque depende de la posición del rectángulo relacionado con la *Diagonal*. Podemos dibujar varias figuras. Algunas se ven en la figura 4.

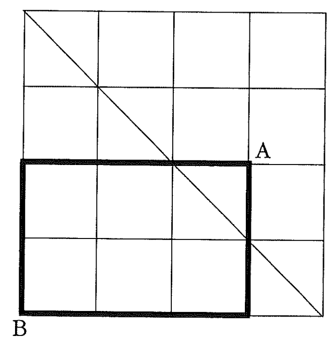


Figura 2

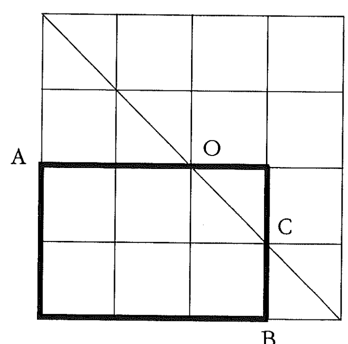


Figura 3

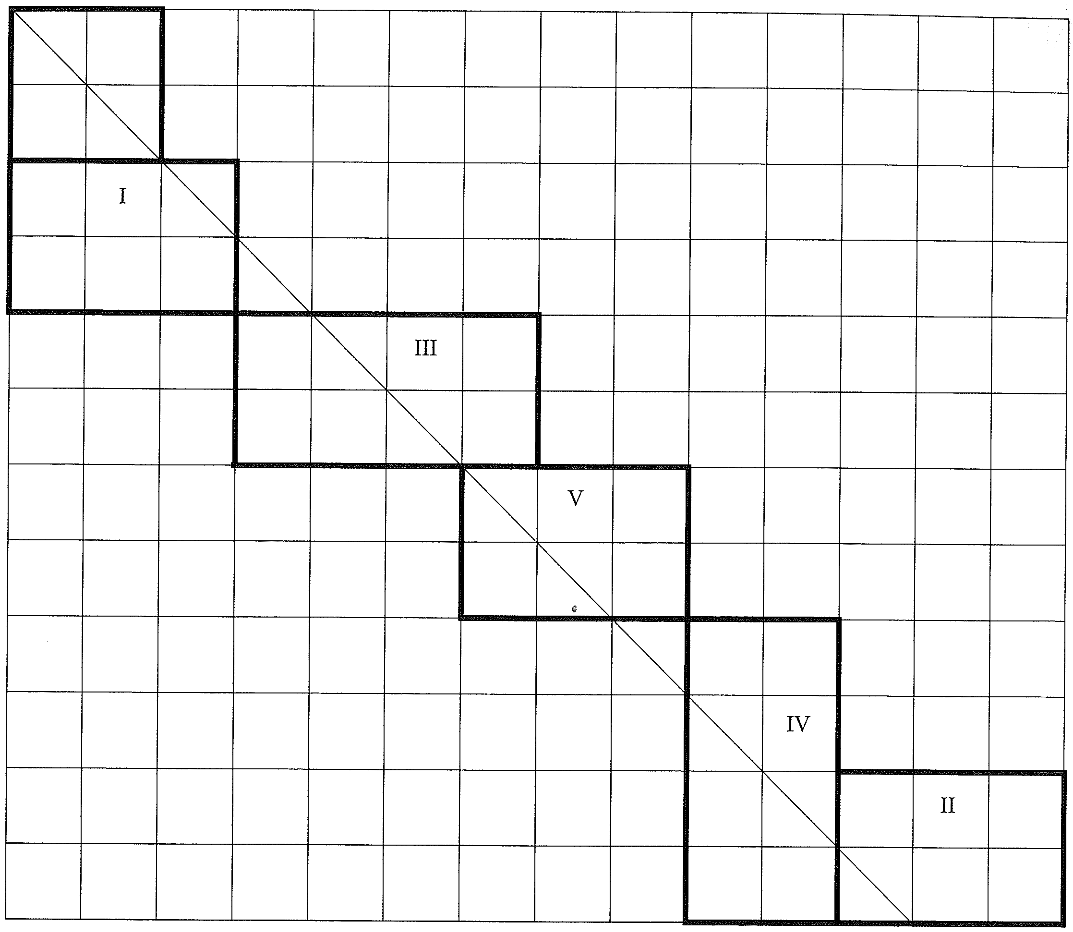


Figura 4

Cuando evaluamos las fórmulas para todos los casos descubrimos cuatro situaciones:

1. La *Diagonal* atraviesa una esquina del rectángulo, como I (figura 4); tanto A como B están por debajo de la *Diagonal*. En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |x_B + y_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

2. La *Diagonal* atraviesa una esquina del rectángulo, como II (figura 4); tanto A como B están por encima de la *Diagonal*. En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |x_A + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

3. La *Diagonal* atraviesa los dos lados del rectángulo paralelos al eje de abscisas, como III (figura 4). En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |y_B - y_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

4. La *Diagonal* atraviesa los dos lados del rectángulo paralelos al eje de ordenadas, como IV (figura 4). En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |x_B - x_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

Si una esquina del rectángulo está sobre la *Diagonal* se tienen las mismas fórmulas. Por ejemplo, en el caso 2, con un rectángulo como V (figura 4):

$$d(A,B) = |x_A + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B| = |x_A + y_A| + |x_A + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

porque $x_A + y_A = 0$

La prueba de que estas fórmulas definen una métrica es pesada, ya que hay muchos casos. La propiedad más complicada es la desigualdad triangular, las otras propiedades resultan más sencillas. Evidentemente:

a) $d(A, B) \geq 0$

b) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

c) $d(A, B) = d(B, A)$.

Por ejemplo, la propiedad b) en el caso 2.

$$d(A,B)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_A + y_A = 0 \\ x_A + y_B = 0 \\ x_B + y_B = 0 \end{cases}$$

Por sustracción: $y_A = y_B$; $x_A = x_B$.

Como ejemplo, veamos la demostración de un caso de la desigualdad triangular. Consideremos en la figura 5 los dos rectángulos como I y III extraídos de la figura 4.

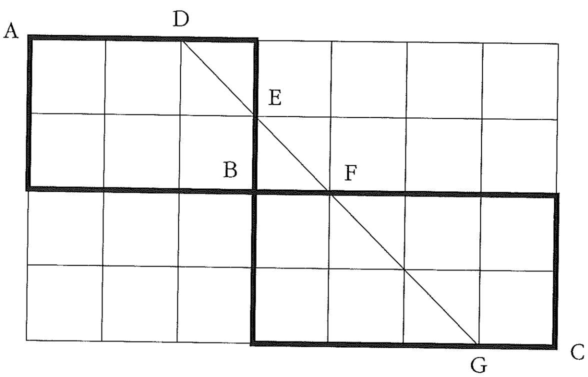


Figura 5

$$d(A,B) = AD + DE + EB = |x_A + y_A| + |x_B + y_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

$$d(B,C) = BF + FG + GC = |x_B + y_B| + |y_C - y_B|\sqrt{2} + |x_C + y_C|$$

$$d(A,C) = AD + DG + GC = |x_A + y_A| + |y_A - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C|$$

Es posible pensar en la desigualdad $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ en dos modos. En la figura 5:

$d(A, C) = AD + DG + GC$

$= AD + DE + EF + FG + GC$

$< AD + DE + EB + BF + FG + GC$

$= d(A, B) + d(B, C)$

Usando la igualdad:

$y_A - y_C = y_A + x_B - x_B - y_B + y_B - y_C$

se tiene:

$$|y_A - y_C|\sqrt{2} \leq |y_A + x_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|\sqrt{2} + |y_B - y_C|\sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(A,C) &= |x_A + y_A| + |y_A - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C| \\ &\leq |x_A + y_A| + |y_A + x_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|\sqrt{2} + |y_B - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C| \\ &< |x_A + y_A| + |y_A + x_B|\sqrt{2} + 2|x_B + y_B| + |y_B - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C| \\ &= \left(|x_A + y_A| + |x_B + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|\right) + \\ &+ \left(|x_B + y_B| + |y_C - y_B|\sqrt{2} + |x_C + y_C|\right) \\ &= d(A,B) + d(B,C) \end{aligned}$$

Los otros casos se pueden comprobar utilizando el mismo método.

¿Conocen ustedes una ciudad que contenga dos calles como la *Avenida Diagonal*?

¿Cuáles serían las fórmulas para la distancia en tal ciudad?

¡Una investigación interesante!

K. E. Hirst
Department of Mathematics
University of Southampton
United Kingdom

SUMA 24
febrero 1997, pp. 67-75

La transversalidad y los valores en las Matemáticas de la ESO

Antonio Bermejo Fuertes

ARTÍCULOS

> Siempre, el profesor transmite al alumnado una forma de entender la vida, de ver la realidad, y esos son valores. En el aula se hace algo más que impartir conocimientos científicos y didácticos: es inevitable que el docente apruebe un modelo de conductas y desapruebe otros, aunque no haga juicios de valor de una forma explícita. Y, por ello, los alumnos perciben y aprenden valores, a veces, de forma un tanto incontrolada y tal vez contradictoria, lo que se conoce como «currículo oculto».
> En consecuencia, es de gran interés que los equipos de profesores de cada centro, nos pongamos de acuerdo sobre los valores que deseamos transmitir a nuestros alumnos. De lo contrario, harán acopio de aquellos que florecen a su alrededor, y muchos de éstos no son precisamente éticos.

LA preocupación por los valores es algo común a los sistemas educativos de nuestro entorno. En nuestro país, la introducción explícita, en el nuevo sistema educativo, de contenidos que hacen referencia a valores, actitudes y normas en cada una de las áreas y, posteriormente, la propuesta de los siete temas transversales nos indica la gran importancia que dedica a este tema el proyecto curricular que emana de la LOGSE.

La escuela actual está marcada por dos tipos de condicionantes ante los cuales no puede permanecer impasible. Por un lado, la evolución constante de la sociedad, con un mayor pluralismo y diversidad y, por otro, cambios en nuestros alumnos, motivados por distintas formas de comportarse ante los conflictos sociales: la violencia, las discriminaciones y las desigualdades, el consumismo, la degradación del medio ambiente...

Ante esto la escuela no puede permanecer impasible, ha de buscar un equilibrio entre la «E» de enseñar y la «E» de educar. Así, además de preparar científicamente a sus alumnos ha de fomentar la dimensión ética, tomando el compromiso de unir ciencia y humanismo. En la LOGSE se nos dice que la educación debe facilitar que los alumnos lleguen a entender los problemas del mundo actual y a elaborar un juicio crítico respecto a ellos, siendo capaces de adoptar actitudes y comportamientos basados en valores racional y libremente asumidos. En este sentido estamos hablando del *para qué de la educación*, no sólo se nos indican aquellos contenidos educativos que se consideran necesarios, sino que, además, se dan orientaciones sobre el sentido que es preciso darles.

Ahora bien, de cara a los centros no es suficiente con contemplar la inclusión de este tipo de contenidos en el currículo, el problema es: ¿cómo contemplarlos en la programación?, ¿cómo tratarlos en el aula?

La falta de una tradición asentada en este campo puede suponernos distintas dificultades:

1. *De definición:* los claustros de profesores deben ponerse de acuerdo sobre lo que entendemos por formación ética del individuo. En este sentido habrá que avanzar en un proyecto compartido y definir qué valores básicos se quieren potenciar y qué contravalores deben ser erradicados, y no sólo en cuanto a su formulación, sino, fundamentalmente, en cuanto a las actitudes concretas que se derivan de ambos.
2. *De programación:* resuelto el problema anterior, tendríamos que decidir cómo prever tratarlos adecuadamente en nuestro centro y en cada una de nuestras áreas.
3. *De secuenciación:* o lo que es lo mismo, responder a las preguntas ¿en qué momentos?, ¿con qué gradación?, lo vamos a trabajar.
4. Y finalmente *de evaluación:* cómo valorar la eficacia, los resultados de la empresa que hemos acometido.

En este sentido, existe un conflicto entre nuestra formación inicial y la labor posterior que como docentes tenemos que desarrollar. Así, al plantearnos que hay que evaluar actitudes, la traducción que hacemos de esto es: ¿cómo calificarlas?, ¿cómo reflejarlas en una nota? Es decir, no nos damos cuenta de que lo verdaderamente importante es intentar cambiar actitudes en nuestros alumnos y que no lo es tanto conseguir plasmarlas en una nota. Nos olvidamos así que el fin primordial es ser capaces de propiciar un sistema de valores que, asumidos libremente, nos permitan definir con claridad los objetivos de nuestras vidas, ayudarnos a aceptarnos tal y como somos, al mismo tiempo que nos puedan hacer comprender y estimar a los demás.

El modo de «asumir» los valores es mediante una interiorización adecuada. No basta con teorías, es preciso hacer prácticas, y la mejor forma de llevar a buen puerto las prácticas es creando hábitos. Lo importante es que los valores se conviertan en ideales, indicadores del camino a seguir. De este modo, nos permitirán encontrar mayor sentido a lo que hacemos, tomar las decisiones oportunas, responsabilizarnos de nuestros actos y ser capaces de aceptar sus consecuencias. Para Lucini (1993) «los valores no son realidades que se adquieren como algo autoritariamente impuesto u ordenado, sino que son un cúmulo de deberes y obligaciones autoimpuestas y queridas por la propia voluntad».

Los centros escolares son lugares muy adecuados para desarrollar esta labor, ya que ofrecen más contrastes que la vida familiar, que suele ser mucho más homogénea. En la escuela pueden encontrarse situaciones muy diversas que den pie a transmitir dichos valores a través de guías y pautas que marquen las directrices de conductas adecuadas. Además, los alumnos copian mucho de lo que ven, por lo que es fundamental la forma de comportarse de quienes para ellos constituimos un referente: los profesores. De ahí, la importancia de crear ambientes ejemplares en nuestros centros.

...los alumnos copian mucho de lo que ven, por lo que es fundamental la forma de comportarse de quienes para ellos constituimos un referente: los profesores. De ahí, la importancia de crear ambientes ejemplares en nuestros centros.

En el trabajo con los alumnos hay que dar tres pasos:

1.°) De descubrimiento de la dimensión ética.

2.°) De experimentación.

3.°) De integración (compromiso de una elección).

El primer paso, y antes de hablar de valores en cada área, será centrar la importancia de la etapa y, por lo tanto, del centro, como referente primero de las decisiones que se han de tomar en todo tipo de aspectos curriculares y, en particular, en el tema de valores. Este planteamiento previo en el nivel de la etapa es prioritario, puesto que no hay que olvidar que en la elaboración de la programación curricular los objetivos generales son el elemento básico en el que se concretan las intenciones o finalidades educativas que se pretende alcanzar con los alumnos y que deben ser, por lo tanto, el referente principal para el profesorado de toda la etapa, a la hora de planificar su práctica en el aula.

Estos objetivos hacen referencia a *capacidades para educar y para desarrollar*, y entre ellas, destacan, en concreto, las *capacidades éticas*, que intervienen, junto con las demás, en el desarrollo de la personalidad del alumnado. Pero, además, hay un O.G.E. (Objetivo General de Etapa), el «h» (véase artículo 19 de la LOGSE) que está en relación con el factor ético-moral antes aludido y que, por lo tanto, nos habla de la importancia de que los alumnos desarrollen un sistema de valores.

Al mismo tiempo los T.T. (Temas Transversales) hacen referencia a los problemas y a los conflictos, de gran trascendencia, que se producen en la época actual, y frente a los que es preciso una toma de posición personal y colectiva. Los alumnos han de elaborar, ante ellos, sus propios juicios críticos, y adoptar posturas comprometidas en su solución.

De esta forma, se puede encontrar una interrelación entre los O.G.E. y los T.T., de forma que cuando se está tratando los primeros se está aludiendo también a los problemas que encierran los T.T. y, al contrario, al trabajar los T.T. estamos fijándonos metas para avanzar en el desarrollo de los O.G.E. Así, ambos apartados, objetivos y problemas sociales, están perfectamente relacionados y, a partir de ellos, cada centro debe obtener un sistema de valores básicos, que una vez consensuado por toda la comunidad educativa a través del Proyecto Educativo de Centro, ha de llevarse, en primer lugar, al Proyecto Curricular del Centro y, posteriormente, a las áreas a través de los Proyectos Curriculares de Etapa y Area.

Para Lucini (1993) un buen sistema de valores básico puede ser el constituido por:

1. Justicia/Solidaridad.
2. Libertad.
3. Igualdad.
4. Tolerancia/Respeto.
5. Vida.
6. Paz.
7. Salud.
8. Responsabilidad.

Cuadro 1

Deducido el conjunto de V.B. (Valores Básicos) que deseamos tratar en nuestro centro, tendremos que manifestarnos sobre qué perseguimos y qué queremos alcanzar con cada uno de ellos. Es decir, qué *objetivos o actitudes* pretendemos que, trabajados por todos los profesores del centro, influyan en la modificación de conductas o formas de comportarse de nuestros alumnos.

A modo de ejemplo, he aquí algunos objetivos o actitudes que un centro podría decidir impulsar para perseguir el valor básico n.° 1: Justicia/Solidaridad.

a) Rechazar situaciones en las que se produzcan actitudes sexistas o discriminatorias, evitando todo tipo de marginación.
b) Ser sensibles y solidarios con las personas con salud física o psíquica deteriorada.
c) Colaborar en el trabajo escolar con los demás compañeros, teniendo una actitud solidaria con aquellos que nos necesiten.
d) Ser solidarios y comprensivos ante los problemas y necesidades de los demás.

Cuadro 2

Deducido el conjunto de valores básicos que deseamos tratar en nuestro centro, tendremos que manifestarnos sobre qué perseguimos y qué queremos alcanzar con cada uno de ellos.

Se trata, por tanto, de traducir los valores proyectados en el centro, en actitudes concretas en las que se han de educar a nuestros alumnos a lo largo de su actividad escolar. Ahora bien, si después no somos capaces de hacer una concreción en las áreas, éste sería un problema que puede verse agravado al realizar la secuenciación de contenidos y programaciones de aula. Por ejemplo, ¿seremos capaces de *ser solidarios y comprensivos ante los problemas y necesidades de los demás* si esto no está contemplado en nuestros objetivos generales de área?

Este aspecto puede solventarse si tenemos en cuenta una de las premisas del diseño curricular «Debemos orientarnos siempre por los objetivos generales de la etapa y no por los del área». Sin embargo, cuando estamos programando ¿tenemos en cuenta esas premisas?, y si es así, ¿será suficiente su inclusión para que los valores y actitudes se desarrollen en las programaciones? Obviamente no, ya que se trata de un problema de asunción por parte del profesor; que éste vea y sienta la necesidad de hacer este trabajo con sus alumnos. Por eso hablábamos antes de los cuatro problemas que tendríamos que solucionar en los diferentes ámbitos de claustro, etapa, ciclo, seminario o departamento: definición, programación, secuenciación y evaluación.

Supuesto pues que el tema no se puede abordar individualmente por cada profesor en el área, sino que es preciso consensuarlo en el centro y en la etapa, partimos del conjunto de actitudes que deseamos tratar en nuestro centro, las cuales han de ser tenidas en cuenta como referente claro a la hora de tomar decisiones posteriores en las distintas áreas y en nuestro caso en la de Matemáticas, y nos plantearemos:

- ¿Las Matemáticas pueden aportar algo al desarrollo ético del niño?
- ¿Qué puedo hacer yo, como profesor de Matemáticas, para trabajar la transversalidad?
- ¿En Matemáticas, se pueden introducir los valores en clase?

Se muestra a continuación un modelo de trabajo, con el fin de comprobar que las Matemáticas también pueden servir para desarrollar ese humanismo en el ámbito escolar.

La metodología que se propone es la que sigue:

1. Partir del conjunto de objetivos o actitudes que el centro haya consensuado para cada valor (de forma semejante a lo indicado en el cuadro 2 para el valor básico n.° 1).

   En el caso de que este trabajo no estuviese hecho en nuestro centro, se puede partir de un soporte conceptual o guía de reflexión de cada valor. Estas guías son recursos procedimentales que facilitan la reflexión personal sobre el tema objeto de trabajo. Pueden venir dadas en forma de afirmaciones u opiniones con la intención de provocar el debate interno o personal o, simplemente, pueden tratarse de párrafos cuyo fin es dotar al lector de una «cultura» sobre el tema objeto de estudio.

2. Utilizando la parrilla de trabajo que se muestra en el cuadro 3, buscar, mediante un trabajo en equipo de todos los profesores de Matemáticas del centro, actitudes concretas que se deben conseguir en los alumnos desde este área para favorecer cada valor (columna 1ª); al mismo tiempo, se han de explicitar las actitudes que, para propiciar el mismo, deben tener los profesores (columna 2ª).

3. Indicar contenidos del currículo de Matemáticas de los que se puedan extraer actividades que permitan llevar a cabo esos aprendizajes (columna 3ª).

Actitudes que se deben conseguir en los alumnos para favorecer el valor «...» desde las Matemáticas	Actitud del profesor de Matemáticas para propiciar que los alumnos alcancen los objetivos de ese valor	Contenidos del currículo de Matemáticas para realizar este trabajo

Cuadro 3

Las actividades han de permitir situar al alumno en los temas y formular sus puntos de vista. Por ello es importante que las situaciones sean simples y concretas, muy próximas a sus vidas cotidianas. Como consecuencia de todo este proceso, el alumno ha de reflexionar sobre su propia actitud ante los problemas planteados: el respeto por el entorno natural y social, el interés y disfrute por aquello que sucede en el mundo próximo, la implicación a través de acciones en la conservación de ese medio, son ejemplos de compromisos que se podrían derivar de la problemática ambiental, y así para el resto de temas.

En cualquier caso, lo importante es ser capaces de adoptar posturas ante los problemas actuales que tienen repercusión en la escuela, de forma que evitemos estar en la indefinición total y continua.

Como propuesta, vamos a partir de un trabajo práctico sobre el valor básico «Vida» que sirva como modelo para abordar el resto de valores. Para este valor, se puede utilizar como soporte conceptual, de ser preciso, algunos párrafos del libro *Temas transversales y educación en valores* de Fernando González Lucini (pp. 138-140).

Actitudes que se deben conseguir en los alumnos para favorecer este valor desde las Matemáticas (referencia a la columna 1ª del cuadro 3)

1. Respeto hacia nosotros mismos y hacia los demás.
   - 1.1. Sensibilidad, comprensión y respeto hacia la propia vida y la de los demás a través de actividades que requieran mediciones y cálculos reales.
   - 1.2. Sensibilidad, comprensión y respeto hacia los problemas físicos de los demás, no estableciendo nunca comparaciones numéricas que puedan herir la sensibilidad de personas con deficiencias motóricas, sensoriales, sexuales, etc. Saber valorar las distintas actitudes físicas de los componentes del grupo, resaltando que todos pueden ayudar a resolver un trabajo cooperativo.
   - 1.3. Esfuerzo y constancia por cumplir las normas de seguridad e higiene para evitar riesgos en la propia vida y en la de los demás.
   - 1.4. Análisis riguroso y veraz del consumo y sus consecuencias a través de procedimientos matemáticos.
2. Sentimiento de que somos parte esencial del planeta y como tal debemos descubrir y sentir las distintas manifestaciones de vida. Este sentimiento se puede desarrollar en Matemáticas:
   - 2.1. Valorando, mediante estrategias de cálculo, medidas y estimaciones, que los bienes materiales, usados crítica y convenientemente, pueden satisfacer las necesidades humanas, propias y ajenas, lo que dará pie a un mayor desarrollo de cada persona.
   - 2.2. Utilizar el conocimiento matemático como instrumento para conocer, representar, explicar y predecir la realidad; valorar el aprovechamiento que podemos hacer del medio natural. En particular, sensibilizar a los alumnos con una toma de compromisos en algunos problemas como: deterioro del entorno, progresiva deforestación, impureza del agua y aire, agentes y repercusiones, ruido y caos de la vida urbana, arrojo de basuras y sus consecuencias.
   - 2.3. Tendencia a analizar, desde un punto de vista matemático, las diferencias y posibles relaciones entre la naturaleza viva y muerta. Investigar y sensibilizar desde este área sobre los aspectos económicos y tecnológicos que aunque mejoran la calidad de vida no siempre implican desarrollo humano.

Cuadro 4

	Referencia a los Temas Transversales	Referencia a los O.G.E. de la ESO	Referencia a otros Valores Básicos
Apartado 1.1.	• *Educación para la libertad. Educación para la paz. Educación vial.* En los tres casos se trataría de propiciar los valores de respeto y comprensión hacia la propia vida y hacia los demás.	• *Equilibrio personal* (si soy un desquilibrado puedo cometer abusos sobre mi vida y la de los demás). Referencia al objetivo «e». • *Actitud solidaria.* Ser tolerantes. Objetivo «f». • *Llevar vida sana* (beber con precaución). Objetivo «l».	
Apartado 1.2.	• *Coeducación* (cuando se habla de respeto y comprensión hacia los problemas físicos de los demás). • *Compartir responsabilidades* (no establecer comparaciones numéricas que puedan herir la sensibilidad de personas con deficiencias).	• *Tener actitud solidaria.* Objetivo «f».	2, 5, 7 y 8
Apartado 1.3.	• *Educación para la salud* (esfuerzo y constancia para cumplir las normas de higiene). • *Educación vial* (esfuerzo y constancia por cumplir las normas de seguridad).	• *Hábitos de higiene.* Objetivo «l».	3, 4, 5 y 7
Apartado 1.4.	• *Educación para el consumidor* (análisis riguroso y veraz de los productos de consumo).		4 y 8
Apartado 2.1.	• *Educación para el consumidor* (cuando se dice bienes materiales usados crítica y convenientemente...). • *Educación para la igualdad* (satisfacer las necesidades humanas propias y ajenas).	• *Equilibrio personal.* Objetivo «e» (pensar en el consumo de forma crítica y compartir con los demás). • *Actitudes solidarias.* Objetivo «f». • *Alimentación equilibrada.* Objetivo «l».	2, 4, 7 y 8
Apartado 2.2.	• *Educación ambiental* (deterioro del entorno). • *Educación vial* (ruido y caos de la vida urbana). • *Educación para la libertad* (arrojo de basuras y sus consecuencias). También aparece en este ejemplo la Educación ambiental.	• *Calidad de vida.* Objetivo «i» (preservar el medio ambiente y restablecer su equilibrio cuando corra peligro).	2, 3, 5 y 7
Apartado 2.3.	• *Educación ambiental* (naturaleza viva y muerta). • *Educación para la libertad* (usar tecnología de forma desmesurada). • *Educación para compartir responsabilidades.*	• *Calidad de vida.* Objetivo «i» ser capaces de disfrutar del entorno, compatibilizando dicho disfrute con su conservación y manteniendo un equilibrio entre sus usos individual y colectivo).	1, 5 y 8

Cuadro 5

El cuadro 4 se ha desdoblado en dos apartados:

a) La importancia del respeto hacia la vida humana (punto 1).

b) Respeto hacia todo tipo de vida en el planeta en general (punto 2).

Posteriormente se muestran dos actividades, una para cada apartado.

Si nos fijamos en su contenido, veremos que aunque estamos trabajando el valor «Vida», a la par estamos refiriéndonos a otros valores (a través de alguno de los T.T. y de los O.G.E.). Esto es importante tenerlo en cuenta ya que aunque los valores y T.T. pueden ser tratados de forma independiente entre sí, es fundamental hacer un esfuerzo procurando que todos ellos se trabajen formando una unidad. Algunos ejemplos se han puesto de manifiesto en el cuadro 5.

El cuadro 6 hace referencia a la actitud del profesor para que los alumnos lleguen a apreciar el valor «Vida», y optar por él de una forma autónoma, consciente y a través de un proceso de descubrimiento e interiorización progresiva; para ello se han de proponer las situaciones más adecuadas para que se planteen los «conflictos» motivadores y controvertidos. El profesor ha de potenciar el debate y la participación, creando un clima de confianza y respeto mutuo en el intercambio de opiniones. Ha de impulsar la crítica y la autocrítica, procurando que el alumno recabe información sobre las situaciones planteadas, las enjuicie y tome posición ante ellas. Ha de huir de visiones parciales y simplistas, buscando, seleccionando y contrastando informaciones diversas. De este modo favorecerá la madurez personal y moral de sus alumnos.

En definitiva, se trata de ofrecer a los escolares modelos de actuación viables y, a la par, evaluables, asumidos libremente por los profesores del centro, de forma que a la hora de llevarlos a la práctica no exista oposición ni contradicción que pueda despistar a los alumnos.

Finalmente, en el cuadro 7 se recogen los contenidos del currículo de Matemáticas más adecuados para tratar el valor «Vida» (tal y como se puede apreciar en el cuadro, en los cinco bloques aparecen contenidos válidos).

Es importante no olvidar que si las finalidades de los valores y temas transversales es contribuir al desarrollo de la autonomía personal y moral de los alumnos y capacitarlos social, crítica y responsablemente, habrá que favorecer una intervención didáctica que ofrezca al alumnado experiencias de aprendizajes en las que puedan plantearse problemas y resolverlos. Dialogar, confrontar puntos de vista, asumir responsabilidades; por ello, tendremos que ser capaces, desde cada seminario o departamento, de encontrar los contenidos y actividades más adecuadas para desarrollar esta labor.

sActitud del profesor de Matemáticas para propiciar que los alumnos alcancen los objetivos del valor «Vida»

- Preocupación manifiesta por los grandes problemas del planeta y de la vida mostrando sensibilidad hacia sus consecuencias.
- Disposición a seleccionar contenidos que propicien una toma de conciencia sobre la naturaleza y la vida, sus problemas y dificultades.
- Contextualización de los problemas de matemáticas en los dilemas y conflictos de nuestro planeta (ecológicos, enfermedades, hambre, guerras, xenofobia, racismo...).
- Promover la búsqueda de distintas vías de solución a los problemas planteados. Propiciar en la clase la confrontación y la modificación de puntos de vista, y la toma de decisiones colectiva.

Cuadro 6

Contenidos del currículo de matemáticas más adecuados para desarrollar el trabajo del valor «Vida»

1. Utilización de distintas situaciones en las que se presente la proporcionalidad:
   a) Mediante distintos procedimientos (tasas y factores de proporción y conversión, regla de tres, tanto por ciento, tanto por algo).
   b) Mediante distintos lenguajes:
   Lenguaje de tablas.
   Lenguaje de gráficas.
   Lenguaje de fórmulas.

2. Utilización de la relación entre magnitudes y fenómenos:
   a) Mediante fórmulas de cálculos de magnitudes.
   b) Acotación de errores cometidos al estimar, medir o aproximar las magnitudes objeto de estudio.
   c) Mediciones con diversas técnicas o instrumentos de medida.
   d) Comparación de unidades. Estudio y «valoración» de la precisión de medidas.

3. Utilización de modelos geométricos para conocer y resolver algunas situaciones relativas a la vida y al entorno. Uso de longitudes, áreas y volúmenes. Semejanza entre figuras y cuerpos. Manejo del factor de escala.

4. Las gráficas como medio para obtener valores concretos e informaciones sobre diversos fenómenos:
   a) Utilización e interpretación del lenguaje gráfico.
   b) Elaboración de tablas numéricas a partir de un conjunto de datos.
   c) Búsqueda de expresiones funcionales teniendo en cuenta los fenómenos observados.
   d) Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una población de acuerdo con los resultados de una muestra. Detección de falacias en la formulación de proposiciones con lenguaje estadístico.

5. Confección y uso de tablas de frecuencia y de gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico.

Cuadro 7

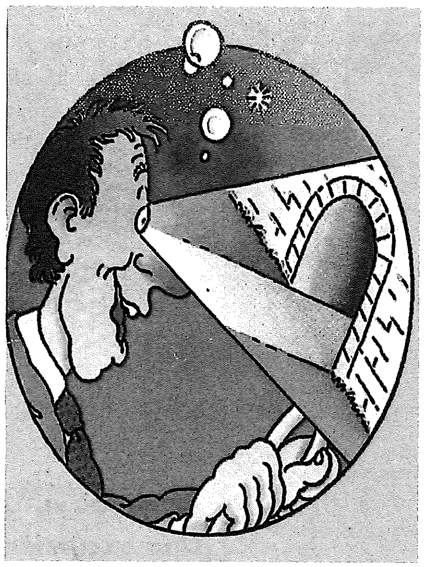
Actividad n.° 1: Alcohol y conducción

(Tomada de la revista *Tráfico*, n.° 99, correspondiente al mes de mayo de 1994.)

(Para los dos ciclos de la ESO)

La tasa de alcoholemia nos indica el n.° de gramos de alcohol que hay en 1.000 cc de sangre. De acuerdo con el Reglamento de Circulación un conductor de un vehículo normal, no podrá conducir cuando esa tasa alcance el valor de 0,8.

Pregunta 1: Si una persona tiene una tasa de alcohol de 0,5, ¿cuántos gramos de alcohol tendrá en cada litro de sangre? ¿Y en 300 cc?



Pregunta 2: Si una persona conduce con 0,05 g de alcohol por cada 150 cc de sangre ¿Está infringiendo la ley? ¿Y si lo hace con 0,11 g en 1/8 de litro de sangre?

Nota para el profesor (N.P.P.): Con estas dos preguntas, al igual que con el resto, se pretende que los alumnos las respondan de dos formas:

1.°) Matemáticamente, efectuando las operaciones correspondientes.

2.°) Bajo una concepción «humana», tratando de ver si es «lícito o está bien», de acuerdo con las consecuencias que se derivan, el que una persona vaya más rápido de lo normal en su coche.

Lo importante es que se llegue a establecer un diálogo en la clase, mediante las operaciones matemáticas, donde se planteen los conflictos y problemas en los que los alumnos están inmersos, para que, desde el debate, se llegue a una toma de compromisos y actitudes por parte de nuestros alumnos. Se trata, en definitiva, de humanizar las matemáticas y de asegurarse de que estas sirven para formar mejores personas sin detrimento de los propios conocimientos matemáticos.

En el caso de la 2ª pregunta, cuando dice «¿Está infringiendo la ley?», se está haciendo referencia al apartado 1.1 del cuadro 4; es decir, esas son las actitudes que se quieren desarrollar en los alumnos.

Pregunta 3: Si entre los cuatro ocupantes de un coche beben en una fiesta, a partes iguales, 3 «litronas», ¿cuál será la tasa del conductor? ¿Puede utilizar su vehículo?

Dato: Se sabe que dos cañas de cerveza (medio litro aproximadamente) producen una tasa alrededor de 0,50.

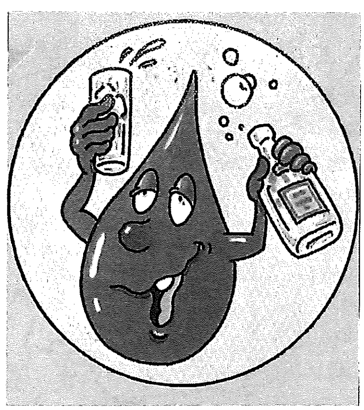
(*N.P.P.:* En este caso, las actitudes que se tratan de propiciar son las reflejadas en los apartados 1.1, 1.2 y 1.3 del cuadro 4. El alumno ha de reflexionar, llevar a cabo un debate con sus compañeros y tomar compromisos y posturas decidiendo si el conductor puede y debe utilizar su vehículo, por ello es importante que haga valoraciones críticas sobre el peligro de infringir la ley).

Pregunta 4: Representa en unos ejes cartesianos la relación cañas de cerveza, tasa de alcoholemia.

Observa a continuación la gráfica que has construido. ¿Cuántas cañas de cerveza, o qué proporción de las mismas, tiene que beber una persona para que no debiera conducir?

(*N.P.P.:* Esta pregunta está en relación con el apartado 1.4 del cuadro 4).

Pregunta 5: De acuerdo con el Reglamento de Circulación, un conductor de un autocar no puede conducir cuando la tasa de alcoholemia alcance el valor de 0,3. Utilizar la gráfica del ejercicio anterior para comparar ambas situaciones. ¿Cuántas cañas más puede tomar el conductor del vehículo normal que el del autocar?



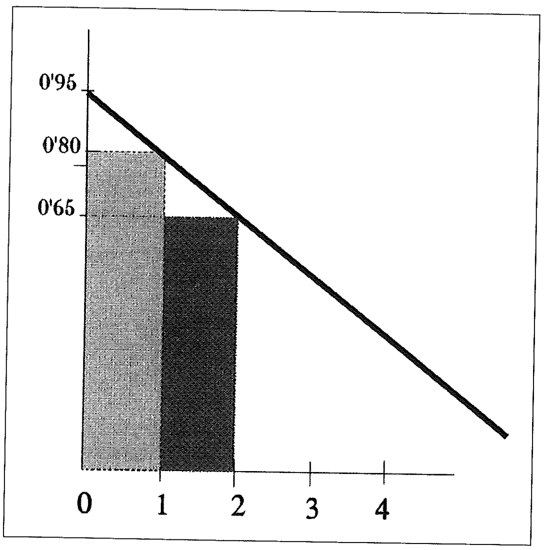
(*N.P.P.:* Con esta última pregunta, se quiere destacar la responsabilidad mayor que tienen los conductores de vehículos grandes, como autocares o camiones. En cualquier caso, siempre es importante hacer la operación matemática, pero además, una vez resuelto el ejercicio centrarse en los compromisos que podemos propiciar con el mismo).

Pregunta 6: Se sabe que un cuerpo sano elimina aproximadamente 0,15 por 1.000 cc de alcohol por hora. Una persona que tiene una tasa de 0,95 ¿qué tasa tendrá a las 3 horas? ¿Estará entonces en condiciones de conducir su vehículo?

Pregunta 7: Si entre los cuatro ocupantes de un coche beben 2,5 litros y el conductor doble que cada cada una de las otras 3 personas, ¿cuál será la tasa de cada uno de ellos?

(Para el 2.° Ciclo de la ESO)

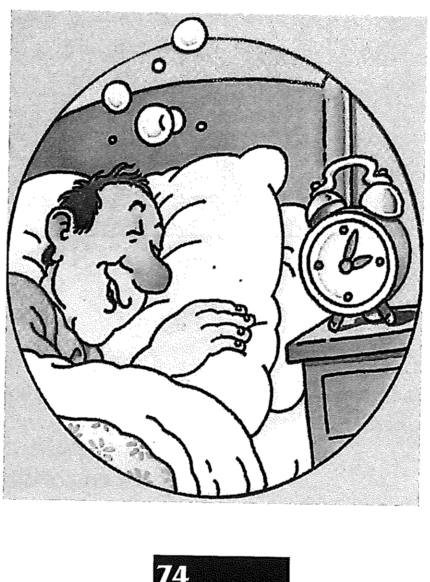
Pregunta 8: Observa la gráfica. Relaciónala con la pregunta 6ª.



¿Qué se representa en el eje de abscisas? ¿Y en el de ordenadas? ¿Por qué la pendiente es negativa? ¿Cuál es su valor? Encuentra la fórmula matemática que describe el proceso.

Pregunta 9: Con una tasa de 0,8 se sabe que se tarda en frenar aproximadamente un segundo más que estando sobrio. ¿Cuántos metros se prolonga la distancia de frenado de un automóvil que va a 120 km/h?

Pregunta 10: Pedro de 24 años afirma (periódico de tirada nacional de 13-5-94) «Cuando salgo toda la noche puedo beber 4 o 5 "tubos" de cerveza y un par de "cubatas". Esto es una cifra normal entre mis amigos».



Sabiendo que cuatro «tubos» equivalen aproximadamente a 1,5 litros. ¿Cuál será la tasa de Pedro teniendo en cuenta solamente las cervezas? ¿A partir de cuántos «tubos», o qué proporción de los mismos, habrá superado la tasa de 0,8?

Pregunta 11: Encuentra la fórmula matemática que corresponde a la gráfica obtenida en la pregunta 4. ¿Por qué la pendiente tiene distinto signo que la de la pregunta 7?

Pregunta 12: Se sabe que un cuerpo sano elimina aproximadamente 0,15 por 1.000 cc de alcohol por hora. Si una persona se acuesta a las 24 h con una tasa en la sangre de 1,3, ¿a qué hora alcanzará el nivel de 0,5? ¿A qué hora estará totalmente sobrio? ¿Cuántas horas tardará en reducirse la tasa a cuatro milésimas?

Pregunta 13: Para esa persona que a las 24 h tenía una tasa de 1,3, representa en unos ejes la relación n.° de gramos de alcohol (por litro de sangre) con respecto al tiempo transcurrido. ¿De qué tipo de función se trata? ¿Es una función afín o lineal? Encuentra su fórmula.

Pregunta 14: Resuelve el problema anterior en un caso general. Es decir, para una persona que tenga una tasa «h» en un momento cualquiera.

(N.P.P.: La misión del profesor es dar alternativas al alumno; por ello lo importante es crear el debate en las clases, y que a partir de esos debates, el alumno reflexione y obtenga consecuencias y que de esas consecuencias salgan unos compromisos. Por ello, de cada actividad, es bueno que el alumno haga una crítica del tema abordado para ver las actitudes que deberán derivarse. En consecuencia, que reflexione para ver qué tipo de actitudes se han de tomar).

Actividad n.° 2:
Una excursión por el campo

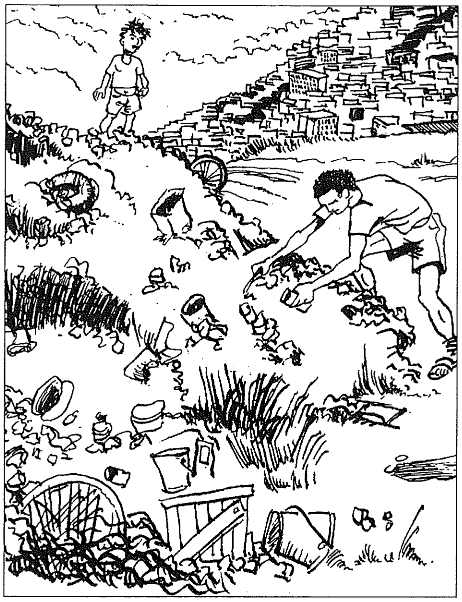
Piensa en un bote de una bebida cualquiera. Su etiqueta nos indica que su volumen es de 33 cl. Lo pesamos lleno y vacío dando por medidas, respectivamente, 350 y 40 g.

Pregunta 1: ¿Cuál será la densidad de líquido?

Si el dato real es de 0,96 g/cm^3, ¿qué ocurre? ¿Qué explicación encuentras a lo ocurrido? ¿Cuál es el volumen real que contiene el bote?

(N.P.P.: Esta pregunta está en relación con las actitudes reflejadas en el punto 2.1 del cuadro 4, pues se trata de propiciar la crítica sobre el consumo, ya que el bote realmente tiene menos contenido del reflejado en la etiqueta).

Siempre han de buscarse actividades que motiven a los alumnos en la participación activa, que les faciliten, a ser posible, un trabajo autónomo, que ejerciten su capacidad reflexiva sobre la realidad. No hay que olvidar que adquirir conocimientos como meros sujetos pasivos difícilmente generará actitudes de análisis y crítica o ejercitará hábitos de participación.



Con la siguiente pregunta, se quiere enfatizar la importancia de cuidar el medio ambiente, bajo el problema de arrojar basuras y el deterioro que esto produce en el campo, ya que tienen que transcurrir muchos años para que desaparezcan completamente. En definitiva, y tal y como ya se ha dicho varias veces, favorecer que el alumno reflexione y tome conciencia acerca de sus valoraciones, opiniones y sentimientos, y que después, se defina: tome compromisos).

Pregunta 2: En una excursión un grupo de alumnos dejan un buen número de botes de los descritos en la pregunta anterior abandonados en el campo. Si el período de semidesintegración de la materia con la que está construido cada uno de estos botes es de aproximadamente 8 años, al cabo de 16 años, ¿cuántos gramos de cada bote quedarán todavía como residuos? Dibuja en una gráfica la relación períodos de ocho años con respecto a gramos residuales que restan todavía de un bote por desintegrarse.

(*N.P.P.:* Una vez que hacen la gráfica es importante que la observen y que vean que ese material se desintegra muy lentamente. A partir de ahí, que se conciencien de la necesidad de tomar un compromiso claro ante el hecho de arrojar las basuras al campo.)

Antonio Bermejo
Centro de Profesores
y Recursos. Astorga (León)
Sociedad
Castellano-Leonesa de
Profesores de Matemáticas

(Sólo para el 2.° Ciclo de ESO)

Pregunta 3: Encuentra la fórmula matemática del ejemplo anterior. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrá reducido el residuo de cada bote a 15 g? ¿Cuántos años habrán de pasar para que se elimine completamente?

Dibuja en una gráfica la relación tiempo en años a transcurrir con respecto a gramos residuales que todavía permanecen sin desintegrarse. ¿De qué tipo de función se trata? ¿Eres capaz de encontrar su fórmula matemática?

Conclusiones

1. Que el área de Matemáticas sirve, conjuntamente con las otras, para formar a nuestros alumnos no sólo en conocimientos científicos y didácticos, ya que, además, les puede ayudar a ser mejores personas.
2. Unido a lo anterior, es importante tener en cuenta que no se puede hablar de formación en valores consensuados sólo en el departamento o seminario de Matemáticas sino que, previamente debe haber unos objetivos educativos humanos comunes a toda la comunidad educativa, que luego han de ser programados en las áreas para asegurar que los mensajes vayan todos en la misma dirección y así, después, abordarlos desde el área de Matemáticas.
3. Que aunque se pueden abordar los temas transversales como propuestas o realidades educativas sueltas e independientes entre sí, es preciso hacer un intento tratando de que todos ellos se fundan en una realidad inseparable, relacionados con los muchos O.G.E. (tanto de primaria como de secundaria), a través de los valores básicos.
4. Que el tratamiento de estos valores básicos (a través de unos contenidos y unas actividades matemáticas) deben fomentar unas actitudes en nuestros alumnos para que den alternativas y afloren propuestas de compromisos ante ciertos aspectos que recogen no sólo los temas transversales sino otros muchos problemas sociales y, a la vez, se estén llevando a cabo objetivos y contenidos matemáticos propios del currículo de este área.

EN DEFINITIVA: Enseñar Matemáticas puede y debe ser compatible con formar personas, según definió Machado: «Ser, en el pleno sentido de la palabra, bueno».

Bibliografía

CAMPS, V. (1993): *Los valores en la educación*, Alauda-Anaya, Madrid.

CAMPS, V. (1992): «Educación moral», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 201.

GONZÁLEZ LUCINI, F. (1993): *Temas transversales y educación en valores*, Alauda-Anaya, Madrid.

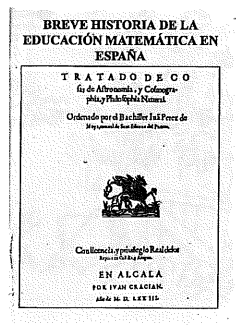
MEC (1992): *Guías para los Temas Transversales,* Materiales para la Reforma, Madrid

MEC (1993): *Temas Transversales y desarrollo curricular,* Madrid.

REYZÁBAL, M. V. y A. I. SANZ (1995): *Los ejes transversales. Aprendizajes para la vida*, Escuela Española.

PUBLICACIONES VII JAEM

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»



- *Actas 7.as Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* (1.500 pts.).
- *Fotografía y matemáticas.* (400 pts.).
- *Breve historia de la educación matemática en España.* (400 pts.).
- *El Cálculo Mecánico. Del ábaco al ordenador.* (250 pts.).
- *Rutas matemáticas por Madrid.* (600 pts.).
- *Medidas tradicionales y de oficios.* (500 pts.).
- *Las Matemáticas en los sellos de correos.* (250 pts.).
- Vídeo: *Rutas matemáticas por Madrid.* (1.000 pts.).

Solicitud de pedidos contra reembolso (500 pts. de gastos de envío):

SMPM «Emma Castelnuovo»

Apartado de Correos 14.610

28080-MADRID

SUMA 24
febrero 1997, pp. 77-79

Fermat y Arquímedes en la clase de integrales

Mónica Escudero Baylín

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se incluyen dos actividades que se realizaron en clase al impartir el tema de Integración, en ellas se expone la forma mediante la cual dos matemáticos excepcionales, Arquímedes y Fermat, calcularon el valor exacto del área y del volumen de determinadas superficies y sólidos.

CON intención de romper la monotonía de la clase, cuando se abordó el tema de integración, se buscaron ejemplos históricos del calculo de una integral, y se encontraron dos que se adaptaban a dicha intención:

1.°) El cálculo del área bajo la curva $y = x^n$ desarrollado por Fermat (1601-1665).

2.°) El cálculo del volumen del paraboloide de revolución desarrollado por Arquímedes (287-212 a.C.).

Mantener la atención y el interés del alumnado no es nada fácil. Lo que se puede afirmar es que los temas históricos, despiertan la curiosidad del alumnado en general: la forma de trabajar de los científicos, su forma de ser, los sucesos que les rodearon, sus costumbres, sus rencillas, las repercusión que tuvieron sus investigaciones, etc., les da una diferente concepción de las matemáticas.

Esta es una exposición muy escueta, en la práctica real se apoyó su desarrollo en trasparencias, procurando durante toda la exposición hacer continuas aclaraciones y relatar numerosas anécdotas. (Afortunadamente ambos matemáticos se prestan a ello.)

Los alumnos a veces se ríen, a veces se cansan, también se sorprenden.

Cálculo del área bajo la curva $y = x^n$, desarrollado por Fermat

Fermat se propuso y obtuvo el valor exacto del área bajo la curva $y = x^n$ en el intervalo [0, a] (figura 1).

El área bajo la curva se puede calcular aproximadamente tomando una partición en el intervalo [0, a] y levantando los rectángulos tal como se indica en la figura 2.

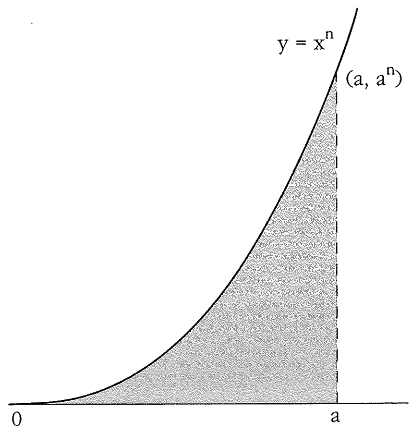


Figura 1

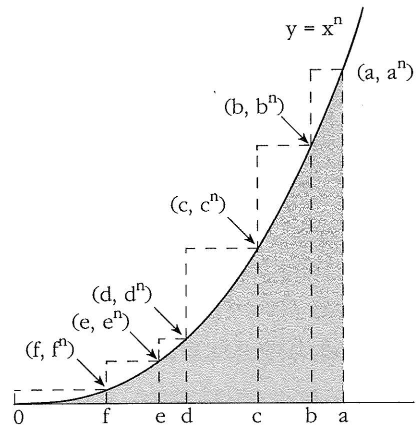


Figura 2

Sea A el área bajo la curva que es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos, por tanto:

$A \simeq (a–b)a^n + (b–c)b^n + (c–d)c^n + (d–e)d^n + (e–f)e^n + (f–0)f^n$

Para obtener el área exacta Fermat construye la siguiente partición (figura 3) del intervalo [0, a]:

$$a,\ aE,\ aE^2,\ aE^3, \ldots\ (E < 1)$$

que es una progresión geométrica de razón $E < 1$.

El área de los respectivos rectángulos resulta así:

$(a - aE)a^n,\ (aE - aE^2)a^nE^n,\ (aE^2 - aE^3)a^nE^{2n},\ (aE^3 - aE^4)a^nE^{3n}, \ldots$

que es una progresión geométrica de razón $E^{n+1} < 1$. Por tanto:

$A \simeq$ suma de las áreas de los rectángulos.

$A \simeq$ suma infinita de una progresión geométrica de razón < 1

$$A \simeq \frac{t_1}{1-r}$$

$$A \simeq \frac{a^n(a - aE)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{\dfrac{1-E^{n+1}}{1-E}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+L+E^n}$$

El área bajo la curva se puede igualar a la suma anterior haciendo que $E \rightarrow 1$ (paso intuitivo al limite, muy anterior a la formalización del concepto de límite), es decir:

$$A = \frac{a^{n+1}}{1+1+1+L+1}$$

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

es decir, lo que en notación moderna escribimos:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

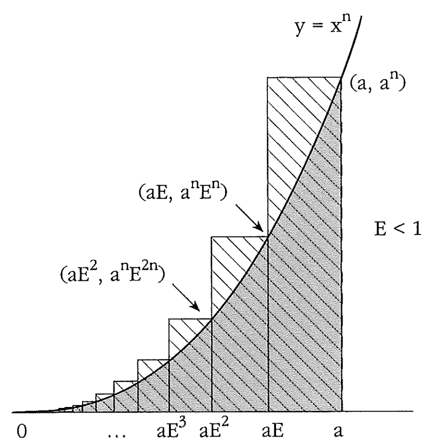


Figura 3

Cálculo del volumen del segmento recto de paraboloide de revolución desarrollado por Arquímedes

Esta demostración mucho más moderna que la anterior y verdaderamente genial, es la que utilizó Arquímedes para demostrar que el volumen de segmento recto de paraboloide de revolución es la mitad del volumen del cilindro circunscrito (figura 4).

Se quiere advertir, como en su día se hizo en clase, que para desarrollar la demostración se utiliza la geometría

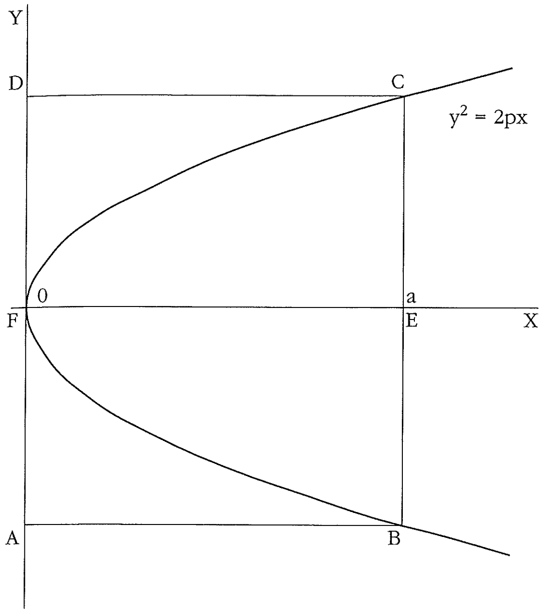


Figura 4

analítica, una herramienta muy posterior en el tiempo, pero que resulta asequible para los alumnos puesto que se había abordado anteriormente.

Para la demostración, Arquímedes divide el eje del paraboloide EF = a en *n* partes iguales, y construye cilindros inscritos y circunscritos, tal como se indica en la figura 5.

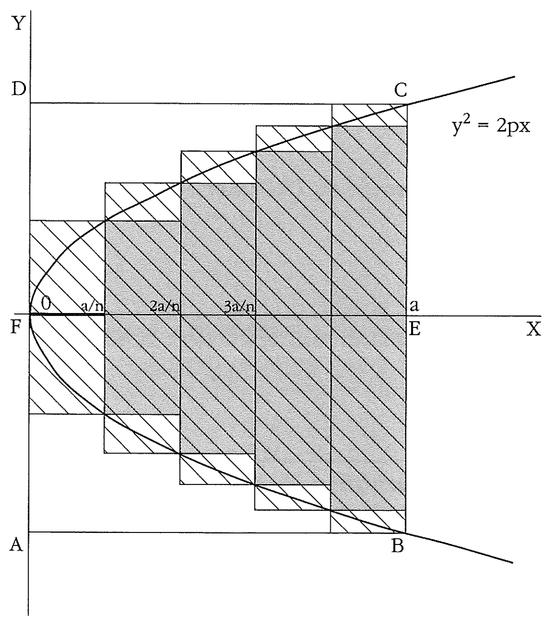


Figura 5

Mónica Escudero
IFP Islas Filipinas
Madrid
SAEM Thales

Los pasos de la demostración son los siguientes:

1) Demuestra que:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{sólido circunscrito}}} < 2$$

en efecto:

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{sólido circunscrito}}} = \frac{2\pi pa^2}{2\pi p\frac{a^2}{n^2} + 4\pi p\frac{a^2}{n^2} + 6\pi p\frac{a^2}{n^2} + \cdots + n\pi p\frac{a^2}{n^2}} =$$

$$= \frac{2\pi pa^2}{2\pi p\frac{a^2}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2}{\frac{n^2+n}{2}} < \frac{n^2}{\frac{n^2}{2}} = 2$$

2) Demuestra que (la demostración es análoga a la anterior):

$$\frac{V_{\text{cilindro}}}{V_{\text{sólido circunscrito}}} > 2$$

3) Demuestra que:

$$V_{\text{sólido circunscrito}} - V_{\text{sólido inscrito}} = V_{\text{última rodaja}} = 2\pi p\frac{a^2}{n^2}$$

(Como se aprecia claramente en el dibujo, los miembros del sólido inscrito son iguales a los contiguos del sólido circunscrito, y se van eliminando todos término a término a excepción del último. Una demostración analítica puede obtenerse de forma muy sencilla).

4) Finalmente:

Como la diferencia del punto 3) anterior, puede hacerse menor que cualquier número dado de antemano (axioma de Arquímedes), haciendo *n* suficientemente grande se tiene:

$$V_{\text{sólido circunscrito}} = V_{\text{sólido inscrito}} = V_{\text{paraboloide}}$$

De la desigualdad 1): $\frac{V_{\text{cilindro}}}{2} \leq V_{\text{paraboloide}}$

De la desigualdad 2): $\frac{V_{\text{cilindro}}}{2} \geq V_{\text{paraboloide}}$

De ambas desigualdades: $\frac{V_{\text{cilindro}}}{2} = V_{\text{paraboloide}}$

O también: $V_{\text{cilindro}} = 2V_{\text{paraboloide}}$

Bibliografía

BOYER, C. B. (1992): *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, México.

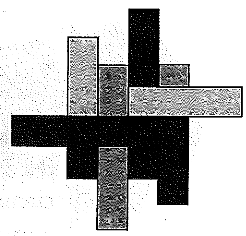
ARQUÍMEDES (1966): *El método*, EUDEBA, Buenos Aires.

JERONE KEISLER, H. (1976): *Elementary Calculus*, Weber & Schmidt Incorporated, Boston.

SERVICIO DE PUBLICACIONES

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

V OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS



Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Recopilación de los problemas propuestos en las distintas fases provinciales, autonómicas y estatal de la «V Olimpiada Matemática Nacional», organizada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Precio

Socios . . . . 1.250 pta
No socios . . . . 1.750 pta

OTRAS PUBLICACIONES

- **IV Olimpiada Matemática Nacional**
  Socios: 1.000 pta
  No socios: 1.500 pta

- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría y sentido espacial
  Socios: 900 pta
  No socios: 1.200 pta

- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría en el ciclo medio
  Socios: 1.100 pta
  No socios: 1.500 pta

- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría desde múltiples perspectivas
  Socios: 1.100 pta
  No socios: 1.500 pta

Solicitud de pedidos

(El envío se servirá contrarreembolso a los precios indicados más gastos)

Servicio de Publicaciones. FESPM. Apartado de Correos 1009. 03080 ALICANTE

SUMA 24
febrero 1997, pp. 81-88

Fractales en la ESO

Tomás Queralt Llopis

IDEAS Y RECURSOS

En el presente artículo se muestra el planteamiento, justificación y la puesta en práctica de algunas actividades que forman parte de un taller de Fractales. Estas se han tratado en clase en grupos de segundo ciclo de ESO, y se han utilizado para iniciar el curso con un resultado satisfactorio. Con este trabajo se pretende romper con algunos estereotipos y con algunas creencias que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas, así como crear el contexto más adecuado para que el alumno haga matemáticas

CON motivo de la celebración de las II Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana (La Safor, mayo de 1995) y de las VII JAEM (Madrid, septiembre de 1995), tuve ocasión de presentar un taller con idéntico título que este artículo y que, con sus mismas ideas y exposición, es ahora la base del mismo. Los materiales que de él obtuvimos han sido puestos en práctica con los alumnos de Segundo Ciclo de ESO del IES de Benifairó de les Valls (Valencia).

La idea que impulsa este material parte de considerar que las posibilidades actuales de utilizar las nuevas tecnologías en el aula como soporte didáctico son cada vez mayores; prueba de ello es que las calculadoras y ordenadores están introduciéndose en las clases de matemáticas con pie lento pero firme. Estos nuevos elementos, utilizados de forma razonable como canal transmisor de contenidos matemáticos, permiten situar al estudiante en el contexto idóneo de la actividad matemática. Así, enfocando el trabajo matemático básicamente como una labor de búsqueda y de investigación, se potencia esta actitud en el estudiante. Por otro lado, resulta altamente motivador para los alumnos la utilización del ordenador como herramienta de trabajo, ya que la interacción alumno-ordenador siempre es atractiva.

Justificación del material

El presente trabajo es una propuesta de material para llevar al aula en grupos de Secundaria Obligatoria. Este material no es una unidad didáctica, porque no tiene un eje en torno al cual se vertebra el diseño de una parcela curricular con entidad propia. Únicamente se pretende, partiendo de un elemento conductor como es el concepto de *fractal*, trabajar determinados contenidos matemáticos adaptados a la etapa 12-16. Estos contenidos forman parte de los componentes de la competencia matemática: hechos, destrezas, estructuras conceptuales, estrategias generales y cualidades personales. Se pueden tratar con diferente grado de profundización según el curso y las características del grupo de alumnos.

El artículo pretende, por un lado, mostrar al profesorado que estos nuevos elementos matemáticos, los fractales, se pueden incluir en la programación del área como un contenido objeto de estudio, y también utilizarlo como un recurso para trabajar aquellos contenidos con los que estén involucrados. Por otro lado, se pretende que el profesorado reflexione sobre la importancia de establecer redes conceptuales como una de las principales formas de aprendizaje. El material elaborado supone enseñar de forma activa, es decir, que los alumnos trabajen y construyan fractales. Así, se intentan presentar las actividades en forma de problema, de manera que sea el profesor quien exija el grado de profundización que considere oportuno. Por otra parte, como hemos dicho, la interacción que se produce entre el ordenador y el alumno resulta altamente motivadora, ya que supone la salida del entorno habitual del aula y de la mera relación profesor-alumno.

Tenemos la responsabilidad de trabajar en un área que de forma tradicional se ha interpretado como cerrada, donde todo estaba ya inventado. Se pretende romper con este estereotipo y con otras creencias que los estudiantes tienen sobre las matemáticas: «las matemáticas son cálculos», «los problemas de matemáticas se tienen que resolver rápidamente con unos cuantos pasos», «las matemáticas tienen como objetivo obtener respuestas correctas», «el papel de un estudiante de matemáticas es recibir conocimientos matemáticos y demostrar que los han recibido», «el papel del profesor de matemáticas es transmitir estos conocimientos y comprobar que los estudiantes los han recibido».

Hay que considerar además que los fractales son en sí mismo objeto de interés: a partir de su análisis y manipulación surgen nuevos «modelos» o figuras geométricas elementales, con lo que se favorece el enriquecimiento del alfabeto matemático; existen muchos ejemplos en la realidad cotidiana que tienen carácter fractal, y en su descripción se tiene que recurrir a los elementos que definen los fractales: ramificación de los bronquios, cadena de montañas, una coliflor...; favorece también la inversión de la tendencia en el seno de la matemática contemporánea en el sentido de retornar a la concepción de la matemática como ciencia de la naturaleza.

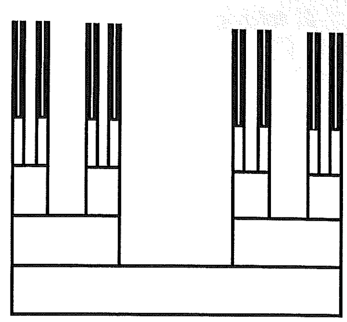
Hay que considerar además que los fractales son en sí mismo objeto de interés: a partir de su análisis y manipulación surgen nuevos «modelos» o figuras geométricas elementales, con lo que se favorece el enriquecimiento del alfabeto matemático...

Metodología

Las actividades que a continuación se exponen son algunas de las propuestas a los alumnos de 3.° y 4.° de ESO con la intención de tratar los contenidos de NÚMEROS. El planteamiento de trabajo supone tomar como modelo metodológico el *investigador*, basado en el esquema *problemas-actividades sobre problemas-conclusiones-informe*. Este esquema permite al alumno trabajar los contenidos previstos desde la óptica de la *resolución de problemas*, es decir, situa al alumno en la posición más cercana a lo que podríamos entender por *hacer matemáticas*. Teniendo en cuenta las recomendaciones del Informe Cockcroft, así como el informe Kuwait y otros trabajos de investigación en Educación Matemática, pensamos que la resolución de problemas debería ser el eje en torno al cual centrar la actividad de las matemáticas escolares.

El esquema de trabajo de las actividades suele ser siempre el mismo. Cada actividad lleva aparejada un programa en Basic, que al ejecutarlo proporciona una imagen del fractal que va a servir de soporte de la actividad. En primer lugar los alumnos observan en la pantalla del ordenador la evolución que sigue el fractal en su construcción tras varias iteraciones, normalmente seis o siete, pues la definición de la pantalla no permite mejorar la imagen con un mayor número de éstas. A continuación, se les pide que describan del mejor modo posible la imagen que aparece en la pantalla. Esto permite al profesor observar la utilización por parte de los alumnos del lenguaje específico de las matemáticas, así como exigirles una mayor propiedad y precisión en las expresiones utilizadas. Posteriormente, se pide a los alumnos contestar una pregunta que aun siendo accesible para ellos, la investigación necesaria para responderla les permite manipular conceptos y operar con expresiones numéricas que no son tan evidentes, y que su tratamiento surge como exigencia y no como una mera ejercitación. Por último, en ocasiones se solicita al alumno que vaya más allá de lo que supone el análisis de un caso particular y generalice.

El peine de Cantor[1]



1. Describe la imagen que aparece en la pantalla.
2. Supongamos que el segmento original es el [0,1]. Por construcción, el conjunto de Cantor es un conjunto infinito de puntos, pero de medida cero. ¿El número 0,752 es del conjunto de Cantor?
3. ¿Cómo identificaríais los elementos de este conjunto?

La imagen que aparece en la pantalla es el llamado «Peine de Cantor» debido a su característica forma, y cuya construcción está basada en el conjunto de Cantor. El proceso de construcción de éste parte de considerar el intervalo [0, 1] inicialmente, dividirlo en tres partes iguales y eliminar el subintervalo central. En la siguiente iteración repetimos esta acción en cada uno de los dos subintervalos cerrados restantes, obteniendo con ello cuatro pequeños intervalos; y así sucesivamente, de manera que en el límite nos encontramos con un conjunto de infinitos puntos.

Para averiguar si el número 0,752 es del conjunto de Cantor partimos del intervalo [0,1], vamos obteniendo las expresiones decimales de los puntos que determinan los extremos de los subintervalos del conjunto de Cantor (ver figura adjunta) y observamos en cual de ellos se encuentra el valor 0,752.

Entonces, el número 0,752 quedará eliminado del conjunto de Cantor.

Para identificar los elementos de este conjunto hagamos notar que la dirección del número 0,752 en el conjunto de Cantor la vamos obteniendo cogiendo los intervalos a derecha (D) e izquierda (I), y es al llegar al intervalo central cuando queda eliminado:

D I D I D D I C

Así, podríamos escribirlo en base 3 a partir de las tres posibilidades de elección de una dirección:

$$0{,}752 = 0.20202201\ldots$$

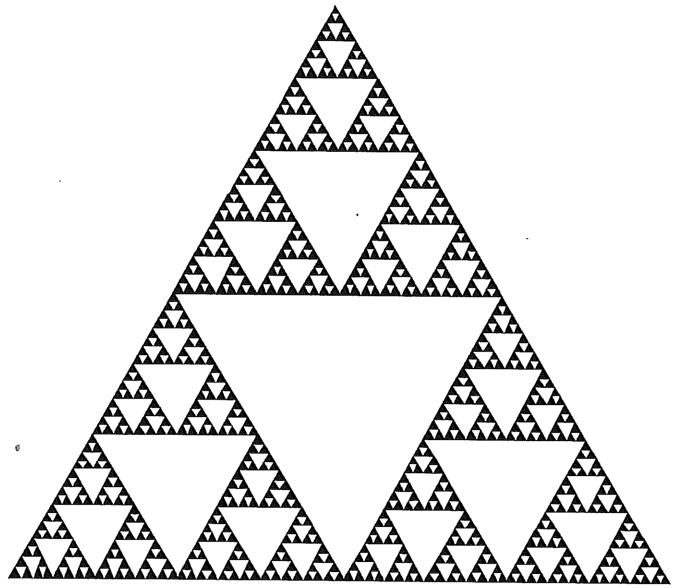
Por tanto, se puede comprobar que el conjunto de Cantor está formado por aquellos números que en base tres tienen únicamente ceros y doses.

1 Actividad basada en una propuesta de trabajo de José Ángel Bolea Oliván.

0			1
0	$\frac{1}{3}=0,333\ldots$	$\frac{2}{3}=0,666\ldots$	1
$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=0,666\ldots$	$\frac{7}{9}=0,777\ldots$	$\frac{8}{9}=0,888\ldots$	1
$\frac{6}{9}=\frac{18}{27}=0,666\ldots$	$\frac{19}{27}=0,703703\ldots$	$\frac{20}{27}=0,740740\ldots$	$\frac{21}{27}=0,777\ldots$
$\frac{20}{27}=\frac{60}{81}=0,740740\ldots$	$\frac{61}{81}=0,753086419\ldots$	$\frac{62}{81}=0,765432098\ldots$	$\frac{63}{81}=0,777\ldots$
$\frac{60}{81}=\frac{180}{243}=0,740740\ldots$	$\frac{181}{243}=0,74485596\ldots$	$\frac{182}{243}=0,74897119\ldots$	$\frac{183}{243}=0,75308641\ldots$
$\frac{182}{243}\equiv\frac{546}{729}=0,748971193\ldots$	$\frac{547}{729}=0,750342935\ldots$	$\frac{548}{729}=0,751714677\ldots$	$\frac{549}{729}=0,753086419\ldots$
$\frac{548}{729}\equiv\frac{1644}{2187}=0,75171467\ldots$	$\frac{1645}{2187}=0,752171925\ldots$	$\frac{1646}{2187}=0,752629172\ldots$	$\frac{1647}{2187}=0,753086419\ldots$
$\frac{1644}{2187}\equiv\frac{4932}{6561}=0,75171467..$	$\frac{4933}{6561}=0,751867093\ldots$	$\frac{4934}{6561}=0,752019509\ldots$	$\frac{4935}{6561}=0,752171925\ldots$

El triángulo de Sierpinski

1. Describe cómo se construye la imagen que aparece en la pantalla.
2. Si en la construcción partimos de un triángulo equilátero, y vamos haciendo agujeros de triángulos equiláteros semejantes, (o sea, si hacemos el proceso inverso al de la pantalla), ¿nos podemos quedar sin triángulo?
3. Si partimos de un triángulo equilátero de área A, y vamos sumando las sucesivas áreas de los triángulos que aparecen, ¿cual será el área total de la figura que al final obtenemos?



Se puede pedir que solamente sean dos o tres alumnos los que describan la construcción de la imagen, mientras que los demás dibujen aquello que sus compañeros les describen y, posteriormente, compararlo con la imagen de la pantalla.

Para responder a la cuestión 2 podemos hacer una tabla que nos indique como va evolucionando el triángulo inicial a medida que le vamos quitando los triángulos menores. Así, cabe preguntarse qué parte respecto del triángulo inicial nos queda tras cada iteración:

Decimal	*Fracción*	*Porcentaje*
0,25	1/4	25,00
0,4375	7/16	43,75
0,578125	37/64	57,81
0,6835937	175/256	68,36
0,7626953	781/1024	76,27
0,8220214	3367/4096	82,20
0,866516113	14197/16384	86,65
0,899887085	58975/65536	89,99
0,9249153	989527/1048576	94,37

Entonces, en el límite nos quedará una figura que tendrá área total cero.

3. Si partimos de un triángulo equilátero de área A, y sumamos las áreas de los sucesivos triángulos que vamos añadiendo, por el apartado anterior se intuye que el área total de la figura que tendremos en el límite será 4A. (Ver en el recuadro adjunto, para cada una de las fases, las áreas de los triángulos que se van añadiendo y las áreas totales.)

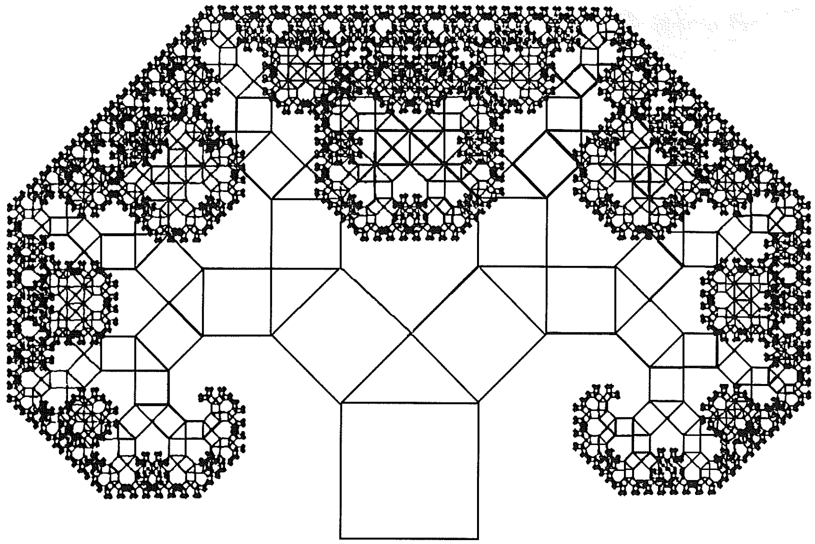
En el límite, la suma de las áreas de los sucesivos triángulos se reduce al cálculo de la suma de una serie numérica, que es una progresión geométrica de razón menor que 1:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} A = A\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = A\,\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4A$$

Fase	*Área del triángulo añadido*	*Área total*
1	A	A
2	$\frac{1}{4}A$	$A + \frac{3}{4}A = \frac{7}{4}A$
3	$\frac{1}{16}A$	$A + \frac{3}{4}A + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A = \frac{37}{16}A$
4	$\frac{1}{64}A$	$A + \frac{3}{4}A + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A + \left(\frac{3}{4}\right)^3 A = \frac{148}{64}A$
...	...	...
n	$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$	$A + \frac{3}{4}A + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A + \left(\frac{3}{4}\right)^3 A + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} A$

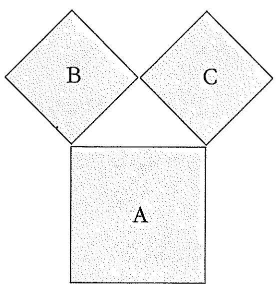
El árbol de Pitágoras básico

1. Describe la construcción del árbol de manera que cualquier compañero pueda hacer el dibujo a partir de tu descripción.
2. Si partimos de un cuadrado que tiene de superficie 1 m^2, ¿sabrías obtener la sucesión de las áreas de los cuadrados en cada iteración?



Podemos resolver este problema desde distintas perspectivas:

Método 1. Utilizando el Teorema de Pitágoras, sabemos que al ser rectángulo el triángulo que se forma en cada iteración, la suma del área de los cuadrados construidos es igual al área del cuadrado del que parten.



Área A = Área B + Área C

Y como B y C son iguales, entonces el área de cada cuadradito es la mitad del área del cuadrado del que parten.

Así, podríamos obtener el siguiente cuadro:

Iteración	**N.° de cuadrados**	**Área de cada uno**	**Área total**
0	$1 = 2^0$	1	1
1	$2 = 2^1$	1/2	1
2	$4 = 2^2$	$1/4 = 1/2^2$	1
3	$8 = 2^3$	$1/8 = 1/2^3$	1
...	...	...	...
n	2^n	$1/2^n$	1

Método 2. Como el triángulo rectángulo que nos aparece en cada iteración tiene los catetos iguales, entonces los ángulos interiores salvo el recto serán de 45°. Si llamamos «h» a la hipotenusa, tendremos que la longitud «l» de los lados de los cuadraditos que construimos en cada iteración será:

$$l = h \cdot \sin 45° = h \cdot \cos 45° = h \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad m$$

y el área de cada cuadradito será:

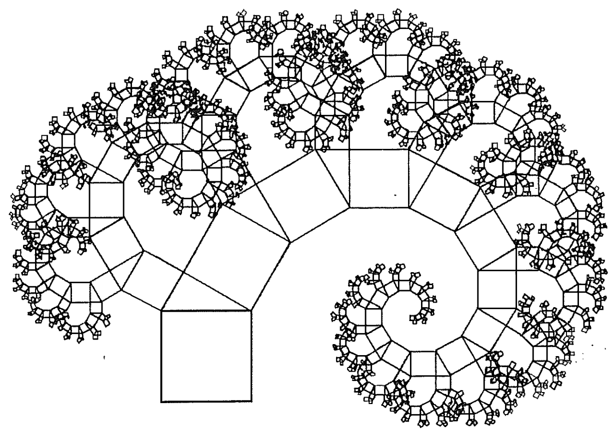
$$\text{Área} = l^2 = \left(h \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{h^2}{2} \quad m^2$$

Así:

Iteración	**N.° de cuadrados**	**Longitud del lado**	**Área de cda uno**
0	$1 = 2^0$	1	1
1	$2 = 2^1$	$\sqrt{2}/2$	1/2
2	$4 = 2^2$	1/2	1/4
3	$8 = 2^3$	$\sqrt{2}/4$	1/8
4	$16 = 2^4$	1/4	1/16
...	...	...	...
n	2^n	$\left(\sqrt{2}/2\right)^n$	$1/2^n$

El árbol de Pitágoras desequilibrado

1. Describe la construcción del árbol.
2. Supongamos que el triángulo que genera la construcción del árbol tiene un ángulo de 30°. Identifica cuál será la longitud de los lados (y, por tanto, el área) de cada cuadradito en el árbol construido si el cuadrado inicial tiene de área 1 m².



Según el enunciado, los ángulos del triángulo que va generando el árbol son de 30°, 60° y 90°. Como el cuadrado inicial tiene unos lados de longitud 1 m, si llamamos «l» y «L» las longitudes de los lados de los cuadrados pequeño y grande respectivamente que van apareciendo, entonces tendremos que:

$$l = 1 \cdot \sin 30° = 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} \text{ m}$$

$$L = 1 \cdot \cos 30° = 1 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

Entonces, las áreas respectivas serán:

Área del cuadrado pequeño = 1/4 m².

Área del cuadrado grande = 3/4 m².

Según este resultado podemos pensar que los cuadrados que van apareciendo en el árbol en cada iteración, tienen área en relación 3:1, es decir, el pequeño es la cuarta parte del cuadrado de origen y el grande las tres cuartas partes. Hay que hacer notar que en cada iteración la suma de las áreas de los cuadrados que se generan también será 1, al igual que en la actividad anterior.

Así, tendremos el siguiente árbol que representa las sucesivas áreas:

Si ordenamos y contamos los cuadrados que tienen la misma área de menor a mayor en cada iteración, observamos la siguiente regularidad:

Iteración 0	1(1)				
Iteración 1	1(1/4)	1(3/4)			
Iteración 2	1(1/16)	2(3/16)	1(9/16)		
Iteración 3	1(1/64)	3(3/64)	3(9/64)	1(27/64)	
Iteración 4	1(1/256)	4(3/256)	6(9/256)	4(27/256)	1(81/256)
...					

Iteración n — El número de cuadrados que corresponda a una determinada área será:

$$\binom{n}{k}$$

y el área de cada uno de ellos $3^k/4^n$, donde k = 0, 1, 2,...,n, siendo n el número de la iteración.

Iteración 0	1							
Iteración 1	1/4	3/4						
Iteración 2	1/16	3/16	3/16	9/16				
Iteración 3	1/64	3/64	3/64	9/64	3/64	9/64	9/64	27/64

Los programas

Los siguientes programas están escritos en Qbasic y se pueden ejecutar en un ordenador compatible PC con sistema operativo DOS 4.0 o superior, y pantalla gráfica VGA. Para otros tipos de pantalla es posible que haya que hacer algunos cambios en la selección del modo gráfico (Screen) y en las instrucciones relativas a orígenes y escalas.

PEINE

```
' El peine de Cantor
' Nombre: PEINE
SCREEN 7: COLOR 5, 10: CLS
WINDOW (-.3, -.4)-(1.3, .8)
' La instrucción siguiente pretende ralentizar el dibujo para
que se aprecie el
' proceso de construcción del peine. Primero el mango.
FOR Z=1 TO 20000: NEXT Z
DIM A(729), B(729): A(0) = 0: A(1) = 1
B = .1: LINE (0, 0)-(1, 0): LINE -(1, -B): LINE -(0, -B): LINE -(0, 0)
' Haremos 6 iteraciones debido a la definición de la pantalla.
FOR P = 1 TO 6
   FOR I = 0 TO 2 ^ P - 1
      B(I) = A(I) / 3: B(I + 2 ^ P) = 1 - (1 - A(I)) / 3
   NEXT I
   FOR J = 1 TO 2 ^ (P + 1) - 1
      A(J) = B(J): NEXT J
' Ahora ralentizamos el dibujo de los dientes en cada iteración.
   FOR Z=1 TO 20000: NEXT Z
   FOR K = 0 TO 2 ^ (P + 1) - 1 STEP 2
      LINE (A(K), B * P)-(A(K + 1), B * P)
      LINE (A(K), B * P)-(A(K), B * P - B)
      LINE (A(K + 1), B * P)-(A(K + 1), B * P - B)
   NEXT K
NEXT P
BEEP: A$ = INPUT$(1): END
```

SIERPINSKI

```
' El triángulo de Sierpinski
' Nombre: SIERPINSKI
SCREEN 7 : COLOR 14,9 : CLS : PI=3.141593
WINDOW (-2.6,-2.4) - (2.6,1.5)
P=5 : DIM T(P) : A=SQR(3)
FOR M=0 TO P
   FOR N=0 TO 3^M-1
      N1=N
      FOR L=0 TO M-1
            T(L)=N1 MOD 3 : N1=N1/3
      NEXT L : FOR Z=1 TO 2000: NEXT Z
      X=0 : Y=0
      FOR K=0 TO M-1
            X=X+COS((4*T(K)+1)*PI/6)/2^K
            Y=Y+SIN((4*T(K)+1)*PI/6)/2^K
      NEXT K
      U1=X+A/2^(M+1) : U2=X-A/2^(M+1)
      V1=Y-1/2^(M+1) : V2=Y+1/2^M
      LINE (U1,V1)-(X,V2)
      LINE -(U2,V1) : LINE -(U1,V1) : FOR Z=1 TO 2000: NEXT Z
   NEXT N
NEXT M : BEEP : A$=INPUT$(1) : END
```

ÁRBOL DE PITÁGORAS BÁSICO

```
' El árbol de Pitágoras
' Nombre: PITAG1
SCREEN 7: COLOR 2, 7: CLS : PI = 3.141593
WINDOW (-3.5, -2)-(4.5, 4)
DIM X(2048), Y(2048)
' Elección del ángulo
F = PI / 4: C = COS(F): S = SIN(F)
A1 = -C * S: A2 = C ^ 2: B1 = A1 + A2: B2 = -A1 + A2
C1 = B2: C2 = 1 - B1: D1 = 1 - A1: D2 = 1 - A2
X(2) = 0: Y(2) = 0: X(3) = 1: Y(3) = 0
```

```
LINE (.5, -1)-(.5, 0)
FOR M = 1 TO 9
    FOR J = 0 TO 2 ^ (M - 1) - 1
        X0 = X(2 ^ M + 2 * J): Y0 = Y(2 ^ M + 2 * J)
        X1 = X(2 ^ M + 2 * J + 1): Y1 = Y(2 ^ M + 2 * J + 1)
        U = X1 - X0: V = Y1 - Y0
        XA = X0 + A1 * U - A2 * V: YA = Y0 + A2 * U + A1 * V
        XB = X0 + B1 * U - B2 * V: YB = Y0 + B2 * U + B1 * V
        XC = X0 + C1 * U - C2 * V: YC = Y0 + C2 * U + C1 * V
        XD = X0 + D1 * U - D2 * V: YD = Y0 + D2 * U + D1 * V
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = XA: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = YA
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = XB: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = YB
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = XC: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = YC
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = XD: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = YD
        LINE ((X0 + X1) / 2, (Y0 + Y1) / 2)-((XA + XB) / 2, (YA + YB) / 2)
        LINE ((X0 + X1) / 2, (Y0 + Y1) / 2)-((XC + XD) / 2, (YC + YD) / 2)
    NEXT J
    FOR P = 1 TO 8000: NEXT P
NEXT M
BEEP: A$ = INPUT$(1): END
```

ÁRBOL DE PITÁGORAS DESEQUILIBRADO

```
' El árbol de Pitágoras desequilibrado
' Utilizando sistema de números binarios
' Nombre: PITAG2
SCREEN 7: COLOR 1, 4: CLS : PI = 3.141593
WINDOW (-2.5, -2)-(5.5, 4)
DIM X(2048), Y(2048)
' Elección del ángulo
F = PI / 3: C = COS(F): S = SIN(F)
A1 = -C * S: A2 = C ^ 2: B1 = A1 + A2: B2 = -A1 + A2
C1 = B2: C2 = 1 - B1: D1 = 1 - A1: D2 = 1 - A2
X(2) = 0: Y(2) = 0: X(3) = 1: Y(3) = 0
LINE (0, 0)-(1, 0): LINE -(1, -1): LINE -(0, -1): LINE -(0, 0)
FOR M = 1 TO 9
    FOR J = 0 TO 2 ^ (M - 1) - 1
        X0 = X(2 ^ M + 2 * J): Y0 = Y(2 ^ M + 2 * J)
        X1 = X(2 ^ M + 2 * J + 1): Y1 = Y(2 ^ M + 2 * J + 1)
        U = X1 - X0: V = Y1 - Y0
        XA = X0 + A1 * U - A2 * V: YA = Y0 + A2 * U + A1 * V
        XB = X0 + B1 * U - B2 * V: YB = Y0 + B2 * U + B1 * V
        XC = X0 + C1 * U - C2 * V: YC = Y0 + C2 * U + C1 * V
        XD = X0 + D1 * U - D2 * V: YD = Y0 + D2 * U + D1 * V
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = XA: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J) = YA
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = XB: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 1) = YB
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = XC: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 2) = YC
        X(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = XD: Y(2 ^ (M + 1) + 4 * J + 3) = YD
        LINE (X0, Y0)-(XA, YA): LINE -(XB, YB)
        LINE -(X1, Y1): LINE -(XD, YD)
        LINE -(XC, YC): LINE -(X0, Y0)
    NEXT J
NEXT M
BEEP: A$ = INPUT$(1): END
```

Tomás Queralt
CEP de Torrent (Valencia)
SEMCV
Al-Khwarizmi

Bibliografía

BANNON, T. J. (1991): «Fractals and Transformations», *The Mathematics Teacher*, 3, n.° 84, 178-185.

BARTON, R. (1990): «Chaos and Fractals», *The Mathematics Teacher*, 7, n.° 83, 524-529.

CAMP, D. R. (1991): «A Fractal Excursion», *The Mathematics Teacher*, 4, n.° 84, 265-275.

CIBES, M. (1990): «The Sierpinski Triangle: Deterministic versus random models», *The Mathematics Teacher*, 8, n.° 83, 622.

COCKROFT, W. H. (1985): *Las matemáticas sí cuentan*, MEC, Madrid.

FRANTZ, M. y S. LOAZARNICK (1991): «The Mandelbrot Set in de Classroom», *The Mathematics Teacher*, 3, n.° 84, 173-177.

GUZMÁN, M. y otros (1993): *Estructuras fractales*, Labor, Madrid.

HEWITT, D. (1987): «Syllabus as fractal», *Mathematical Teaching*, n.° 119, 43.

ICMI (1986): *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. Kuwait 1986,* Mestral, Valencia.

MANDELBROT, B. (1977): *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman & Co. Publishers, New York.

MARTÍN, M. A., M. MORÁN y M. REYES (1995): *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de la matemática*, MEC, Madrid.

RIPPON, P. (1991): «What exactly is a fractal», *Mathematical Teaching*, n.° 134, 46-47.

STEPHENSON, P. (1991): «"Fractals" and rationals», *Mathematical Teaching*, n.° 134, 23-26.

THOMAS, N. (1991): «Chaos in the classroom», *Mathematical Teaching*, n.° 134, 8-10

SUMA 24
febrero 1997, pp. 89-98

Inferencia estadística en bachillerato: propuestas

Jose Miguel Rodríguez Morales

El trabajo incluye un conjunto de propuestas referentes a los contenidos y secuenciación de la inferencia estadística en la asignatura «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II» y a los recursos metodológicos que pueden ser utilizados para su aprendizaje.

IDEAS Y RECURSOS

LA lectura de los aspectos relacionados con la Estadística en el currículo de «Matemáticas aplicada a las Ciencias Sociales II» no establece de forma precisa los contenidos específicos necesarios para su desarrollo, de forma que deben tomarse algunas decisiones.

Surgirá, pues, de forma natural un cierto grado de debate sobre la extensión y la profundidad de los contenidos que desarrollan dicho currículo. Creo muy beneficioso dicho debate. Sin embargo, creo también que no ha de prolongarse indefinidamente en el tiempo. En consecuencia, deben realizarse, lo antes posible, propuestas concretas que eliminen ese cierto grado de incertidumbre sobre los contenidos que hay que impartir, en el que muchos profesores ahora se encuentran.

Tan importante como el de la elección de contenidos, es el problema de los recursos metodológicos que es preciso emplear. Al hilo de lo que se recomienda en el currículo se pueden hacer propuestas concretas.

Lo que sigue es el fruto de la reflexión y la práctica docente durante el pasado curso y, como propuestas que son, están abiertas a debate y mejora. Son, en cualquier caso, los profesores encargados de impartir esta materia los que deben tomar las decisiones oportunas.

Propuesta de secuenciación de contenidos

Al hilo de lo establecido en el currículo, una secuenciación adecuada de los contenidos podría ser la siguiente:

1. La inferencia estadística: concepto y usos.
2. El muestreo: características básicas.
   2.1. Tipos de muestras.

2.2. Muestreos aleatorios: simple, sistemático, estratificado y polietápico.
2.3. La encuesta: características más importantes. Tipos.

3. Teorema Central del Límite: aplicaciones.
4. Estimación: conceptos básicos.
    4.1. Estimación de la media de una población. Tamaño de la muestra y error de estimación.
    4.2. Proporciones.
        4.2.1. La distribución muestral de proporciones.
        4.2.2. Estimación de una proporción. Tamaño de la muestra y error de estimación.
5. Tests de contraste de hipótesis: conceptos generales.
    5.1. Tests sobre la media y la proporción.
    5.2. Errores.

Sin embargo, hará falta tomar algunas decisiones sobre la profundidad con que se tratarán estos aspectos. Las siguientes definen la propuesta anterior.

- Aunque se deben estudiar múltiples formas de muestreo, todo el desarrollo posterior de la inferencia debe hacerse en referencia al muestreo aleatorio simple. El uso de otros muestreos aleatorios sólo aportará confusión al multiplicarse las expresiones para el error de muestreo.
- Deberán utilizarse sólo muestras grandes (n>30). Esto simplificará muchos resultados y nos permitirá tomar como normales las distribuciones muestrales de medias.
- Las poblaciones de estudio deberán ser infinitas, o bien si son finitas el muestreo ser realizado con reemplazamiento, o cuando menos el tamaño de la muestra no debe superar al 5% del de la población. Si no lo hiciéramos así, deberíamos tener en cuenta factores de corrección, que no aportarían nada a los conceptos estudiados, y harían crecer el número de expresiones que hay que utilizar con la consiguiente confusión.
- De cara al contraste de hipótesis, será necesario conocer la distribución muestral de medias (normal en los supuestos anteriores) y la distribución muestral de proporciones (binomial). Estas serán las más apropiadas para la realización de tests.
- Partiendo del método clásico de contraste, podría estudiarse el método conceptualmente más rico del p-valor.

Propuesta de recursos metodológicos

Pero más importante que el de la elección de contenidos, es el problema de los recursos metodológicos que hay que emplear. Al hilo de lo esbozado en el currículo, parecen adecuados los siguientes tipos de recursos y actividades:

...más importante que el de la elección de contenidos, es el problema de los recursos metodológicos que hay que emplear.

Ejercicios

Deben de estar contextualizados, de forma que recojan actividades del entorno de los alumnos o relacionadas con sus futuras profesiones y, al mismo tiempo, sugieran formas de utilizar sus conocimientos en otros aspectos y situaciones similares. Podrían servir como ejemplos los siguientes:

Ejemplo 1

Una empresa dedicada al estudio de mercados fue contratada para determinar cuanto dinero gasta como media al año un joven (13-19 años) en la compra de grabaciones musicales (CD, cassette,...). La empresa eligió al azar 80 calles localizadas a lo largo de todo el país. Un investigador de campo, se colocó en una parte central de dicha calle, y pidió a los que pasaban que parecían tener la edad apropiada que rellenaran el cuestionario. Fueron rellenados un total de 2.050 cuestionarios. Con base en este estudio, la empresa informó que la media buscada era de 12.000 pts/año por joven.

Marca con una cruz aquellas afirmaciones que consideres correctas:

- ☐ Las respuestas son una estimación hecha por los propios jóvenes de lo que gastan, pero pueden ser muy diferentes de lo que realmente gastan.
- ☐ Los jóvenes deberían haber sido elegidos de entre los que salen de una tienda de discos.
- ☐ Esta estimación podría ser defectuosa, dado que los jóvenes no fueron elegidos al azar.
- ☐ La media encontrada no es representativa, dado que existe una gran variación entre lo que gastan los jóvenes en música.
- ☐ El muestreo realizado es semi-aleatorio.
- ☐ No estoy de acuerdo con ninguna de las anteriores respuestas.

Ejemplo 2

El gerente de una cadena hotelera, para medir la calidad de los servicios de limpieza en los hoteles de su cadena, realiza encuestas periódicas sobre el grado de satisfacción de los clientes (entre 0 y 10) y sabe, por experiencia, que las puntuaciones otorgadas por los clientes se distribuyen según N(7,5;1,2), considerando satisfactoria esta situación. Si todos los meses se elige a 40 clientes aleatoriamente para calificar los servicios, ¿cuál debería ser la media de dicho grupo para que pueda considerase se que algo va mal con un riesgo de equivocarse que no supere el 1%?

Ejemplo 3

Una empresa comercializa una bebida refrescante, en un envase en cuya etiqueta se puede leer: «Contenido 250 cc». El «Departamento de Consumo» toma aleatoriamente 36 envases, estudia el contenido medio y obtiene una media de 234 cc y una desviación típica muestral de 18 cc. ¿Puede afirmarse con un 1% de significación que se está estafando al público? (Consideraremos estafa que el contenido medio sea menor que el expresado en la etiqueta.) Si en realidad la empresa estuviera defraudando puesto que su embotelladora tiene una media real de 235 cc, ¿cuál es la probabilidad de que al realizar el test no podamos establecer que hay fraude?

Investigaciones sobre problemas

Se tratará de conseguir, a partir de un texto o una situación cercana, que los alumnos realicen o completen una investigación autónomamente. Esto requerirá de ellos que en algunos momentos tengan que tomar decisiones u obtener informaciones, todo lo cual conducirá a que se impliquen en mayor grado en los contenidos estadísticos que dicha situación genera.

[Las investigaciones] requieren que en algunos momentos los alumnos tengan que tomar decisiones u obtener informaciones, todo lo cual conducirá a que se impliquen en mayor grado en los contenidos estadísticos que dicha situación genera.

Por otro lado, estas pequeñas investigaciones deben ser asequibles a los diferentes grados de madurez que podamos encontrar en un aula, pues no en vano uno de sus propósitos es el de permitir abordar de forma natural nuevos conceptos, a partir de su necesidad en la situación planteada. Pueden ser realizadas de forma individual, grupal o colectiva, dependiendo de las características propias de cada investigación y de cada grupo de alumnos. Sirvan como ejemplo:

Ejemplo 4

Es corriente que en televisión, veamos anuncios de presuntos adivinos del porvenir. Estudiaremos las posibilidades de que una persona pueda pasar por adivino, sin serlo.

Supongamos que una persona asegura ser capaz de adivinar lo que saldrá al lanzar una moneda. Haces la prueba, 1,2, ..., 5 veces y él acierta todas. Sin embargo, al sexto intento, falla. Tu dices que es un mentiroso, pero él afirma que no, que lo que ocurre es que algunas pocas veces tiene interferencias mentales, que le hacen fallar. Se llega al acuerdo de que si consigue acertar en un 90% de las ocasiones, se le puede considerar «adivino», es decir, con una capacidad sobrenatural y en caso contrario habrá de reconocer que sus capacidades son tan normales como las del resto de mortales.

Para estudiar la probabilidad de error en uno u otro sentido (error al considerarlo adivino si no lo es, o error de no considerarlo adivino siéndolo), establecemos como hipótesis nula, o hipótesis de partida, que esta persona es normal, siendo la posibilidad restante que tiene capacidades extraordinarias.

Sabemos que la probabilidad de acertar la predicción de un lanzamiento sin tener capacidades es del 50%. Si lanzásemos 10 monedas secuencialmente, tendríamos que darle la razó, si acierta un 90% o más, es decir 9 o 10 de las predicciones.

Si estudiamos el número de aciertos (éxitos) en 10 lanzamientos, vemos que sigue una distribución B(10;1/2) y, por tanto, la probabilidad de acertar en 9 o 10 ocasiones como resultado del azar es de:

$$P(X=9) + P(X=10) = 0{,}011$$

es decir un 1,1%. Esta será la probabilidad o riesgo de que aceptemos que es «adivino» siendo en realidad falso, es decir, si acierta 9 o 10 lanzamientos, la probabilidad de que sea adivino es del 98,9%, mientras que la probabilidad de que no lo sea es del 1,1%.

Ahora bien, el riesgo descrito anteriormente, es el riesgo de equivocarnos al hacer un juicio.

Pero ¿que hay del riesgo que corre esta persona, que sabe que es «adivino», de que por culpa de sus interferencias pueda deducirse que no es «adivino»? Imagina lo perjudicial que podría ser para su carrera (?).

Para calcular este riesgo, supongamos que ciertamente es «adivino» y que acierta estadísticamente en el 90% de los lanzamientos. Entonces para él, los 10 lanzamientos representan una B(10; 0,9) y, en consecuencia, su riesgo es que obtenga menos de 9 aciertos, es decir:

$$p(X<9) = p(X=0) + p(X=l) + \ldots + p(X=8) = 0{,}263$$

En consecuencia, la probabilidad de que siendo cierto que es «adivino» tengamos que rechazarlo es de aproximadamente el 26%.

Por tanto, si acierta en menos de 9 de los lanzamientos, la probabilidad de que estemos acabando con la carrera de un verdadero adivino es del 26%.

¿Habrá alguna forma de reducir el riesgo del «adivino»? ¿Y tu riesgo? ¿Se podrán reducir simultáneamente? ¿Podrías cuantificar los riesgos en estos casos? (Sugerencia: variar el número de de lanzamientos.)

Ejemplo 5

Ha sido desarrollada una prueba para detectar una enfermedad altamente contagiosa. Se realiza una prueba que pude dar A (positivo) o A (negativo) de acuerdo a las siguientes probabilidades (según que el individuo esté enfermo (H_0) o no (H_1)):

$p(A/H_0) = 0{,}95$ (Especificidad del test)

$p(A/H_1) = 0{,}90$ (Sensibilidad o potencia del test)

Calcular la proporción de enfermos diagnosticados como sanos, y de sanos diagnosticados como enfermos. Estas proporciones representan los dos tipos de error al realizar un contraste de hipótesis. Teniendo en cuenta el carácter altamente contagioso de la enfermedad y el resto de factores concurrentes ¿cuál te parece más grave y porqué?

Imagina que se pueden realizar independientemente tres pruebas en cada paciente. Ahora podrá establecerse como criterio para determinar si un paciente está sano, que tenga 3 negativos, al menos 2, o tan sólo 1. Establece un criterio de forma que el error que te parece más grave quede minimizado. ¿Cuáles serían la sensibilidad y especificidad del test en este caso?

Divulgación de situaciones reales relacionadas con la inferencia

Uno de nuestros objetivos ha de ser orientar a los alumno, hacia sus estudios posteriores y, por tanto, será importante hacer una especie de avance sobre lo que normalmente son temas específicos de ciertas profesiones, de una forma divulgativa.

Un ejemplo de este tipo de actividades sería la lectura de textos como el siguiente:

Uno de nuestros objetivos ha de ser orientar a los alumnos hacia sus estudios posteriores y, por tanto, será importante hacer una especie de avance sobre lo que normalmente son temas específicos de ciertas profesiones, de una forma divulgativa.

Ejemplo 6

«Fue en Norteamérica, en los años 20, donde surgieron los pioneros de la aplicación de métodos estadísticos, a la mejora de los procesos de producción para conseguir mayor grado de consistencia y calidad del producto final. Este tipo de métodos fue utilizado por la industria norteamericana durante la Segunda Guerra Mundial pero, tras ella, las empresas dejaron de utilizarlos, en gran medida, porque en aquellos momentos se podía fabricar en los Estados Unidos cualquier cosa y venderla sin problemas en los mercados mundiales. Por contra, Japón acabó la guerra con una industria arruinada. Los japoneses abrazaron enseguida, no sólo los métodos estadísticos aplicados a la fabricación sino, también, la filosofía de gestión que conllevaban. Pronto Japón conseguía abrirse mercados con artículos de gran calidad, mientras los Estados Unidos perdían progresivamente cuotas de mercado en favor de los japoneses, debido a la menor calidad de los productos que ofrecían.

En la actualidad, ninguna empresa que se precie puede despreciar este tipo de métodos, que permiten la mejora de los procesos de producción (con el ahorro de tiempo y dinero que ello supone), y de la calidad del producto final.

Pero, ¿qué es exactamente calidad? Alguien dijo alguna vez, que «un cliente satisfecho» es una buena definición. Otras definiciones incluyen términos tales como «concordancia del producto con las especificaciones del mismo», «ajuste a lo que el cliente espera», etc. Y ¿cómo se puede controlar o mejorar la calidad? No existe una única respuesta a esta pregunta, pero veremos ahora algunas de las herramientas que se emplean para el control de calidad.

Con respecto a la mejora de la calidad, existe un lema que se adapta a la mayoría de los casos, «reducir la variabilidad del proceso». Conseguirlo es costoso y complicado, dado que eliminar las variaciones naturales de un proceso, resulta bastante difícil.

La dispersión o variabilidad de un conjunto de datos es uno de los factores más importantes en estadística. El significado de la dispersión de los datos depende del contexto en el que se esté tratando.

Si una variedad de trigo tiene una alta variabilidad en sus cosechas, un campesino que la utilice no sabrá nunca hasta qué punto las cosechas de ese año van a ser o no suficientes, y preferirá siempre otra variedad con mayor homogeneidad. Si la variabilidad en el resultado de una operación quirúrgica llevada a cabo mediante una determinada técnica es muy afta, los cirujanos preferirán aplicar otra técnica cuyos resultados sean más predecibles. La calidad de los servicios o de los artículos que compramos depende no sólo de que sus características principales tengan una buena media, sino sobre todo de su homogeneidad. A nadie le gusta que si compra un paquete de 1 kg de un producto, éste pueda pesar 950 g. De la misma forma, no nos dice nada que el tiempo medio en que una compañía de mensajeros entrega un paquete en una ciudad sea de 40 minutos, si el nuestro nos llega al cabo de 4 horas.

Algunas oficinas bancarias han suprimido las colas múltiples delante de las ventanillas, por una sola cola que abastece a todas las ventanillas. ¿Acaso lo han hecho por que resulte menor el tiempo medio de espera de los clientes? No, el tiempo medio no varía pero, de esta forma, se trata de eliminar la variabilidad en los tiempos de espera (en el primer sistema si damos con una cola lenta podemos pasar mucho tiempo en ella). La homogeneidad de los resultados es, en términos económicos, de la máxima importancia y, normalmente, la clave para la calidad y el éxito.

Imagina, por ejemplo, que queremos controlar la calidad de embotellamiento de «ColaSola». Si las botellas han de contener 250 cc, será necesario, en primer lugar, que la máquina encargada del proceso tenga una media de 250 cc, con la menor variación posible. Imaginemos que se consigue que el proceso tenga la distribución N(250; 3).

Un proceso es estadísticamente estable cuando, en su tabla de control, las variaciones son naturales...

Utilizando la desigualdad de Chebyshev, sabemos que el 99,9% de las anotaciones deben estar en el intervalo

$$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$$

es decir entre 241 y 259 cc.

El proceso a seguir, incluye en primer lugar Introducir el uso de tablas de control, del tipo de la figura 1, de forma que de cierto en cierto tiempo, tomemos una botella, estudiemos su contenido y lo representemos.

El primer objetivo que hay que conseguir es la estabilidad estadística del proceso. Un proceso es estadísticamente estable cuando, en su tabla de control, las variaciones son naturales, es decir, las inherentes a cualquier proceso incapaz de producir cada bien, acción o servicio, de forma exactamente igual cada vez (lo cual corresponde a la mayoría de los procesos). Existen una serie de criterios objetivos para dictaminar si un proceso es estable, entre los que se incluyen, que los valores obtenidos estén entre los límites superior e inferior, determinados por los valores que se encuentran a 3 desviaciones típicas de la media, por encima y debajo, que no haya más de 8 valores seguidos por encima o debajo de la media, etc. Observando el gráfico de control, notaremos si se producen variaciones debidas a fallos mecánicos, falta de preparación de los operarios o de cualquier otro tipo, que den lugar a variaciones no naturales.

Además, si hacemos uso del Teorema Central del Límite, podemos mejorar la eficiencia de este procedimiento. En concreto, si tomamos muestras de tamaño 40 en lugar de valores individuales cada vez, dado que la variación de las medias es inferior, en concreto

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{40}}$$

la tabla de control será más sensible a las variaciones que se desea detectar.

Conseguida la estabilidad del proceso, se hace necesario, utilizar tablas de control de la calidad cada cierto intervalo de tiempo de forma que se detecten y se corrijan los problemas que se presenten.»

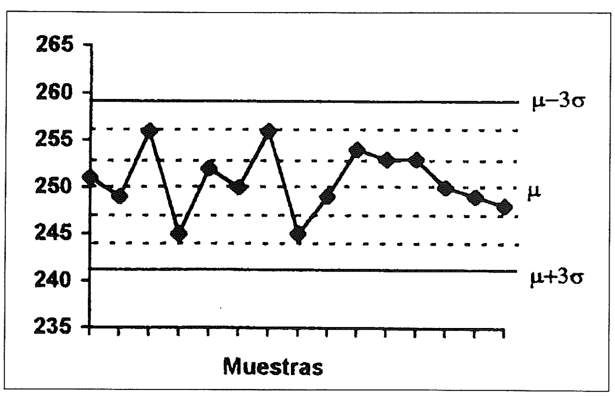


Figura 1

Estudio de artículos de la prensa

Resultará muy apropiado, mostrar a los alumnos, la profusión de datos estadísticos que existe en los medios de comunicación y, en particular, relacionados con la inferencia estadística.

Será además extremadamente útil que se realice una lectura crítica de tales informaciones, tratando siempre de consultar la ficha técnica del estudio, y poniendo en entredicho los resultados presentados sin tal garantía. Y es que existen un sinfín de casos en que se abusa del prestigio de los métodos estadísticos, para manipular a lectores, compradores, etc.

En otras ocasiones, la lectura de estos artículos, puede permitir acercar al alumno la utilidad de los métodos estadísticos, o comentar y afianzar conceptos estadísticos.

Un ejemplo podría ser el reproducido en la página siguiente. La lectura de este artículo, debería suscitar algunas dudas acerca de las conclusiones del titular, la representatividad de la muestra escogida, la fiabilidad de las conclusiones particulares, etc.

Proyectos

Como sabemos, la praxis es la mejor forma de aprehender conceptos. En tal sentido, podemos (dentro de las limitaciones propias de los contenidos y las técnicas conocidas por los alumnos) diseñar, o dejar que los propios alumnos diseñen, experiencias en las que se lleven a cabo todos los pasos del proceso estadístico. Desde la elección del problema, a la adecuada selección de la muestra o el margen de error, desde el planteamiento de un test de hipótesis a la confección y realización de la encuesta.

Tales experiencias deben ser tuteladas por el profesor, que deberá aconsejar y hacer notar los errores, pero sin entrar en la responsabilidad de la ejecución del proceso.

Puesto que nuestros centros suelen disponer de listas numeradas de todos los alumnos matriculados, parece lógico utilizar esta población como fuente para muestreos aleatorios, y aspectos relacionados con sus intereses e incertidumbres como objeto de las investigaciones. Entre estos últimos se podrán incluir aspectos tales como la estimación del número medio de horas de estudio de los alumnos, el grado de satisfacción de los alumnos con los servicios del centro, o la formulación y el contraste de hipótesis tales como «el 15% de los alumnos dispone de motocicleta» o «la talla media de los alumnos es de al menos 1,75 cm».

Hojas de cálculo

Las hojas de cálculo son un recurso privilegiado para la enseñanza de la Estadística. Capacidades como la de generación de números aleatorios, el uso de tablas, el cálculo de parámetros, etc., unidas a cualidades tales como agilidad de cálculo y potencia gráfica son las razones de esta idoneidad.

...donde las hojas de cálculo alcanzan su máximo potencial es en su capacidad para realizar simulaciones que permitan justificar resultados teóricos.

Resulta pues muy apropiada su utilización para facilitar cálculos, o realizar representaciones gráficas; pero donde las hojas de cálculo alcanzan su máximo potencial es en su capacidad para realizar simulaciones que permitan justificar resultados teóricos. Pueden utilizarse para simular muestreos y estudiar su representatividad, estudiar la influencia del nivel de confianza o el tamaño de la muestra en el error de estimación, confirmar el nivel de significación de un test,... Analizaremos su uso mediante el siguiente ejemplo (figura 2).

Esta hoja está pensada, para simular la distribución muestral de medias de una población. En concreto, se generan aleatoriamente dígitos entre 1 y 9 en tandas de 50x40 Luego se analizan las medias de los 10, 20, 30 y 40 elementos de cada tanda, considerados como muestras de los tamaños señalados. Estamos, por tanto, tomando muestras de una población uniformemente distribuida entre los valores 1 y 9 (para poblaciones con forma «normal», los resultados serían más claros aún). Automáticamente, las medias obtenidas son representadas en histogramas cuyas clase comienzan en 3 y acaban en 7, con una amplitud de 0,25. Cada vez que se pulsa el botón adecuado, se generan 50 nuevas muestras cuyas medias se acumulan a las anteriores. De esta forma se van formando los histogramas correspondientes a las medias de 50 muestras, 100 muestras..., para los tamaños n=10, n=20, n=30 y n=40.

Se puede comprobar a partir de los histogramas (figuras 3, 4 y 5) que :

- La media de las medias muestrales tiende a valer 5 al igual que la media poblacional.
- Las medias muestrales, se distribuyen claramente de forma «normal» a partir de n=30.
- La desviación típica de la media, va reduciéndose a medida que aumenta el tamaño muestras.

Adena, la Cruz Roja y la Corona, instituciones preferidas por los españoles

Los artistas son los más admirados, según una macroencuesta del Círculo de Lectores

P. S., Madrid
La organización ecologista Adena, la Cruz Roja, el Rey y la familia Real son las instituciones mejor valoradas por los españoles, según se desprende de una encuesta con 247 preguntas, realizada entre 50.000 socios del Círculo de Lectores, con el apoyo de la Unesco, y dada a conocer ayer con la presencia de Federico Mayor Zaragoza, secretario general de este organismo. Las instituciones menos valoradas son los sindicatos, patronales, partidos, Gobierno y Opus Dei. El 72,7% admite que "la unidad de España es una realidad que debe depender de la voluntad de los ciudadanos".

VALERIE DE LA DEHESA

Hans Meinke, director del Círculo de Lectores, y Federico Mayor Zaragoza, secretario General de la Unesco.

La familia, seguida de la felicidad, la amistad y morir con sufrimiento, son las mayores preocupaciones de los españoles en el campo de los afectos. La libertad es el valor prerido, seguido de la justicia. Los valores menos apreciados son el éxito sexual, la ascensión social, la buena comida, el atractivo personal y la religión.

En el campo de los problemas de España, la falta de trabajo y el paro es la principal preocupación de los encuestados (70,1%), seguida por el terrorismo, la droga y la corrupción. Las últimas preocupaciones son la unidad territorial de España, el poder creciente de los medios de comunicación, la importancia de España y la baja tasa de natalidad.

La asociación ecologista Adena (3,72), la Cruz Roja (3,56) y la Monarquía y el Rey (3,51) son las instituciones que reciben las mejores calificaciones, de 1 a 5, seguidos por las radios privadas, la Academia de la Lengua y el Icona. Los últimos puestos los ocupan los sindicatos (1,77), las patronales (1,76), el Gobierno de España (1,60), los partidos políticos (1,45) y el Opus Dei (1,39).

En el campo de las instituciones internacionales, las mejor evaluadas son Médicos sin fronteras (4,62), Unicef (4,04) y Greenpeace (3,99). Las peor, la Unión Europea, la Fifa, la Otan, El Vaticiano y el Papa, y el Fondo Monetario y el Banco Mundial (2,01).

Jóvenes y mujeres

Igual que la composición del Círculo de Lectores (1,5 millones de lectores, el 14% de los hogares españoles), en la encuesta hay un 15% de mayor representación de mujeres, y predomina la población joven. Ante la obligación de elegir entre las dos opciones, el 54,2% de los encuestados prefirieron la paz sin libertad a la libertad sin paz (41,6%). La salud (51%) es claramente el valor más importante frente al amor y la amistad (42,7%), el dinero y el poder económico (2,4%), y la fama y el éxito (0,4%).

La formulación "la política es necesaria y digna" es preferida por el 65,9% de los encuestados, frente a la inversa (30,4%). Para el 72,7% "la unidad de España es una realidad que debe depender de la voluntad libre de los ciudadanos", en tanto que para el 23,7% "la unidad de España es inviolable y debe prevalecer incluso sobre la voluntad libre de los ciudadanos".

Los artistas tienen la profesión mejor evaluada (7,61), seguida por los escritores. Banqueros y políticos (2,88) ocupan los últimos lugares. Como políticos ejemplares, Julio Anguita, Felipe Gonzalez y José María Aznar, por ese orden, fueron propuestos por los encuestados, así como Mijail Gorbachov y Nelson Mandela en el extranjero.

Y como figuras ejemplares del mundo literario fueron elegidos Antonio Gala en España y Gabriel García Márquez entre los extranjeros. En el mundo musical, José Luis Perales y Luciano Pavarotti. En el cine, Antonio Banderas y Steven Spielberg. En la plástica, Antonio López y Fernando Botero. El 56,9% de los encuestados se considera "no el ser más feliz del mundo, pero no se cambiaría por nadie".

La encuesta, dirigida por el sociólogo Luis Martín de Dios, ha sido publicada por el Círculo de Lectores junto con artículos de opinión y análisis de Fernando Morán, Victoria Camps, Eduardo Punset, Enrique Miret Magdalena, Francisco Nieva, Manuel Hidalgo, Joaquín Estefanía y Herman Tertsch, entre otros. En la presentación, Hans Meinke, director del Círculo, subrayó que en ella se retrata una población con una notable madurez, ecuanimidad y sólidas convicciones democráticas. Para Fernando Moran, refleja a un país normalizado que se muestra poco competitivo en los los valores nacionales. Mayor Zaragoza afirmó que en este fin de siglo la ética del tiempo es el campo de reflexión obligada, y añadió que cada vez se hace más urgente la toma de decisiones en medio ambiente y la asistencia a países tercermundistas.

El País. 10-4-1996

COMPROBACIÓN TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

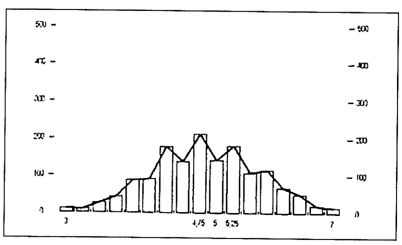
Muestra

Datos generados aleatoriamente entre 1 y 9.

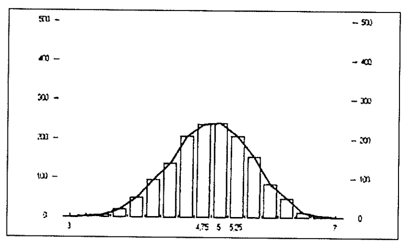
Media de los n primeros valores de la muestra

Muestra																																									n=10	n=20	n=30	n=40
1	1	4	3	4	8	4	1	6	4	1	1	4	8	3	2	6	5	4	8	8	7	2	8	4	6	3	1	3	2	7	6	7	8	9	9	7	8	3	2	2	3,6	4,25	4,27	4,73
2	5	3	9	2	7	8	7	6	9	8	7	5	4	6	8	5	1	1	3	4	1	4	4	6	7	5	9	7	2	1	3	1	8	3	2	5	6	2	8	6	6,4	5,4	5,13	4,95
3	8	8	4	8	9	9	2	8	6	3	6	3	7	5	2	5	3	4	8	1	8	2	8	2	5	9	4	9	2	1	4	4	3	4	5	1	7	4	7	7	6,5	5,45	5,3	5,13
4	2	4	3	8	7	2	9	7	2	4	3	2	8	5	3	8	2	1	8	4	9	1	2	3	5	3	4	6	8	8	6	8	6	6	6	2	7	1	3	2	4,8	4,6	4,7	4,7
5	6	8	2	7	6	8	8	5	5	4	5	2	8	3	1	6	7	1	7	8	3	3	7	6	7	3	9	3	1	6	7	5	4	2	1	1	9	9	2	8	5,9	5,35	5,17	5,08
6	3	1	5	7	7	5	1	2	3	7	5	4	2	1	2	8	8	8	1	2	4	8	7	8	2	9	2	3	6	9	3	5	7	9	2	6	9	8	3	3	4,1	4,1	4,67	4,88
7	6	5	7	7	5	9	7	4	3	9	9	7	9	9	6	4	3	1	6	9	9	3	1	5	4	4	1	8	1	3	3	4	7	2	1	6	6	4	6	6	6,2	6,25	5,47	5,23
8	8	6	2	7	9	3	4	4	1	9	3	7	3	4	9	8	7	9	7	4	9	1	1	9	6	7	6	7	8	9	4	7	1	2	8	9	5	1	1	5	5,3	5,7	5,9	5,5
9	5	6	2	2	9	9	6	4	8	2	1	7	5	8	7	6	9	5	5	6	4	2	6	6	4	1	4	3	3	5	7	7	9	7	2	6	4	5	7	8	5,3	5,6	5	5,3
10	5	6	2	3	3	2	2	8	1	7	8	3	7	1	4	1	8	2	4	2	9	6	8	7	1	5	3	1	6	2	1	1	6	4	5	9	8	1	9	7	3,9	3,95	4,23	4,45
11	1	5	5	8	9	4	7	4	9	9	8	9	1	7	6	1	5	5	6	7	5	2	4	3	2	5	5	9	8	2	1	4	5	6	5	2	3	7	1	1	6,1	5,8	5,37	4,9
12	1	8	8	6	8	2	5	1	6	5	3	5	1	8	5	8	1	8	9	4	7	9	2	4	1	1	3	8	9	5	4	5	7	7	9	5	7	9	2	4	5	5,1	5,03	5,25
13	5	5	2	2	3	6	9	6	3	6	1	7	7	4	4	1	6	2	9	8	9	9	3	2	3	7	4	2	5	3	9	8	6	8	1	1	2	2	8	9	4,7	4,8	4,77	4,93
14	4	8	8	1	9	4	9	9	1	6	7	1	9	1	5	7	9	2	2	6	5	5	9	2	1	2	4	3	9	2	5	1	5	2	3	8	9	9	9	5	5,9	5,4	5	5,15
15	8	8	9	6	5	7	4	8	4	7	1	2	3	5	9	4	9	5	5	6	1	8	2	5	5	5	1	1	2	3	8	9	2	6	9	1	8	4	7	8	6,6	5,75	4,93	5,25
16	9	1	3	4	7	5	6	3	3	5	4	5	9	7	8	2	2	1	6	6	1	3	6	1	5	1	7	9	2	4	7	8	5	1	4	3	2	4	4	2	4,6	4,8	4,5	4,38
17	7	2	7	9	7	9	8	2	6	3	5	6	1	7	7	6	9	4	2	8	6	3	7	2	1	6	5	9	9	7	2	6	3	1	3	7	8	4	2	8	6	5,75	5,67	5,35
18	1	9	2	2	5	8	3	9	4	4	4	2	7	7	6	6	3	8	7	7	3	3	5	3	8	4	7	5	6	6	8	6	9	7	3	4	8	3	7	1	4,7	5,2	5,13	5,25
19	8	2	7	7	3	8	3	1	9	5	1	1	7	6	6	8	2	1	1	2	6	1	2	7	3	2	2	8	3	2	5	4	2	8	7	1	7	6	5	3	5,3	4,4	4,13	4,3
20	8	7	8	6	7	3	7	1	8	6	1	4	8	2	4	9	4	3	1	5	9	9	1	9	9	4	5	7	9	3	3	3	6	4	3	8	2	4	4	3	6,1	5,1	5,57	5,18
21	9	8	4	7	5	9	7	6	6	2	6	1	9	2	6	7	4	3	5	9	4	7	6	6	4	6	3	8	9	4	9	5	7	2	5	1	6	8	7	6	6,3	5,75	5,73	5,7
22	8	1	9	7	7	7	6	9	9	6	8	3	1	4	4	8	8	7	8	9	7	2	3	5	5	7	1	4	6	4	8	5	3	6	6	4	3	9	6	7	6,9	6,45	5,77	5,75
23	8	5	4	3	1	4	1	6	4	5	8	8	1	7	9	9	6	4	7	8	6	4	7	1	1	1	4	9	9	7	2	8	7	8	9	6	5	4	3	9	4,1	5,4	5,23	5,45
24	6	4	8	9	5	8	3	9	2	7	8	9	4	6	6	7	2	3	8	9	8	2	2	2	4	6	8	3	3	7	1	2	8	7	5	6	9	6	2	6	6,1	6,15	5,6	5,5
25	8	5	4	6	5	5	8	3	9	3	5	4	1	4	3	7	7	8	6	4	2	4	5	7	9	7	1	3	9	7	8	1	9	3	1	5	4	5	5	5	5,6	5,25	5,3	5,13
26	1	5	1	4	6	4	6	7	3	2	9	2	6	4	6	1	8	8	9	5	7	1	4	6	4	8	8	9	5	7	5	9	4	7	1	4	2	3	6	6	3,9	4,85	5,2	5,08
27	5	4	2	5	6	9	6	6	7	9	2	4	3	8	4	1	4	1	7	8	5	4	6	8	2	7	3	6	6	9	2	6	6	3	9	9	3	3	3	7	5,9	5,05	5,23	5,2
28	7	4	8	2	5	1	7	4	5	7	5	2	3	9	6	1	7	4	3	7	8	4	1	4	9	1	4	7	9	6	9	4	1	9	5	5	6	9	1	1	5	4,85	5	5
29	5	2	4	7	3	4	4	8	7	6	9	2	2	7	4	4	5	9	4	3	8	5	2	7	3	8	6	1	3	5	7	6	1	3	5	4	9	8	4	3	5	4,95	4,9	4,93
30	5	4	1	6	8	3	9	8	9	6	3	5	6	3	9	8	3	3	9	7	2	7	3	5	1	5	2	6	3	5	5	3	1	4	5	7	2	4	5	9	5,9	5,75	5,13	4,98
31	4	8	6	3	7	4	2	3	1	9	7	8	5	9	9	4	2	7	9	3	1	4	9	3	6	5	7	5	6	7	6	5	2	1	8	9	8	2	3	3	4,7	5,5	5,43	5,25
32	2	8	8	3	3	9	7	9	4	3	8	6	5	7	6	8	4	9	6	5	3	5	1	7	3	1	1	1	4	7	3	7	3	8	5	7	9	8	7	4	5,6	6	5,1	5,35
33	9	4	6	9	4	1	5	4	2	8	4	4	4	1	6	6	8	9	1	9	5	4	6	3	9	2	6	7	4	6	7	5	4	3	8	6	8	5	5	2	5,2	5,2	5,2	5,23
34	8	8	5	2	5	9	5	4	3	9	9	8	3	7	1	3	2	3	9	6	2	3	2	8	2	6	1	4	5	6	4	1	4	4	7	8	4	1	8	8	5,8	5,45	4,93	4,93
35	7	5	7	2	9	7	8	2	2	7	1	6	8	9	6	2	4	1	5	2	4	1	5	1	4	8	5	4	7	1	5	7	5	9	5	8	5	9	9	5	5,6	5	4,67	5,18
36	3	5	9	3	7	8	4	9	7	2	4	5	5	7	1	8	9	6	3	7	6	8	7	4	8	8	7	8	7	3	8	8	2	1	2	9	1	9	1	4	5,7	5,6	5,93	5,58
37	9	2	1	4	5	2	3	1	1	1	3	3	2	5	6	3	4	1	2	6	3	1	4	6	3	3	1	9	1	4	8	5	8	6	2	9	7	4	3	5	2,9	3,2	3,3	3,9
38	7	2	2	4	3	1	2	1	9	2	5	5	5	6	6	5	8	6	4	5	3	2	9	3	3	6	3	4	3	5	3	3	9	5	6	1	5	2	1	5	3,3	4,4	4,3	4,23
39	9	7	1	9	8	8	7	3	6	9	8	5	9	5	5	2	9	8	2	7	9	4	4	8	4	5	9	9	6	1	2	4	9	4	9	1	5	6	6	4	6,7	6,35	6,2	5,9
40	3	8	1	6	1	6	1	5	7	3	5	6	6	4	7	4	8	7	7	7	6	5	4	3	8	6	1	8	2	2	6	4	9	3	5	2	9	6	6	6	4,1	5,1	4,9	5,08
41	5	2	4	4	6	7	7	2	5	8	6	2	5	2	8	3	3	1	1	5	5	6	1	1	9	3	1	6	1	1	5	2	2	7	1	5	2	2	4	1	5	4,3	4	3,78
42	1	2	7	1	3	1	5	3	8	1	2	3	1	5	8	9	6	9	2	2	7	3	5	8	8	3	2	8	4	7	1	6	5	4	5	6	2	7	7	3	3,2	3,95	4,47	4,5
43	6	7	8	2	9	9	7	7	1	2	5	5	5	2	5	3	4	2	9	4	4	7	7	4	1	6	8	6	4	1	2	3	8	8	9	7	1	1	9	1	5,8	5,1	5	4,98
44	8	5	3	4	8	3	1	7	6	2	8	6	4	2	4	9	3	3	6	7	7	1	4	1	5	9	3	8	3	9	3	9	4	9	7	6	2	2	4	1	4,7	4,95	4,97	4,9
45	6	1	1	5	4	5	2	4	2	3	8	9	2	5	9	1	6	1	5	9	7	3	3	8	8	8	7	8	6	8	7	3	5	2	5	3	8	1	6	5	3,3	4,4	5,13	4,98
46	4	4	8	6	5	5	4	4	1	8	3	7	1	6	3	7	2	3	3	2	1	8	2	5	6	7	5	4	6	3	5	4	7	6	1	6	6	6	3	8	4,9	4,3	4,43	4,63
47	3	6	9	7	2	9	8	4	6	7	1	9	9	7	8	4	7	6	8	9	8	8	6	3	4	8	8	6	1	8	2	1	2	3	4	3	3	1	1	4	6,1	6,45	6,3	5,33
48	2	4	6	6	3	1	1	1	6	8	3	5	7	5	9	9	7	2	9	3	4	7	7	3	3	6	1	1	1	5	7	3	1	4	2	7	9	5	4	5	3,8	4,85	4,5	4,55
49	1	6	8	4	3	9	8	1	3	1	3	6	1	2	7	2	6	7	7	6	1	6	9	6	8	7	4	2	6	2	6	1	5	3	2	9	3	8	6	7	4,4	4,55	4,73	4,8
50	7	6	4	9	7	5	5	4	8	3	6	2	6	7	1	2	4	7	2	6	8	6	8	9	7	5	7	6	8	7	1	5	6	2	6	2	3	1	8	5	5,8	5,05	5,73	5,28

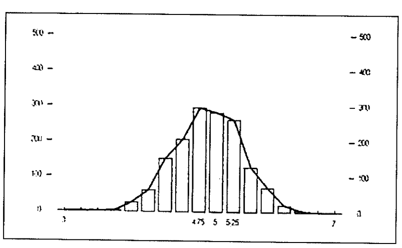
Distribución muestral de medias



n=10

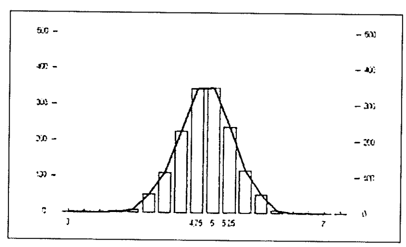


n=20



n=30

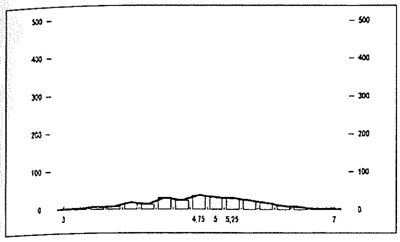
Muestras acumuladas: 1500



n=40

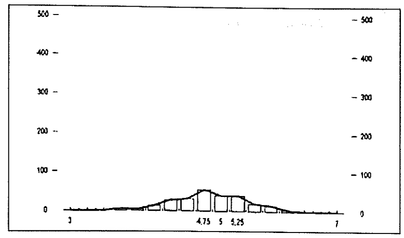
Figura 2

Distribución muestral de medias

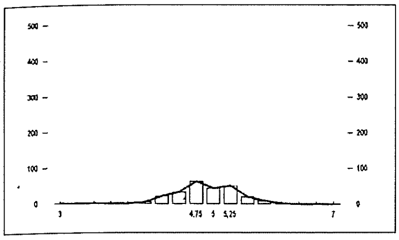


n=10

n=20



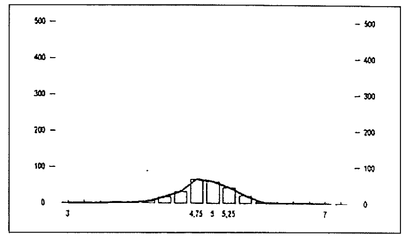
Muestras acumuladas: 250



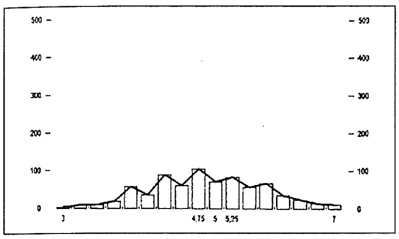
n=30

Figura 3

n=40

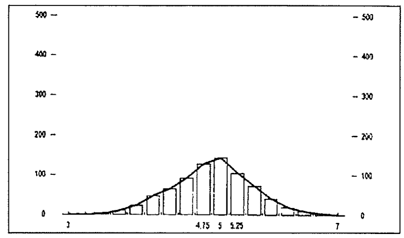


Distribución muestral de medias

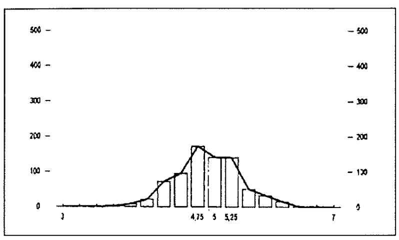


n=10

n=20



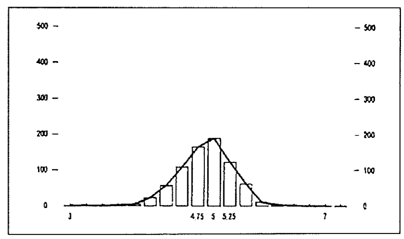
Muestras acumuladas: 750



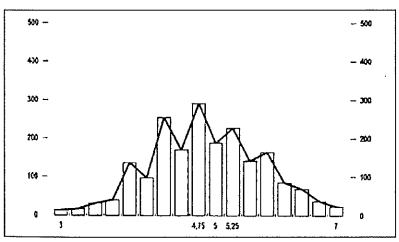
n=30

Figura 4

n=40

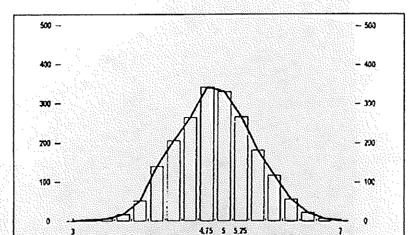


Distribución muestral de medias

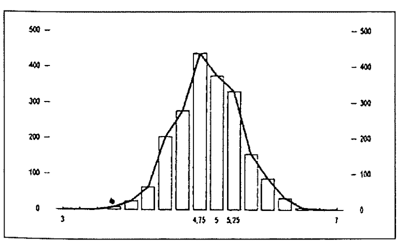


n=10

n=20



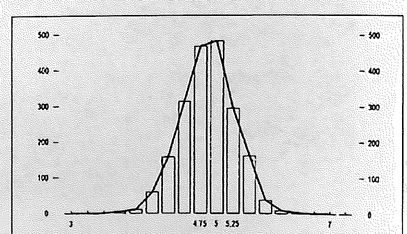
Muestras acumuladas: 2000



n=30

Figura 5

n=40



Recursos obtenidos a través de Internet

He dejado para el final, el que considero el recurso con mayor potencial, no tan sólo para la enseñanza de la Estadística, sino en general para las Matemáticas y la educación. Su único inconveniente, es que la mayor parte de la información que obtengamos estará en inglés.

No es este artículo el lugar más idóneo para comentar en profundidad la variedad de recursos que están a nuestra disposición en la red, por lo que me limitaré a comentar superficialmente los más importantes para la enseñanza de la Estadística. Entre ellos cabe destacar el acceso a bancos de datos de todo el mundo, muchos de ellos especialmente pensados para la práctica de técnicas estadísticas, la obtención de software educativo especialmente enfocado hacia la enseñanza, acceso a bases de datos formadas por experiencias docentes, problemas y, en genera,l recursos para el aula. También a través de los grupos de noticias, podemos hablar, intercambiar experiencias o solucionar dudas con otros docentes interesados en la enseñanza de la estadística, o las matemáticas en general. Asimismo, podremos acceder a un gran número de publicaciones electrónicas especialmente dirigidas a la enseñanza de la estadística.

Sirva como ejemplo de las posibilidades que se abren, la siguiente dirección http://www.forum.swarthmore.edu/, página web de "THE MATH FORUM" (figura 6).

Aquellos interesados en mayor información, o en alguno de los materiales aquí esbozados, pueden ponerse en contacto con el autor, a través de e-mail

(jmiguefr@idec,es)

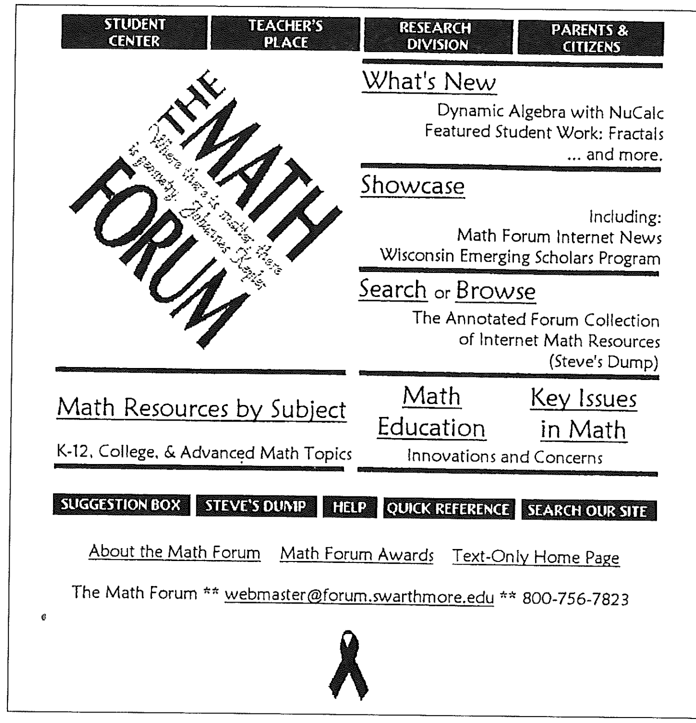


Figura 6

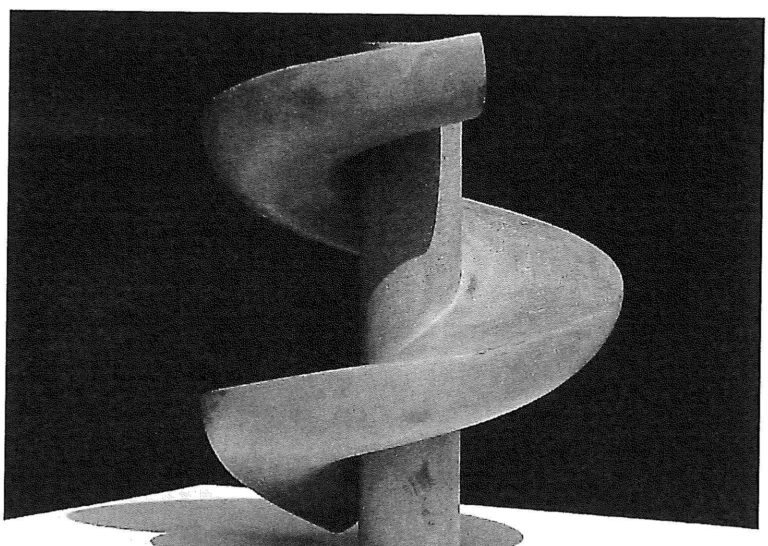
José Miguel Rodríguez
IES Pérez Galdós
Las Palmas de Gran Canaria
Sociedad Canaria de
Profesores de Matemáticas
Isaac Newton

Bibliografía

JOHNSON, R. (1990): *Estadística Elemental,* Grupo Editorial Iberoamericano, México.

RÍOS, S. (1970): *Métodos Estadísticos,* Ediciones del Castillo, Madrid.

TRIOLA-FRANKLIN (1994): *Business Statistics,* Addison-Wesley.



Rampa de caracol
Javier Carvajal

SUMA 24

febrero 1997, pp. 99-102

El saber práctico del solador: funciones, errores o ¿cuánto mide el rodapié de mi casa?

Jose Manuel Pichel Cosme

IDEAS Y RECURSOS

Esta experiencia de aula utiliza la realidad para hacer matemáticas. En concreto, se plantea la cuestión de averiguar la relación que existe entre la superficie de una vivienda con el perímetro de todas las habitaciones de la misma.

ALGUNAS profesiones prácticas tradicionales aplican en sus trabajos leyes, relaciones, procedimientos que constituyen un saber práctico cuyo análisis puede ser una tarea interesante desde el punto de vista matemático. La cubicación de la madera, la cuerda de doce tramos, la medición de la capacidad de toneles, constituyen ejemplos de lo que se denomina etnomatemática.

Recientemente tuve que comprar plaqueta cerámica para renovar el suelo de una vivienda. El problema se planteó al encargar el rodapié. La superficie es la característica de las viviendas, pero, ¿cuánto mide el perímetro de todas las habitaciones de la casa? Un conocimiento matemático elemental distingue entre los dos conceptos, área y perímetro. Un conocimiento experto de solador los hace equivalentes:

—«Si su casa es de 90 m^2, lleve usted 90 metros de rodapié» –afirmó tajante el solador.

¿Será razonable esa estimación?

Supongamos una habitación cuadrada de lado x metros. La superficie será:

$$A = x^2$$

En el caso de que la habitación tenga una puerta de 1 metro la longitud del rodapié será:

$$L = 4x - 1$$

¿Para qué valores de x nuestro solador está en lo cierto? Resolvemos la ecuación:

$$x^2 = 4x - 1$$

Es decir:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$2+\sqrt{3} \quad y \quad 2-\sqrt{3}$$

En el caso de una vivienda real

$$x = 2+\sqrt{3}$$

ya que el otro valor es desechable. (Ver figura 1.)

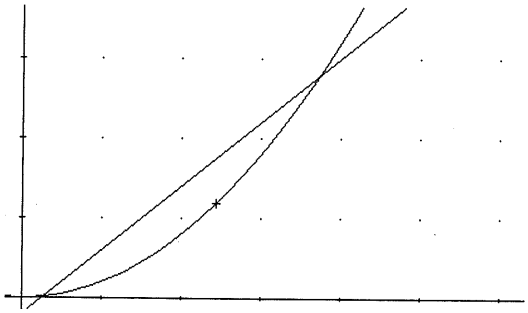


Figura 1. Parábola y recta

Tenemos, por tanto, una habitación cuyo lado mide aproximadamente:

$$x_1 \approx 3{,}73 \text{ m}$$

La superficie de la habitación sería de:

$$A_1 \approx 13{,}93 \text{ m}^2$$

¿Que pasaría si la habitación tuviera dos puertas? La ecuación que habría que resolver sería:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

de cuyas soluciones obtendríamos el valor del lado de la habitación que sería:

$$x_2 \approx 3{,}41 \text{ m}$$

y la superficie:

$$A_2 \approx 11{,}66 \text{ m}^2$$

Con tres puertas obtendríamos:

$$x_3 = 3 \text{ m} \qquad A_3 = 9 \text{ m}^2$$

Igualmente para cuatro puertas:

$$x_4 = 2 \text{ m} \qquad A_4 = 4 \text{ m}^2$$

Gráficamente las soluciones citadas serían los puntos de corte de la familia de parábolas con el eje OX, según muestra la figura 2:

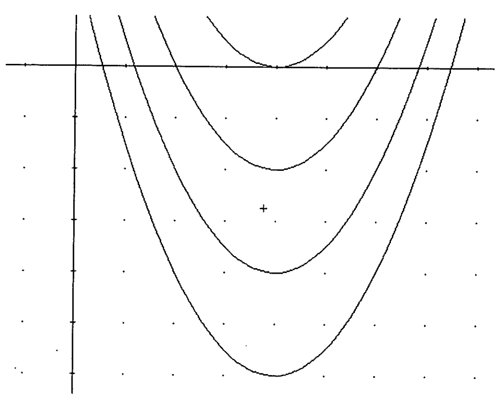


Figura 2

De las dos soluciones posibles, la menor es desechable.

Para un mayor número de puertas las soluciones se aproximan, tomando el valor 2 para el caso de habitación cuadrada y cuatro puertas.

Para un número de puertas $n > 4$ no existe solución real; la parábola no corta al eje OX, ya que siempre es mayor la superficie que el perímetro.

Tomando el caso de una sola puerta, y llamando *a* y *b* a los lados de una habitación cualquiera de forma rectangular, las situaciones de menor error absoluto, al tomar el perímetro como del mismo valor que el área, serán las que den como superficie en torno a 13,93 m ≈ 14 m. (Un ejercicio interesante consistiría en justificar esta afirmación.) Luego:

$$a \times b = 14$$

Representamos gráficamente la hipérbola en la figura 3 (consideramos sólo la rama de la hipérbola para $x > 0$).

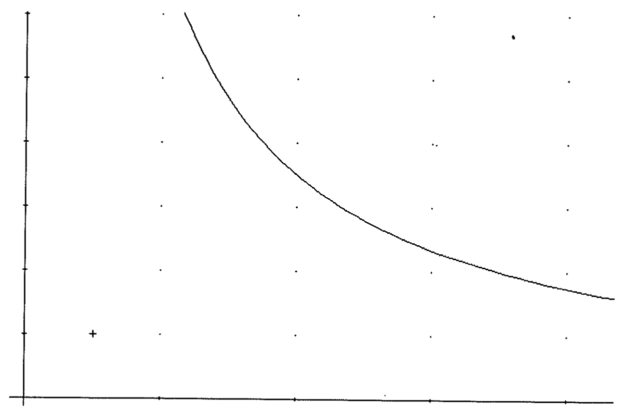


Figura 3

Igualmente podríamos obtener las correspondientes hipérbolas para los casos de *n* número de puertas.

En la realidad podríamos establecer una restricción sobre los valores de *a* y *b*. La relación entre los lados de una habitación real, podemos suponerla en torno a dos tercios. Representamos en la figura 4 las rectas:

$$b = \frac{2}{3}a \quad \text{y} \quad b = \frac{3}{2}a$$

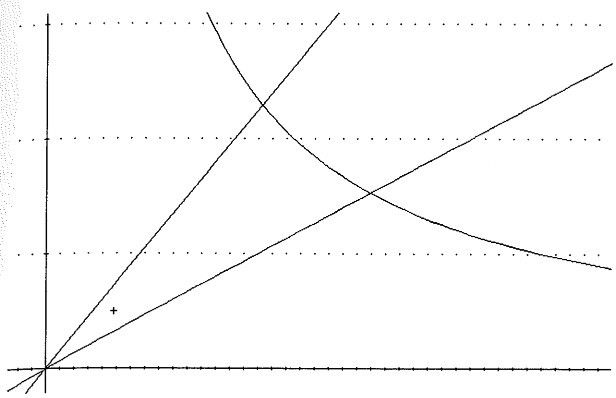


Figura 4

Los puntos de corte de las rectas con la rama de la hipérbola dan, aproximadamente 3,05 y 4,58. Para el valor más extremo el perímetro sería:

$$2 \times 3{,}05 + 2 \times 4{,}58 - 1 = 14{,}26.$$

El error relativo máximo estaría en torno a 0,26/14 ≈ 2%.

Estudiamos la relación entre la superficie de la habitación cuadrada y su rodapié. Llamamos E a esa función:

$$E = \frac{x^2}{4x-1}$$

Esta función nos da la relación entre la superficie de la habitación cuadrada y el rodapié. Para el valor x = 3,93 la función vale 1.

¿Cómo crece la función E?

Hacemos su gráfica (figura 5):

Es claro que la función E se puede aproximar a una relación lineal para valores altos de la *x*. El estudio de este problema permite plantear cuestiones clarificadoras de algunos conceptos que el alumnado percibe como muy abstractas. ¿Qué sentido tiene la asíntota? ¿Que significado tiene el siguiente límite?:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{4x-1}}{x} = \frac{1}{4}$$

¿Qué pasa en x = 1/4? ¿que sentido tienen, en la realidad del problema, los valores de x < 1? Son preguntas que permiten al alumno entender significativamente el problema.

Más clara puede aparecer la relación entre el perímetro y el área, haciendo un cambio de variable. Llamando al rodapié p = 4x – 1 obtenemos:

$$E = \frac{\left(\frac{p+1}{4}\right)^2}{p} = \frac{p}{16} + \frac{1}{16p} + \frac{1}{8}$$

Para valores altos de p podemos aproximar E = (1/16)p. El error cometido para p = 10, valor medio del rodapié de una habitación normal, se podría aproximar a:

$$E = \frac{10}{16} + \frac{1}{8} = \frac{12}{16}$$

luego le faltarían 4/16 para que E = 1, por tanto, para que el error absoluto sea cero. Podríamos analizar el error relativo:

$$E_R = \frac{x^2 - 4x + 1}{4x-1} = E - 1$$

En una habitación de 10 m de perímetro, el error cometido será de 0,25 x 10 = 2,5 (ver figura 1), siendo el rodapié mayor que el área. Si una casa tiene 4 huecos como

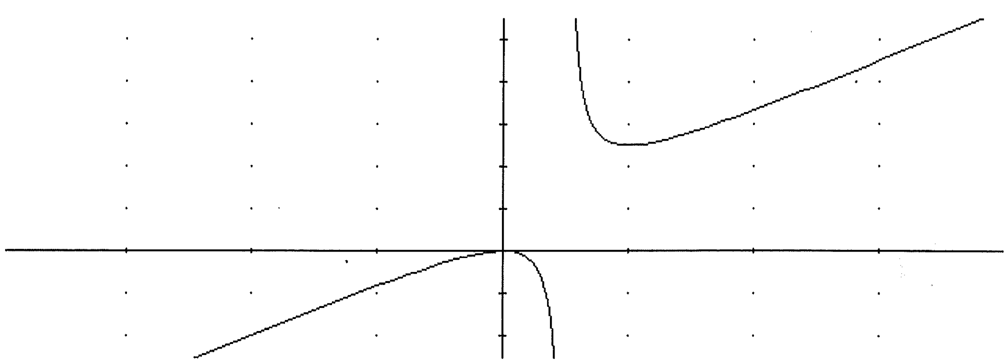


Figura 5

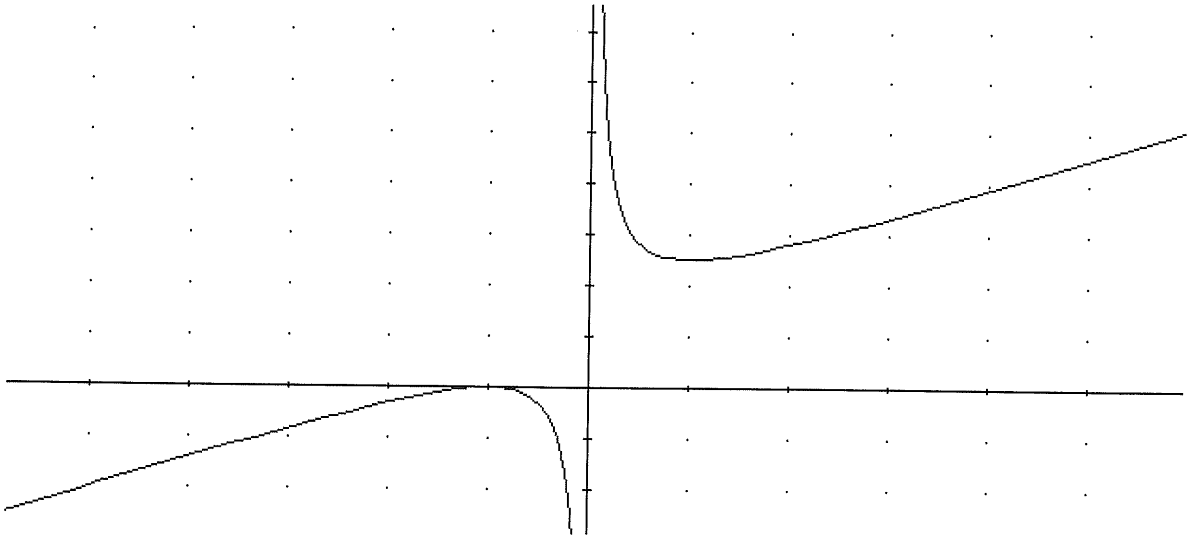


Figura 6

este, el error será igual a la medida del rodapié, es decir 10. Este error se compensa con el hecho de que en la cocina y cuartos de baño, cuya superficie estaría en torno a 10 m^2, no se coloca rodapié. La aproximación del albañil es buena.

Podríamos jugar con este tipo de relaciones, estudiando el comportamiento de pasillos, salón, etc., pero sería interesante generalizar, aproximar, estudiar un entorno de la función,...

Si representamos gráficamente la función E (figura 6) vemos que E crece con el valor de p, casi linealmente. ¿Qué significado tendría la siguiente recta?:

$$E = \frac{1}{16}p + \frac{1}{8}$$

Si llamamos s a la superficie, podríamos escribir para valores grandes de p:

$$\frac{s}{p} = \frac{p}{16}$$

En definitiva la relación entre la superficie y el rodapié sería la misma que entre el rodapié y 16. De nuevo encontramos una aproximación $E \approx 1$ para $p \approx 16$.

La aplicación del conocimiento matemático es una de las claves de un aprendizaje matemático significativo. A veces, es difícil transmitir a los alumnos la utilidad de algunos contenidos, pero siempre se pueden encontrar situaciones que les hacen evidente el significado de algunas técnicas matemáticas y la convicción de que utilizar el conocimiento matemático permite un mejor análisis y resolución de algunos problema. Por otro lado, es necesario que, desde la educación matemática se traten la estimación, el error, la aproximación tanto por su utilidad formativa y aplicabilidad en física, especialmente, pero también porque permite educar al alumno en una especie de «pensamiento difuso» en gran medida más cercano a él y más «holístico» ya que exige un control global del problema y sus significados.

José Manuel Pichel
Centro de Formación
Continuada do Profesorado
Ferrol

SUMA 24
febrero 1997

Publicidad matemática y un enigma arqueológico

CORREO DEL LECTOR

PUBLICIDAD y Matemáticas

En los números 564 y 565 de *Comunidad Escolar* se ha publicado una página-anuncio en la que se promociona un programa de Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO) de Edelvives para Matemáticas de 3.° a 6.° de Primaria. Bajo el lema «El primer profesor de Matemáticas al que todos los alumnos adorarán», aparecen profesores de varias disciplinas con objetos que les identifican (balón, microscopio, globo terrestre) y, en primer plano, un feliz profesor (se da a entender que es de Matemáticas), que muestra un ordenador.

Como profesor de Matemáticas considero que este anuncio transmite una serie de prejuicios contrarios a nuestra labor profesional:

— *Si bien otros profesores pueden llegar a ser adorados por todos los alumnos, nunca el de Matemáticas* (hasta la llegada del programa redentor). Es decir, *las Matemáticas son en sí mismas algo antipático y nunca atractivo o digno de ser amado.*

— *Los profesores debemos competir en la oferta de cascabeles y artilugios con los que ganar la adoración del alumnado.* Parece que no hubiera ninguna posibilidad para el profesorado de Matemáticas salvo el ordenador.

— *Los alumnos rechazan las Matemáticas ya en 3.° de Primaria y es una enseñanza conductista («la solución correcta de los ejercicios recibe un premio») la que va a arreglar la situación.*

Ante tales despropósitos deseo expresar que:

- No creo que la función del profesor sea la de llegar a «ser adorado» por todos los alumnos. Su éxito reside en conseguir que éstos se identifiquen con el camino de conocimiento que les propone, no con su persona.
- Existen muchos materiales para el aprendizaje de las Matemáticas desde un enfoque experimental y lúdico (en el Taller de Matemáticas del 2.° ciclo de ESO se

utilizan a diario), pero no es la cacharrería, sino la aventura y el reto intelectual nuestro primer material de trabajo.

- El ordenador puede ofrecer contextos de aprendizaje muy valiosos, pero no es la «zanahoria electrónica» de la EAO la que va a remediar el rechazo ni el fracaso escolar. Cuando éstos se manifiestan suele ser después, aún no a la edad de 8 años. El marketing extiende interesadamente los problemas.

Por todo lo anterior, considero que dicho anuncio es ofensivo hacia el profesorado de Matemáticas y que resulta incoherente su publicación en el periódico del MEC, donde tantas veces se leen lamentos por la pérdida de prestigio, valoración e imagen social de los profesores. Igualmente manifiesto al anunciante que no pienso utilizar con mis alumnos sus productos si mantienen esta línea publicitaria y que espero que esta actitud personal tenga eco entre mis compañeros a través de las Sociedades de Profesores de Matemáticas.

José María Sorando Muzás
IES Elaios. Zaragoza
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
Pedro S. Ciruelo

La tablilla de barro cocido indescifrada de Sevilla

Durante la celebración del ICME-8 que ha tenido lugar en Sevilla, el mes de julio pasado, tuve la oportunidad una mañana, de visitar el Museo Arqueológico de la ciudad. Este museo se encuentra ubicado en el Parque de María Luisa, próximo a los edificios donde se celebró el congreso.

En este museo destaca sobremanera la colección de estatuas romanas. Entre ellas sobresalen, en tamaño colosal, tanto la imagen de «Mercurio» como la de «Venus saliendo del baño». Son obras de excelente factura, realizadas en mármol blanquísimo de Grecia. Proceden de las ruinas de Itálica, a donde llegaron tras el pillaje por los romanos de la ciudad de Corinto. El resto de las estatuas proceden tanto de Itálica como del resto de las ciudades de la Bética.

Pero lo que realmente me sorprendió fue una modesta tablilla de barro cocido, que cabe en una mano, y cuyas dimensiones de forma aproximada son 2 cm de espesor, por 6x9 cm de superficie. Está ubicada en la sala IX, segunda vitrina, y actalmente está indescifrada.

Esta tablilla se encontró en el Cerro Macareno, en término de San José de la Rinconada. Dicho cerro es una meseta habitada desde mediados del siglo VIII hasta el siglo I a. C. Está formado en gran parte por la acumulación de distintos estratos superpuestos pertenecientes a las diferentes fases culturales que han ocupado el lugar desde el final de la edad del bronce hasta la época romana.

El texto del museo referido a la tablilla es el siguiente:

«La tablilla es de barro cocido, sobre la que se ha grabado a punzón un reticulado que presenta en su interior trazos horizontales y verticales hasta ahora indescifrables.

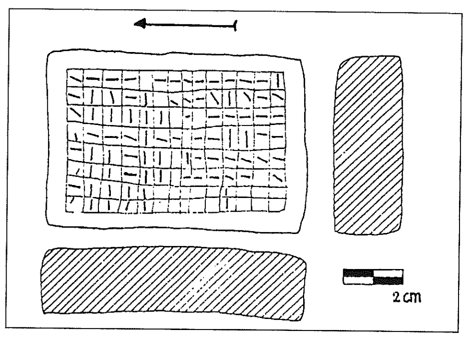
El yacimiento de Cerro Macareno, a orillas del río Guadalquivir, es una formación artificial con cerca de 10 m de altura, originada por la acumulación de restos arqueológicos y habitada por el hombre a lo largo del primer milenio antes de Cristo.»

Me llamó tanto la atención la presencia de esta tablilla, con su entramado de 14x8 casillas (112), en las que como se puede ver en el dibujo tan solo aparecen trazos verticales, horizontales, oblicuos o casillas vacías, que me dirigí al Director del Museo para que me proporcionara información sobre ella. Me atendió muy amablemente y me entregó una fotocopia con el dibujo de la tablilla. Este dibujo es muy real, ya que se utilizó un microscopio para reconstruir meticulosamente las incisiones.

Es posible que esta estructura de la tablilla obedezca simplemente a algún tipo de contabilidad, o quizá tenga que ver con los astros, con los ciclos lunares (28=2x14) o con un tema inesperado, como puede ser un juego, pero también cabe la posibilidad de que sea debida a una estructura matemática más compleja. No cabe duda de que el hecho de no encontrar una actividad concreta en el lugar en el que apareció la tablilla dificulta mucho su interpretación, ya que no podemos asociarla a dicha actividad. Además, otro problema que presenta es su posible orientación y dirección de escritura. Nosotros proponemos, por fijar alguna, que sea en dirección vertical, tal como muestra la flecha que hemos agregado. De acuerdo con esta orientación, las líneas 2 y 3 se repiten.

Espero que sea un buen entretenimiento para aquellos aventureros audaces y solitarios que intenten resolver el enigma. En caso de que lo logren, aunque sea de forma parcial, adjunto mi dirección. Si llegan a tener éxito, también pueden dirigirse a SUMA o a la Administración del Museo Arqueológico de Sevilla.

Vicente Ibañes Orts
Camping Cap-Blanch
Playa del Albir, 25
03590 Altea (Alicante)

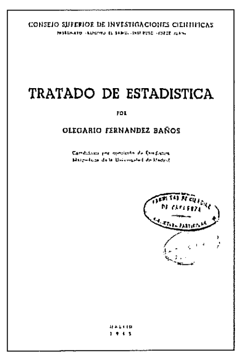


SUMA 24
febrero 1997

El Tratado de Estadística de Fernández-Baños

TRATADO DE ESTADÍSTICA
Olegario Fernández-Baños.
Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
Patronato "Alfonso el Sabio". Instituto "Jorge Juan"
Madrid, 1945

El *Tratado de Estadística* de Olegario Fernández-Baños fue el primer libro de Estadística Matemática en sentido moderno que se publicó en España. Anteriormente, se habían publicado libros de Estadística para la asignatura de Geografía y Estadística Industrial y Mercantil de las Escuelas de Comercio y para la de Economía Política de las Facultades de Derecho. Los libros de texto para esas asignaturas trataban, generalmente, temas de carácter administrativo, descripción de los métodos estadísticos utilizados y aplicación de la Estadística a España. En muchos de ellos se aprecia la influencia de las ideas de Quetelet al pretender aplicar el Cálculo de Probabilidades a la Estadística.


CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

TRATADO DE ESTADISTICA

POR

OLEGARIO FERNANDEZ BAÑOS

A comienzos del siglo XX el interés de un sector de los matemáticos españoles era tratar de resolver los problemas que planteaba la Estadística haciendo uso del Cálculo de Probabilidades. Así, en el concurso de 1909 de la Real Academia de Ciencias, se propuso como título a uno de sus temas «Exposición clara y sencilla del Cálculo de Probabilidades y sus aplicaciones». La convocatoria de la Real Academia de Ciencias de Madrid ponía de manifiesto la tendencia de acercamiento a los Métodos Estadísticos como una aplicación del Cálculo de Probabilidades.

La consideración de la Estadística como rama del Cálculo de Probabilidades se aprecia con claridad en las palabras del Prólogo del libro *Cálculo de Probabilidades* (1920) de Manuel Velasco de Pando, obra premiada con un accésit en el mencionado concurso de la Real Academia de Ciencias de Madrid, donde dice:

«No sería osado decir que el Cálculo de Probabilidades es, desde cierto punto de vista, la matemática de la vida real. Si esta fuera regida por leyes fatales como ocurre en el mundo físico, se sometería a ecuaciones diferenciales, cual se somete la Mecánica, pero, puesto que el azar la rige, sólo el Cálculo de Probabilidades se puede aplicar a ella.»

RECENSIONES

De las palabras de Velasco se infiere la creencia que existía, por parte de amplios sectores de los científicos, no solamente españoles, de que la Probabilidad, teoría matemática abstracta se llegaría a aplicar con plena satisfacción a los más variados fenómenos aleatorios, sociológicos o de poblaciones.

El nacimiento de la Estadística como disciplina autónoma frente a la Teoría de Probabilidades tuvo lugar a finales del siglo XIX o comienzos del XX y se vio claramente impulsada por las ideas del darwinismo. La Teoría Evolucionista de Ch. Darwin (1809-1882) planteaba el problema de hacer predicciones y corroboraciones no sobre el porvenir de individuos concretos, sino sobre especies enteras, lo que planteaba el estudio de colectivos para poder corroborar las predicciones. En esta línea, Francis Galton (1822-1911), primo de Darwin, aportó el concepto de correlación, que presentó por primera vez en su obra *Hereditary Genius* (1869). En su trabajo principal *Natural Inheritance* (1889) introdujo el concepto de regresión analizando las tallas de padres e hijos. Karl Pearson (1857-1936) estudió las curvas de densidad, el coeficiente de correlación *r* y sus generalizaciones, la Chi-cuadrado. A Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) se le deben, entre otros, los trabajos sobre máxima verosimilitud, análisis de la varianza y análisis multivariante. Su *Statistical Methods for Research Workers* (1925) se tradujo a seis idiomas y tuvo catorce ediciones.

Olegario consideraba que las Matemáticas y la Estadística se diferenciaban en algo tan profundo como era el método. Ya que, mientras que las Matemáticas utilizaba exclusivamente el método deductivo, la Estadística hacía uso del método inductivo. Fernández-Baños pensaba, de acuerdo con la Escuela Estadística Inglesa, que el Cálculo de Probabilidades era una teoría matemática más entre las que se podían aplicar a la Estadística para resolver sus problemas.

La opción metodológica de Fernández-Baños supuso una ruptura con lo que había supuesto la tendencia de los estudios de Cálculo de Probabilidades y Estadística en España.

En 1933 se crearon las cátedras de Estadística Matemática en las facultades de ciencias españolas. A la Estadística se le concedía la misma autonomía que a la Geometría, al Análisis o la Astronomía como rama de las Matemáticas.

Hubo profesores como Esteban Terradas y Olegario Fernández-Baños que optaron por introducir en esas cátedras la línea marcada por la escuela inglesa de Galton, Pearson y, especialmente, de Fisher.

La Estadística que se introdujo en las cátedras de las facultades de ciencias de las universidades españolas hacia 1933 no seguía la tradición de probabilistas como Ollero, Galán o Velasco, sino que adoptó directamente la línea de la escuela inglesa de Pearson-Fisher de la que Fernández-Baños era un ferviente seguidor.

Para Fernández-Baños la Estadística era una metodología para el estudio de las ciencias de observación de los fenómenos colectivos. El libro está dedicado a Ronald A. Fisher lo que marca todavía más la tendencia adoptada.

Olegario consideraba que las Matemáticas y la Estadística se diferenciaban en algo tan profundo como era el método. Ya que, mientras que las Matemáticas utilizaba exclusivamente el método deductivo, la Estadística hacía uso del método inductivo.

Los temas tratados en la obra son Series Estadísticas, Valores Medios e Índices, Cálculo de Probabilidades, Estadística Descriptiva, Teoría y Técnica de Muestras y Correlación. En el prologo del *Tratado de Estadística* justificaba el desplazamiento del Cálculo de Probabilidades del núcleo de la Estadística.

El *Tratado de Estadística* es autocontenido, quiere decir que dedica capítulos especiales a los temas no estadísticos necesarios para el desarrollo de las teorías. Algunos de estos tema son la integral de Stieltges, integrales de Fourier, fórmulas de interpolación y polinomios ortogonales, lo que nos puede dar una idea del gran nivel de la obra.

Fernández-Baños no pretendía en el *Tratado* dar un curso exhaustivo de Cálculo de Probabilidades, pero se esforzó en dar una definición adecuada que evitara la formulación de paradojas, como la de J. L. Bertrand (1822-1900), dentro de la teoría. Para conseguir su objetivo utilizó las ideas de F. M. Urban en su libro *Grundlangen der Wahrscheinlichkeitsrechnung un der Theorie der Beobachtunslhen* (1923) y las nociones de teoría de conjuntos.

Asoció el concepto de probabilidad al grado de confianza racional de la presentación o verificación de un suceso. Donde a la palabra racional se le imprime el significado de no ser caprichosamente y subjetivamente elegido, sino real y fundadamente objetivo.

Utilizó una notación de probabilidad condicionada. El símbolo P(A/C) significa la probabilidad del suceso o proposición A, supuestas las condiciones o premisas C.

Adoptó inicialmente una definición de probabilidad según Laplace modificada haciendo uso de nociones de teoría de conjuntos para salvar las paradojas, pero no se decidió por las definiciones axiomáticas existentes. La definición de Von Mises, Copeland, Wald, etc., le parecía perfectamente lógica, pero poco fecunda y eficaz en un primer estudio de esta ciencia. Las definiciones axiomáticas de Fréchet, Kolmogoroff y Cramer pertenecían, para Olegario, a la clase de definiciones que establecían las probabilidades como conceptos *a priori* y no le pareció adecuada para exponerla en un texto docente. Optó por una definición basada en la Teoría de Conjuntos y en Teoría de la Medida, porque le parecía más útil desde el punto de vista pedagógico:

> *Si llamamos colectivo a un conjunto de sucesos... tendremos que supuestas unas premisas o condiciones C, si consideramos el suceso o carácter A, la probabilidad en el supuesto de C ... y el colectivo al que se refieren las premisas C es medible y los mismo sucede a los conjuntos que, además, tienen carácter A, estaremos en el caso de hablar de probabilidad en sentido cuantitativo y numérico, y diremos que P(A/C) = (a)/(C), siendo (C) la medida del conjunto al que se refieren las premisas C y (a) la medida del subconjunto que, además, tiene carácter A.*

El libro cita una abundante bibliografía, española y extranjera, sobre Cálculo de Probabilidades y Estadística actualizada hasta el año 1943.

El contenido de la obra es el siguiente:

El libro cita una abundante bibliografía, española y extranjera, sobre Cálculo de Probabilidades y Estadística actualizada hasta el año 1943.

I. Preliminares. Series estadística. Valores medios e índices.

CAPITULO I.- Objeto de la estadística: Investigación estadística. Previsiones. Leyes empíricas y teorías. Fenómenos naturales y humanos. Colectivos. Objeto de la estadística.

CAPITULO II.- Descripción de los fenómenos colectivos: Captación de datos. Cádulas y fichas de datos primitivos. Series estadísticas. Representación de las series estadísticas.

CAPITULO III.- Valores medios de una serie estadística: Propiedades elementales. Estudio de la media general. Errores de la media aritmética. Valor mediano. Valores auxiliares de las medias.

CAPITULO IV.- Números índices: Conceptos generales. Fórmulas matemáticas para construir índices complejos. Propiedades y análisis de los números índices complejos. Índices de coste de la vida.

II.- Cálculo de probabilidades

CAPITULO V.- Ideas generales: Primeras nociones y teoremas fundamentales. Probabilidades en las pruebas repetidas.

CAPITULO VI.- Variables estocásticas casuales o aleatorias: Esperanza matemática. Aplicación a los esquemas de Bernouilli y Poisson. Aplicación al caso en que la probabilidad varía de prueba a prueba. Comparación entre algunos valores medios empíricos y teóricos. Lema de Bienaymé-Tchebycheff. Lema de Markoff.

CAPITULO VII.- Ley de los grandes números: Teorema de Bernouilli y de Poisson. Ley fuerte, o de Cantelli, de los grandes números.

CAPITULO VIII.- Estudio de algunas fórmulas: Fórmula de Moivre-Stirling. Cálculo de algunas integrales. Aplicación de la fórmula de Moivre-Stirling a la obtención a la obtención de la curva de probabilidades en el problemas de las pruebas repetidas en un colectivo de probabilidad constante en cada prueba. Obtención rápida de la ley normal.

CAPITULO IX.- Ley normal de distribución de frecuencias: Curva normal de probabilidad, Aplicaciones elementales de la ley normal. Criterio de π. Teorema de Bernouilli. Combinación lineal de variables estocásticas que siguen la ley normal de probabilidad. Teoremas de Poisson y Laplace.

CAPITULO X.- Teoría general de distribuciones de frecuencias: Función de distribución e integral Stieltges. Función característica de una variable estocástica. Teorema de Fourier sobre inversión de integrales. Problema general y fórmula general.

CAPITULO XI.- Aplicaciones: Distribuciones distintas de la normal. Aplicaciones a la ley de distribución binomial en el esquema de Bernouilli. Idem al esquema de Poisson. Ley de Poisson o de los sucesos de Bortkiewicz.

CAPITULO XII.- Cálculo de momentos y probabilidad a posteriori. Cálculo de momentos y correcciones de Sheppard. Probabilidad a posteriori: Cuatro problemas. Sobre la inversión del teorema asintótico de Bernouilli.

III. Estadística descriptiva

CAPITULO XIII.- Ideas generales y conceptos preliminares: Nociones previas. Elección de función interpolatriz de ajuste o percuatriz. Operadores simbólicos. Teoremas de conservación.

CAPITULO XIV.- Métodos de interpolación y perecuación. Diagramas de Fraser y fórmulas de interpolación. Método de interpolación de Cauchy. Método de sumas. Método de las áreas o de Cantelli. Método de los momentos. Método de lo mínimos cuadrados. Método de Fisher. Métodos de Pearson y Neyman.

CAPITULO XV.- Métodos de graduación o ajuste. Métodos de Woolhouse. Higham y Spencer. Métodos de J. Karup y G. King.

CAPITULO XVI.- Curvas especiales y desarrollos en serie de los problemas de frecuencias: Curvas de Pearson. Desarrollo en serie de Charlier. Tipos A, B, C. Series de Bruns.

CAPITULO XVII.- Método general de las funciones y polinomios ortogonales. Funciones y polinomios ortogonales. Método de las series de Fourier.

CAPITULO XVIII.- Tablas de eliminación y frecuencia y funciones biométricas: Nociones fundamentales de eliminación y frecuencia. Funciones biométricas y esquema de Lexis. Nociones sobre construcción de tablas generales de mortalidad.

CAPITULO XIX.- Leyes de mortalidad y supervivencia: Función general de Quiquet. Casos particulares: Leyes de Dormoy, Makeham, Gompertz, etc. Función interpolatriz o perecuatriz de una tabla de supervivencia. Ejemplos prácticos.

CAPITULO XX.- Elementos de Análisis coyuntural: Nociones previas. Movimientos estacionales. Varios métodos de cálculo. Movimiento estacional variable. Descomposición de un fenómeno complejo en sus componentes simples. Periodograma de Schuster. Periodograma de Whittaker-Robinson. Concentración y su medida. Método de traslación de Edgeworth-Kapteyn. Idea de la transvariación y su medida.

IV.- Teoría y técnica de muestras

CAPITULO XXI.- Ideas generales de las muestras y sus medidas: Nociones sobre las muestras y los «estadísticos» o parámetros experimentales. Diversas medidas de la estructura de las series estadísticas y fórmulas prácticas.

CAPITULO XXII.- Precisión de algunos estadísticos: Precisión de la media aritmética. Caso en que se observan diversos subcolectivos del colectivo total. Precisión de la dispersión, de la desviación típica o standard y de las correcciones de Sheppard. Coeficiente de dispersión o divergencia. Dispersión normal, subnormal y supernormal.

CAPITULO XXIII.- Leyes de la probabilidad y dispersión de algunos estadísticos: Estudio preliminar. Teorema fundamental. Ley de probabilidad y de distribución de la t de Student. Idem ed. de la z de Fisher. Idem de la $z-\omega = \log(s_1/s_2) - \log(\sigma_1/\sigma_2)$. Significación de la diferencia de medias aritméticas y de dispersión empíricas. Ley de probabilidad y de distribución de la χ^2 de Pearson. Uso práctico de la χ^2 de Pearson.

CAPITULO XXIV.- Análisis de la dispersión: Preliminares. Problema fundamental para dos clasificaciones y conclusiones prácticas. Problema fundamental para tres clasificaciones. El cuadrado latino: resultado práctico.

CAPITULO XXV.- Errores de observación: Nociones elementales sobre los errores de observación. Demostración clásica de la ley de Gauss. Demostración por el método de Laplace. Regiones de igual probabilidad.

V.- Correlación estadística

CAPITULO XXVI.- Nociones preliminares: Conexión o enlace estocástico y primeras nociones del mismo. Medida de la contingencia y ejemplos.

CAPITULO XXVII.- Correlación y regresión lineales: Coeficiente general de correlación. Coeficiente de correlación rectilínea. Relaciones entre el índice de contingencia Φ^2 y el coeficiente de correlación rectilínea. Coeficiente de correlación de diversos órdenes. Momentos ligados. Razón de la correlación y dispersión residual. Coeficiente de regresión lineal. La ley de distribución del coeficiente de correlación rectilínea. Transformación de Fisher de la curva de distribución de r. Ley de distribución de r cuando las 2n observaciones son del mismo colectivo (correlación interclase). Ley de distribución del coeficiente de regresión lineal.

CAPITULO XXVIII.- Correlación lineal interclase autocorrelación, correlación desplazada (serial): Correlación interclase (entre los datos de una clasificación). Autocorrelación y correlación desplazada (serial).

CAPITULO XXIX.- Correlación estocástica lineal múltiple: Concepto general. Teorema general de la correlación múltiple lineal. Fórmulas generales de correlación y regresión lineal parcial y total. Ley de distribución del coeficiente de correlación lineal múltiple. Ley de probabilidad de los coeficientes de la regresión lineal. Razón de la correlación.

CAPITULO XXX.- Significación y análisis de varias constantes: Significación de los coeficientes de regresión y correlación. Coeficiente de determinación y dispersión residual. Significación de los coeficientes de regresión parcial. Coeficientes de correlación parcial lineal. Coeficientes de correlación separada. Significación del coeficiente de correlación múltiple lineal.

CAPITULO XXXI.- Correlación y regresión curvilíneas: Correlación y regresión curvilíneas simples (de una sola variable). Correlación y regresión curvilíneas múltiples (de varias variables).

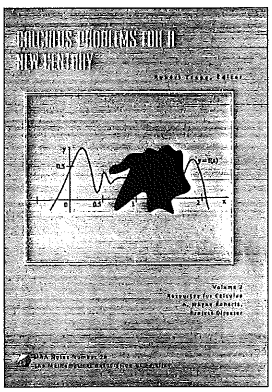
CAPITULO XXXII.- Correlación graduada: Coeficiente de Spearman y su dispersión.

CAPITULO XXXIII.- Correlación de constantes y correcciones: Problema sobre la correlación de constantes. Error Standard de los coeficientes de correlación y regresión simple. Fórmulas prácticas de correlación.

CAPITULO XXXIV.- Correlación espúrea y series de tiempo: Correlación espúrea. Series de tiempo. Método de las diferencias finitas. Autocorrelación y correlación desplazada (serial). Método de las variables sin autocorrelación y de las funciones ortogonales. Método de Frisch *(Confluence Analysis).* Otros métodos. Observaciones sobre las series de tiempo. Jerarquización de las variables.

Víctor Arenzana Hernández

CALCULUS PROBLEMS FOR A NEW CENTURY
A. Wayne Roberts.
Project Director
MAA Notes Number 28
The Mathematical Association of America



En una de las diversas colecciones de libros interesantes de la Mathematical Association of America, en concreto en la MAA Notes, aparecen cinco volúmenes, números 27 a 31, que corresponden a un proyecto, «Resources for Calculus», diseñado bajo el convencimiento de que el Cálculo que venimos explicando a nuestros alumnos tanto en el primer año de universidad como en los últimos cursos en los institutos, en lugar de ser una culminación satisfactoria de su preparación en la Enseñanza Secundaria, o una puerta para futuros estudios, se ha convertido simplemente en un obstáculo a superar. Una de las razones que apunta, es que la elección de los temas a dar y sobre todo de los métodos utilizados para presentar estos temas, no está muy en consonancia con los posteriores intereses de una gran cantidad de estudiantes que se incorporan al estudio de esta asignatura.

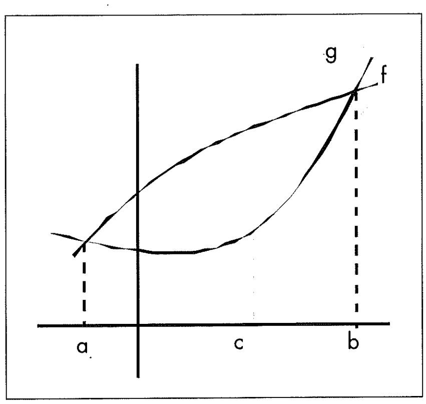
Yo he trabajado en los dos últimos cursos el segundo volumen de esos cinco, *Calculus Problems for a New Century,* algunos temas en un curso de COU y otros en cursos de 1.° de Matemáticas y 1.° de Químicas y, para empezar, debo decir que es un libro totalmente diferente a los libros de problemas de cálculo que he manejado hasta ahora. Los problemas de este libro están pensados para que los estudiantes graben las ideas, no las técnicas o las rutinas del cálculo. El libro huye de problemas que requieran trucos de cálculo. Las soluciones, segunda parte del libro, van acompañadas de comentarios que, normalmente, son más interesantes que las respuestas a las cuestiones que se plantean. En estos comentarios, a veces, se hace alguna indicación sobre cómo se podría extender una determinada cuestión, o cómo podría construirse en un contexto diferente (normalmente en la Física), o se hace algún comentario histórico relacionado con el problema, o se dan las razones por las que se eligió tal problema.

El libro, por otra parte, insiste en algo que no es muy familiar entre nosotros. Varias veces, anima a los estudiantes a que discutan entre ellos y a que escriban, con claridad y completamente, sus razonamientos. «Con la práctica –dice a los estudiantes– descubrirás que discutir y escribir nos ayuda a pensar con más claridad y a desarrollar una mejor comprensión de la materia que estás estudiando».

El libro es bastante voluminoso. Tiene 425 paginas, tamaño folio, de las cuales prácticamente la mitad se dedican a los enunciados de los problemas y el resto a las soluciones. En cualquier caso, la gran cantidad de gráficas que lleva, hace que sea tan elevado el número de páginas.

Los ocho primeros temas, Funciones y Gráficas, La Derivada, Valores Extremos, Primitivas y Ecuaciones Diferenciales, La Integral Definida, Retorno a la Integral Definida, Sucesiones y Series Numéricas y Sucesiones y Series de Funciones, corresponderían a funciones de una variable y los cuatro últimos, La Integral en R^2 y R^3, Vectores y Geometría Vectorial, La Derivada en dos o tres Variables, e Integrales de Línea, serían temas sobre funciones de varias variables que, en muchas facultades y escuelas técnicas de nuestro país, se ven en un primer curso de Cálculo.

No quería terminar esta reseña sin mostrar algún problema de los que aparecen en el libro, por lo que, aún, corriendo el riesgo de no poner uno significativo, sí merece la pena el siguiente, al menos por lo que sorprende a nuestros alumnos de COU:



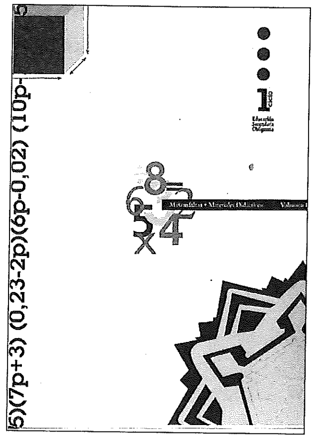
Dos funciones, *f* y *g*, derivables, cuyas gráficas se muestras en la figura. El punto *c* es aquel en que el segmento vertical comprendido entre las dos gráficas tiene máxima longitud. Demostrar que las tangentes a f(x) y g(x) en x = c son paralelas.

Como véis, algo absolutamente elemental pero que requiere tener una idea clara de lo que se está tratando.

No es excesivamente complicado adquirir el libro. Pedirlo a la M.A.A. es la más simple. Para hacerlo directamente basta escribirles y mandarles el número de VISA. Mathematical Association of America. 1529 Eighteenth Street, NW, Washington, DC 2036. Desde que lo pides hasta que lo tienes en las manos tienes que esperar 2 meses. A partir de ahí, a disfrutar de él.

Joaquín Hernández

MATEMÁTICAS
MATERIALES DIDÁCTICOS
ESO PRIMER CICLO
2 volúmenes
Javier Bergasa Liberal
Mª Dolores Eraso Erro
Mª Victoria García Armendáriz
Sergio Sara Goyén
Gobierno de Navarra.
Departamento de Educación, Cultura, Deporte y Juventud.
Pamplona, 1995
ISBN: 84-235-1467-6
437 páginas



La implantación del nuevo sistema educativo supone grandes e importantes cambios que no sólo afectan a su estructura, sino también a qué, cómo y cuándo enseñar en las diferentes áreas. El carácter abierto y flexible del currículo plantea nuevas necesidades en el trabajo de los equipos docentes, la elaboración de los Proyectos Curriculares supone tomar importantes opciones, entre las que se puede destacar la de «establecer los principales materiales didácticos que se van a utilizar». Es una tarea excesiva y desproporcionada para los profesores, sólo se puede asumir si por parte de las Administraciones Educativas se apoya con los suficientes medios, entre los que dede figurar la de ofrecer una amplia gama de materiales curriculares de calidad.

Estos dos volúmenes editados por el Gobierno de Navarra están dentro de esta oferta de materiales, que facilitan a los seminarios de matemáticas elaborar un proyecto curricular propio, real y eficaz.

Los materiales que los autores nos presentan se pueden considerar, como ellos mismos lo definen, una propuesta del desarrollo didáctico del área de Matemáticas para el Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Está bien estructurada, fundamentada y articulada. Presenta gran cantidad de elementos para su reflexión, que facilitan la tarea de planificar la actividad matemática para el ciclo.

La propuesta tiene dos niveles. Uno, general y estratégico, programación general, que expresa todos los aspectos de carácter organizativo, secuencial y didáctico, hace referencia a toda la etapa. Otro, de mayor concreción, que presenta cada una de las catorce unidades didácticas previstas en la programación general para el Primer Ciclo.

La programación general trata diferentes aspectos: el pensamiento didáctico sobre el que se sustenta, principios de procedimiento didáctico, análisis del significado de los objetivos generales, organización y secuenciación de los contenidos, estudio de los cinco bloques de contenido desarrollados sobre un doble eje, el horizontal asociado a las formas de representación (identificación, codificación e interpretación) y otro vertical regido por una pauta constructiva y didáctica.

La configuración de los cinco bloques didácticos está determinada por la búsqueda de un aprendizaje de la máxima significación. En cada uno de los bloques se hace referencia a las pautas y patrones que se tienen en cuenta para su desarrollo y mediante un cuadro se establecen las relaciones que hay entre las pautas constructivas y los patrones o contextos de referencia orientados a buscar una significación concreta. Por ejemplo, en el bloque didáctico «Objetos geométricos» la pauta adoptada lleva a tratar los contenidos a través de actividades de construir, clasificar e inferir y se apoya en un esquema o patrón espacial.

La propuesta de la unidades didácticas establece los posibles «itinerarios» constructivos que se van a seguir para cada dominio (numérico, geométrico y combinatorio) y mediante mapas conceptuales se establecen todo tipo de relaciones entre las unidades.

Los criterios de evaluación y una amplia bibliografía cierran la primera parte o programación general.

Las unidades didácticas están claramente articuladas para facilitar la construcción del conocimiento matemático, todas las actividades plantean interrogantes a través de problemas desde los cuales los alumnos pueden elaborar conceptos y adquirir procedimientos que pueden aplicar en diferentes contextos, lo que facilita la apreciación del sentido y utilidad de las matemáticas.

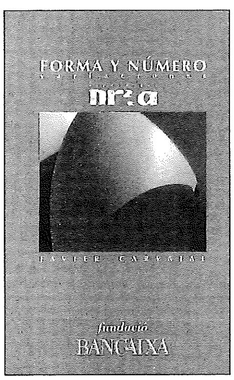
Cada unidad didáctica comienza con una introducción que justifica la parcela de conocimiento que aborda, luego se hace un análisis de los contenidos según los tres tipos: conceptuales, procedimentales y actitudinales y una concreción de objetivos. Para facilitar un aprendizaje significativo se ha dado gran importancia a la estructura interna y se explican las diferentes fases en que se apoya el desarrollo de cada unidad. También se analiza la evaluación en los tres aspectos: inicial, formativa y sumativa.

Cada unidad presenta un número de actividades suficientes para mostrar qué y cómo se quieren enseñar los contenidos propios del tema y, como se ha dicho antes, todas plantean interrogantes mediante problemas y propuestas abiertas en diferentes contextos que facilitan el desarrollo de las capacidades y adquisición de aprendizajes relativos al método matemático, a actitudes y hábitos de trabajo y a la valoración y apreciación del conocimiento matemático.

Creo que está propuesta curricular es un material que permite después de su estudio y reflexión, una recreación adaptada a cada uno de nuestros institutos, es un buen ejemplo de qué se entiende por una programación general, un proyecto curricular.

Jesús Antolín

FORMA Y NÚMEROS.
VARIACIONES. $\pi r2 \cdot a$
Javier Carvajal
Miquel Francés (realizador)
Fundación Bancaixa
15 minutos
Material complementario:
Libro catálogo
del mismo título



Javier Carvajal nos vuelve a sorprender con una de sus maravillosas realizaciones. Se trata de un documento audiovisual de gran belleza que relaciona las matemáticas, las formas geométricas y la escultura. Como muy bien lo resume su autor: «A través de la lógica me encuentro con la Naturaleza».

Carvajal parte de uno de los cuerpos más sencillos, el cilindro ($\pi r^2 a$), y a partir de él, mejor de sus secciones, genera multitud de formas, algunas muy familiares pero cuya procedencia desconocíamos, y otras realmente originales. Todo ello a través de un doble proceso:

- Analítico: explorando normas geométricas y relaciones numéricas.
- Sintético: aplicando principios creativos de repetición y variación de las formas primarias obtenidas del proceso anterior.

El vídeo utiliza imágenes animadas generadas en 3-D, de una gran plasticidad y elocuencia.

La intersección de un plano con el cilindro nos proporciona una gama de secciones elípticas. Cortando el cilindro mediante dos planos podemos obtener una gran variedad de módulos sólidos. Si la recta de intersección de los planos es secante al cilindro tendremos gajos.

Si esta recta coincide con el diámetro la yuxtaposición de los gajos nos permite construir una teórica esfera. El desplazamiento de esta línea de intersección hacia la generatriz nos proporciona otros gajos que nos permiten construir todo tipo de ovoides y calabazas, formas muy frecuentes en la Naturaleza.

Si la recta de intersección de los planos es tangente o exterior al cilindro obtenemos rodajas. La yuxtaposición de estas rodajas hasta completar 360° nos permite construir el toro.

Pero, y aquí comienzan las verdaderas sorpresas, si pegamos las rodajas girándolas una respecto de la siguiente el mismo número de grados, obtenemos una forma que comienza a enroscarse sobre sí misma para dar origen a... una columna salomónica. Cuanto mayor sea el ángulo de gira mayor será el número de vueltas. Si el giro es de 180° volvemos a obtener el cilindro.

A partir de aquí, Carvajal aplica el proceso sintético para demostrarnos como la combinación creativa de estas formas da origen a auténticas obras de arte.

Si las rodajas van disminuyendo de forma progresiva de radio nos podemos introducir en un mundo casi mágico de formas originales: el cuerno de muchos rumiantes, el nautilus...

Las rodajas más simples, las obtenidas mediante dos planos paralelos, la famosa raja de chorizo, también nos deparará en el vídeo sorpresas agradables.

Efectivamente la yuxtaposición de este tipo de rodajas giradas 180° una respecto de la anterior genera una forma similar a un fuelle.

La obtención de rodajas no simétricas se obtiene mediante la combinación de dos movimientos: traslación y giro. La combinación de rodajas de este tipo de forma creativa produce espectaculares formas escultóricas.

Por último, lo que Javier Carvajal denomina despojos, los trozos sobrantes o restos de la intersección, mordedura o penetración de dos o más cilindros, constituyen un material que combinado de forma apropiada genera formas muy cercanas a la naturaleza: semillas, caparazones, colas de crustáceos...

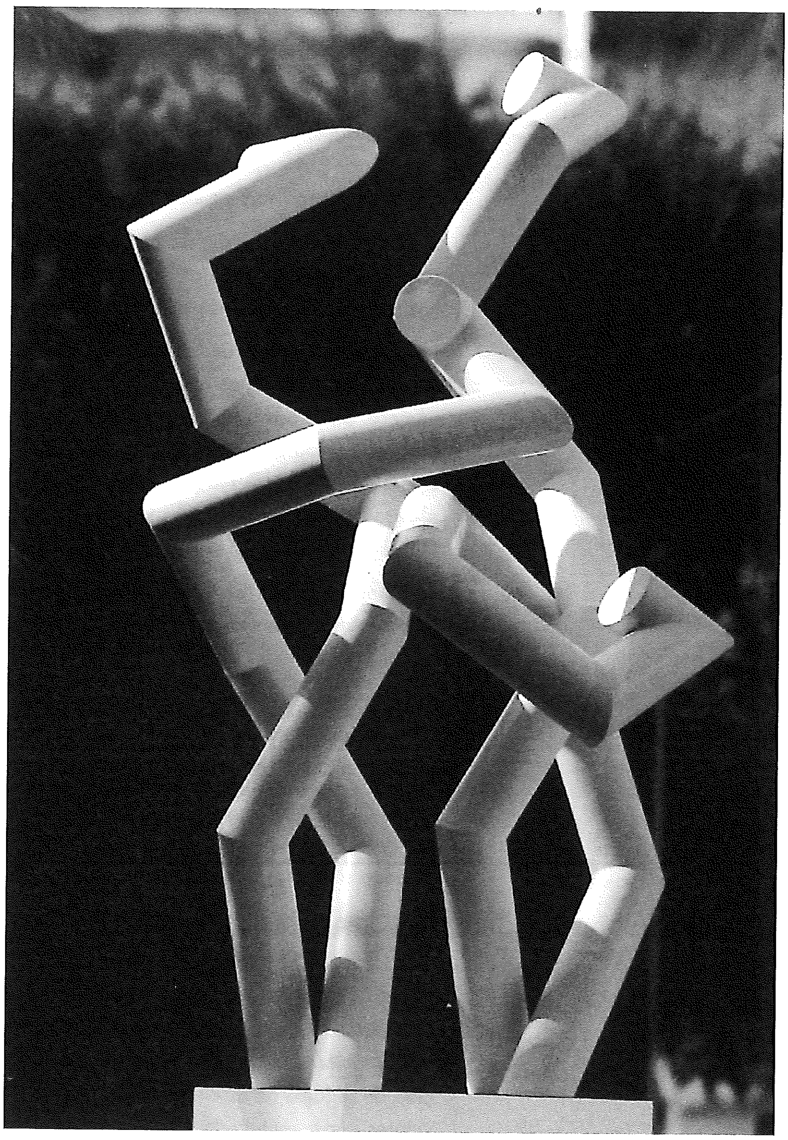
Jugando con polígonos distintos el autor nos sumerge en un apasionante mundo de formas espirales en el espacio, de la que merece especial atención la que denomina espiral

El documento no se queda en el desarrollo del proceso analítico. Para terminar, y como culminación del proceso sintético que el autor nos había prometido al principio, nos presenta un extraordinario muestrario de esculturas basadas en las formas geométricas obtenidas con todos los materiales mostrados.

Acompaña al vídeo un libro-catálogo de la exposición de las esculturas [algunas de sus reproducciones aparecen en este número de SUMA], con textos explicativos del propio autor, incluyendo el *story board* del vídeo, junto a textos de carácter científico, poético, musical, plástico... con unas excelentes fotografías.

En fin, un documento que para aquellos profesores que impartan las Matemáticas de la forma se convertirá en un material casi imprescindible para utilizar en clase. Y para el resto un material fabuloso para disfrutar y deleitarse con la vinculación, alejada de los tópicos y lugares comunes, entre las Matemáticas y el Arte.

Antonio Pérez Sanz



Espiral multipoligonal
Javier Carvajal

SUMA 24
febrero 1997

VII Olimpiada de la Federación

Olimpiada Matemática Nacional 1996

Del 24 al 29 de junio pasado se celebró en la bella y fronteriza ciudad cacereña de Valencia de Alcántara la VII Olimpiada Matemática Nacional convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizada por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prósper. En ella se dieron cita chicos y chicas de todos los rincones del Estado representando a sus comunidades, provincias o territorios, todos ellos acompañados por los profesores responsables-acompañantes y de los profesores organizadores. Juntos compartieron vivencias, trabajo y saber hacer.

Los participantes

En total llegaron 32 chicos y 9 chicas, 13 profesores y profesoras responsables de todas las comunidades participantes además de los profesores organizadores. Sus lugares de origen eran: Albacete, Andalucía, Andorra, Asturias, Canarias, Castilla-León, Cataluña, Comunidad Valenciana, Extremadura, Galicia, Madrid, Murcia y Navarra.

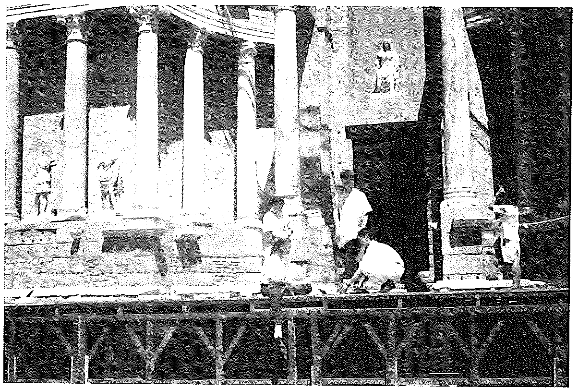
Todos aportaron ilusión y ganas de convivir, sin la menor queja y con el ánimo de pasar unos días de trabajo y vacaciones.

Las pruebas

Se llevaron a cabo distintos tipos de pruebas matemáticas para poder seleccionar a los ganadores en cada una de ellas y al primer clasificado, ganador de la Olimpiada o premio a la regularidad. Cada prueba tuvo su peso específico y unos criterios de evaluación acordes con lo que se pretendía medir.

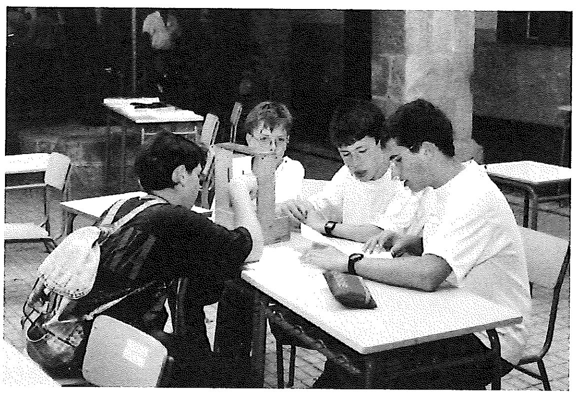
Prueba por equipos

En el impresionante marco del Museo Nacional de Arte Romano y en el Teatro y Anfiteatro romanos de Mérida, nos dimos cita para realizar esta prueba en la que se fundieron las matemáticas y la cultura romana. Formados los equipos y visto el reportaje en vídeo sobre la historia y contenido del museo, recorrieron los recintos para observar, medir y calcular. Las informaciones les proporcionaba el lugar descrito con anterioridad, la sagacidad y la intuición de los propios participantes. Si interesante fue el desarrollo de la prueba, no menos interesante resultó la sesión de valoración con los participantes donde se aclararon todos los términos de la actividad y se matizaron los procedimientos seguidos, las estrategias y métodos de cálculos utilizados.



Prueba individual

Valencia de Alcántara nos recibió con los brazo abiertos y en el patio porticado de su colegio público se celebró la prueba individual consistente en la resolución de cuatro problemas, que sirvieron para determinar las capacidades matemáticas de cada participante y su puesta en practica. Los problemas dieron mucho juego y sirvieron para empezar a marcar diferencias de cara al premio a la regularidad. La evaluación llevada a cabo por un grupo de profesores responsables resultó muy eficaz.



Circuito matemático

El mismo día de la prueba individual, tras caer la tarde por el vecino Portugal, después de una buena siesta y un relajante baño en la piscina municipal, se realizó la prueba contra reloj. Estuvo compuesta de seis actividades, tres interiores y tres exteriores, en las que como estaba pre-

PREMIADOS

VII OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

Prueba por equipos

Ana Jiménez Castellanos (Madrid)

Carlos Martín-Fuentes Moreno (Madrid)

Angel Yuste Baspino (Murcia)

Prueba individual

1.° Alberto Suárez Real (Asturias).

2.° Miguel Zurbano Crespo (Navarra).

3.° Ignacio Fernández-Huertas (Extremadura)

Circuito matemático

Marcos Baranda Femández (Asturias)

Miguel Angel Cánovas Rodríguez (Castilla-León)

Alberto Suárez Real (Asturias)

Beatriz Vizcaíno Tena (Galicia)

Prueba de investigación

Javier Ortiz Barranco (Andalucía)

Carlos Martín-Fuertes Moreno (Madrid)

Tania Barros García (Galicia)

Prueba de ingenio

Ignacio Fernández-Huertas (Extremadura)

Cristóbal Gallego Castillo (Murcia)

Ana Jiménez Castellanos (Madrid)

Juan Manuel Paz García (Andalucía)

Regularidad

1.° Alberto Suárez Real (Asturias)

2.° Miguel Zurbano Crespo (Navarra)

3.° Carlos Martín-Fuertes Moreno (Madrid) visto no dio tiempo a resolver íntegramente a ningún equipo. En ella utilizaron ábacos, pentominós, posters y recorrieron parte de la ciudad para, entre otras cosas, ayudar al arquitecto municipal a trasladar una fuente y calcular el costo de la base de un quiosco de música. Asimismo, tras «mirar y observar» detenidamente la iglesia de Rocamador, relataron y cuantificaron los múltiples hechos históricos que allí sucedieron.

Prueba de investigación

Tratar de llegar a las mismas conclusiones que Euler enunció en su teorema de grafos no era inicialmente tarea fácil. Cáceres, con el patrocinio de la Diputación Provincial, aportó el precioso marco del complejo cultural San Francisco. Esta prueba llevaba de nuevo a los participantes a trabajar en grupo, pero ahora el método científico era el protagonista. Un itinerario imaginario por la zona monumental de la ciudad, patrimonio de la humanidad, que posteriormente se hizo realidad, fue la excusa para proponer el problema de los cruces de caminos.

Prueba de ingenio

Tras la prueba anterior, después de la comida en la piscina del complejo deportivo de Cáceres, se llevó a cabo la última prueba. En traje de baño y bajo el cañizo que nos refugiaba del calor abrasador, los equipos, no sólo de chicos y chicas sino de profesores y profesoras, se enfrascaron en tratar de resolver cuestiones cortas, en las que el ingenio, la chispa, la intuición, el conocimiento de situaciones anteriores y los reflejos hicieron aparición para dar soluciones, muchas veces interesantes, a cada una de las preguntas formuladas. La percepción, los palillos, las cuerdas, la cuenta de la vieja, las pegas, las excursiones, etc. compusieron una hora y media en la que todos estuvimos enganchados a la actividad.

Actividades paralelas

Aún quedó tiempo para visitar la Asamblea de Extremadura y ser protagonistas activos en los escaños, recorrer la parte monumental de Cáceres, visitar el Barrio Gótico de Valencia de Alcántara, pasear por la calles de las ciudades portuguesas de Marvao y Castelo de Vide, bañarse en la piscina natural de Portagen y montar movidas nocturnas en las habitaciones del hotel, exclusivo para los participantes en esta VII Olimpiada.

Acto final

El viernes 28 tras la cena ofrecida por el Excmo. Ayuntamiento de Valencia de Alcántara y con la presencia de las instituciones públicas y privadas que ayudaron a la realización de la Olimpiada, se llevo a cabo el final de la fiesta y la entrega de premios a los ganadores citados anteriormente. Por último, se nombraron a los tres primeros clasificados y premios a la regularidad en esta Olimpiada Matemática Nacional.

Y así llegamos todos a la meta, cansados, pero con el deber cumplido y confiados de haber andado el camino en una buena dirección para entregar el testigo a los compañeros de la Sociedad Asturiana que serán los encargados de organizar la próxirna edición.

Hasta entonces, suerte para todos.

José Macías Marín
Coordinador Nacional de la Olimpiada

PRUEBA POR EQUIPOS

LAS COLUMNAS

Augusta Emerita (la Mérida romana) fue una gran ciudad. Fundada como colonia en el año 25 a. C. para premiar a las legiones victoriosas de la guerra cántabra, llegó a alcanzar el noveno lugar entre las diecisiete ciudades más importantes del mundo romano (así lo afirma el poeta Marco Ausonio en el siglo IV).

El tamaño de algunas construcciones públicas permite estimar la población de la colonia y sus alrededores. Serían entre 30.000 y 50.000 los habitantes que llegaron a poblarla.

Dispuso de varios puentes, tres acueductos, dos embalses, una importante red de alcantarillado, dos foros (plazas públicas), teatro, anfiteatro, circo, termas, templos..., de la grandeza de algunas de estas construcciones hablan las columnas.

Los romanos copiaron las proporciones y elementos de las columnas griegas. Los órdenes «dórico», «jónico» y «corintio» (ver gráfico) fueron adoptados por los arquitectos romanos que, a su vez, crearon el orden compuesto.

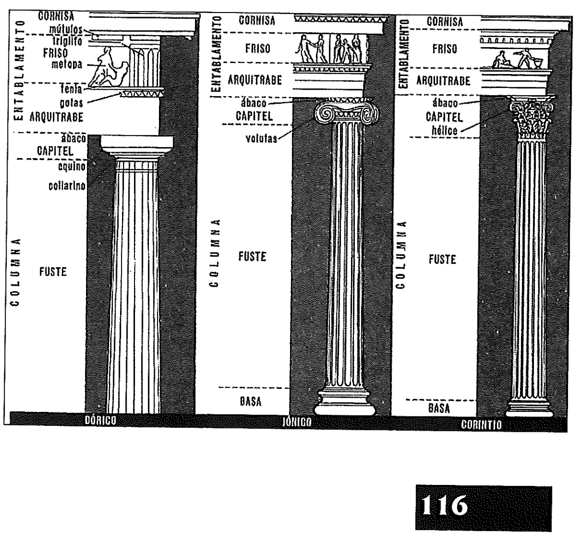
Para que las columnas resulten bellas y armoniosas, es preciso respetar el llamado módulo que no es más que la relación existente entre el diámetro del extremo inferior y la altura de la columna. Así, en el orden dórico esta relación es de cuatro a seis veces. Nueve veces en el jónico y diez en el corintio. Además, en este último, el capitel tiene una altura igual a la sexta parte del diámetro inferior.

Los tres tipos de columnas presentan canales o estrías a lo largo del fuste. Suelen ser 20 en el caso del dórico y 24 en los otros dos.

Hasta nosotros han llegado muy pocos restos de lo que fueron los foros (plazas públicas) de Mérida. Sabemos que hubo dos: uno provincial y otro municipal, este último más conocido.

El foro municipal era una gran plaza porticada rodeada de grandes edificios públicos (para más información observa las salas VIII, IX y X del museo).

Vuestra próxima tarea consiste en idear un método que nos permita calcular la altura de las columnas del foro municipal. Ayudaos de toda la información que te hemos dado hasta ahora y de los restos arqueológicos que puedes encontrar en la sala X del museo.



Recordad que las columnas se hacen más delgadas a medida que van creciendo.

¿Cuánto medían las columnas del foro? Explica detalladamente el procedimiento seguido.

Una vez contestada la pregunta anterior, no tendréis mucha dificultad para estimar la altura de las columnas del escenario del teatro romano (las de la parte baja), pero ¿seríais capaces de calcular de una forma aproximada el diámetro de la parte superior de esas columnas? Explicadlo.

EL TEATRO

Todos los días de fiesta, los romanos celebraban representaciones teatrales en honor de los dioses. Las obras eran sencillas y cortas. Los actores se cubrían el rostro con máscaras que caracterizaban al personaje. A las representaciones podían asistir todos los ciudadanos, incluso las mujeres y los niños, nunca los esclavos.

Aunque estos espectáculos eran los más nobles, no eran los preferidos del pueblo. Las luchas de gladiadores del anfiteatro y, sobre todo, las carreras del circo, eran los actos festivos que más público congregaban (uno de cada cinco ciudadanos acudía al teatro, uno de cada tres al anfiteatro y uno de cada dos al circo).

El teatro romano de Mérida se construyó por los años 16-15 a.C., tenía una capacidad de 5.500 espectadores y tenía un diámetro total de 96 metros, mientras que el diámetro de la «orchestra» era de 30 m. Constaba de tres partes esenciales: la «cavea» o gradas de forma semicircular, la «orchestra» o espacio semicircular destinado a coros y bailes, y la «scena» o lugar destinado a representaciones teatrales.

A su vez, la cavea se dividía en tres partes: «ima cavea» la más baja, «media cavea» la del medio y «summa cavea» la más alta. Estaban separadas por corredores y a cada una se accedía por puertas distintas. Los espectadores ocupaban una u otra dependiendo de su clase social.

Os pedimos que penséis un método para averiguar qué número aproximado de espectadores tenía cabida en cada una de las caveas, podremos así saber a qué estrato de la población le interesaba más el teatro. Explicadlo bien antes de hacer cálculos.

Puedes encontrar más información en las salas I, II y III del museo.

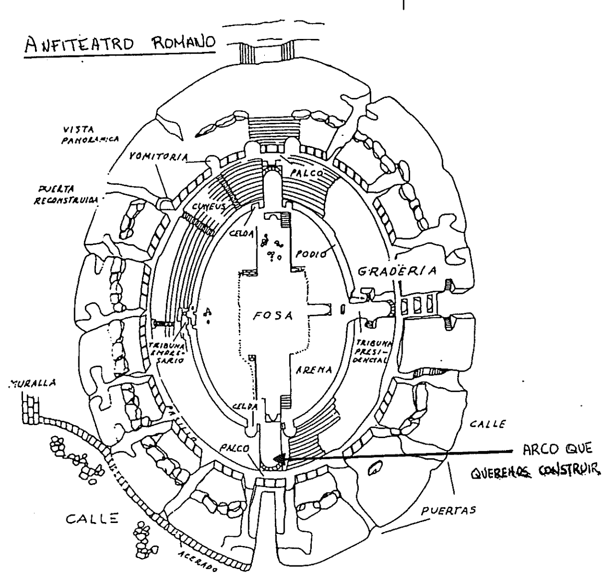
EL ARCO DE MEDIO PUNTO

Los romanos fueron grandes ingenieros y su empeño arquitectónico se encaminó principalmente a la construcción de obras que fueran de utilidad para los ciudadanos: puentes, acueductos, calzadas, teatros, circos, templos, grandes plazas, etc.

En sus edificaciones utilizaron la piedra (poco frecuente hasta entonces) y los muros sin cemento en cuya construcción eran auténticos maestros. Cuando lo necesitaban, también sabían fabricar mortero fuerte, ladrillos y cemento.

Una de sus principales herramientas arquitectónicas fue el famoso arco de medio punto. Arco semicircular que podemos ver en la mayor parte de sus construcciones.

El arco de medio punto está formado por una serie de piedras en forma de cuña llamadas «dovelas». Son siempre un número impar y la más importante, o «clave», es la que ocupa el lugar central.



Encontraréis estos arcos en cada una de las puertas de acceso a las gradas del teatro y también en el anfiteatro.

Suponed que sois arquitectos romanos y debéis diseñar la construcción de un arco de medio punto. Los canteros (encargados de tallar las piedras) esperan instrucciones precisas sobre el tamaño y forma de cada una de las dovelas.

Haced un plano donde se detallen las mediciones que deben hacerse y se explique a los canteros cómo deben obtenerse las piedras para que al final encajen perfectamente y formen el arco. Como aplicación de vuestro trabajo, diseñad sobre el papel el arco de la puerta de acceso a la arena del anfiteatro que aparece marcado en el croquis que se acompaña. ¿Cuál sería el volumen total de piedra necesaria para tallar dicho arco (solamente la parte semicircular)?

PRUEBA INDIVIDUAL

1. DIFERENCIA DE TAMAÑO

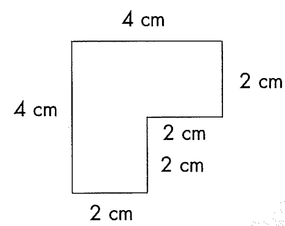
En la novela *Los Viajes de Gulliver* de Jonathan Swift (1726) se narra que Gulliver, el protagonista, viaja por varios países imaginarios, uno de ellos es Lilliput, cuyos habitantes son todos enanos y donde todo es reducido de tamaño. Encontrándose en este último país sabemos que Gulliver es semejante a los liliputienses, siendo 12 veces más alto que ellos. Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos colchones de liliputienses deben coserse entre sí para hacerle uno a Gulliver, de forma que pueda dormir tan cómodamente como ellos?

b) La casa media de un liliputiense tiene un solar de 0,75 m^2. ¿Cuál debe ser el solar que debe tener la casa que le construyan?

2. POLIELES

Dada la siguiente figura geométrica y tomándola como guía:



a) Dividir la figura en 4 piezas iguales.

b) Dibujar razonadamente:
   - Un triángulo isósceles de la misma área que la figura dada.
   - Un rombo de la misma área que la figura dada.
   - Un exágono de la misma área que la figura dada. ¿Cuál es su perímetro?

3. CUBO MANÍA

Se tienen tres cubos colreados de forma diferente*. A cada uno de los colores se le ha asignado un valor natural.

¿Serías capaz de calcular dichos valores, sabiendo que cumplen las siguientes condiciones?:

a) La suma de los valores correspondientes a todas las caras de los cubos es 96.

b) La suma de los valores de las caras de uno de los cubos es 29.

¿Es única la solución?

* El juego de 3 cubos está pintado de la siguiente manera:

1 cubo con 4 caras amarillas y 2 verdes.

1 cubo con 3 caras amarillas y 3 verdes.

1 cubo con 1 cara amarilla, 3 verdes y 2 azules.

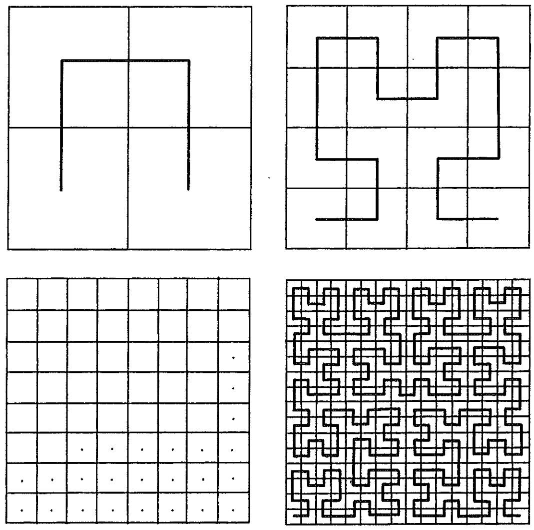
4. CURVA DE HILBERT

Las siguientes poligonales están construidas uniendo los centros de los cuadrados obtenidos al ir dividiendo cada cuadrado de la fase anterior en otros cuatros cuadrados.

Cada poliginal debe empezar en el centro del cuadrado de la esquina inferior izquierda y debe terminar en el centro del cuadrado de la esquina inferior derecha.

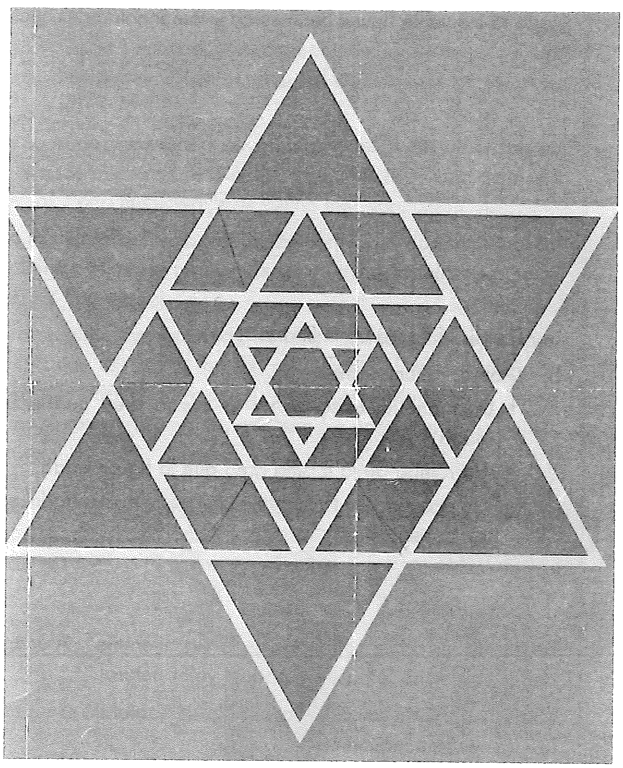
Puedes observar que cada poligonal está formada por cuatro poligonales como la de la fase anterior (reducida de tamaño) y conectándolas entre sí mediante tres segmentos de igual longitud.

En el dibujo que damos, las poligonales corresponden a la 1.ª, 2.ª y 4.ª fase. Construye el dibujo correspondiente a la 3.ª fase. ¿Cuál es la longitud, si el lado del cuadrado completo es de 10 cm?



CIRCUITO MATEMÁTICO

TRIÁNGULOS



¿Menos de 20? ¡Sigue buscando!

¿Más de 33? ¡Bien!

¿Más de 40? ¡Verifícalo!

Matemáticas sin límites/Holt. Rinehart and Wiston/Publishers. 5. Cartel 6

PENTOMINÓ

Los pentominós o pentaminós son figuras formadas por la unión de 5 cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. El juego está compuesto por las 12 posibles piezas que se pueden formar. En el tablero que se presenta, tienes un juego completo.

¿Será posible formar rectángulos de distintas dimensiones encajando las piezas unas con otras sin que sobre ningún espacio?

Por cada uno que razones tendrás mayor puntuación y si además construyes uno de ellos también aumentarás la puntuación.

ÁBACO

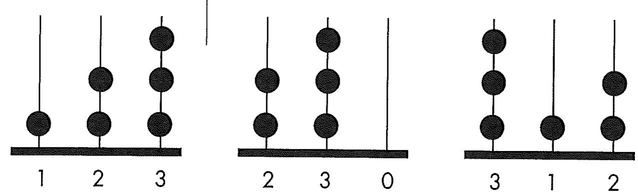
El vocablo ábaco ha sido utilizado para designar un instrumento de cálculo que ha evolucionado a lo largo de los tiempos.

El más antiguo y simple lo utilizaron muchas culturas anteriores, entre ellas la griega. Se cuenta que Arquímedes fue muerto por un soldado romano cuando estaba calculando con uno de ellos dibujado en la arena.

El «abax» de los griegos, «abaq» hebreo, «habas» romano, y el «suan pan» chino son algunos de sus nombres.

Seguro que en el colegio habrás visto y utilizado un modelo actual que, fundamentalmente, nos sirve para comprender cómo funcionan los números en los sistemas de numeración, en especial el decimal que es universal.

Aquí tienes un ejemplo:



En un modelo como este de tres barras se quiere saber qué números cumplirían la condición de que al cambiar una bola de una barra a la contigua se obtendría el número siguiente o anterior.

OBRAS

El arquitecto del Ayuntamiento está estudiando la posibilidad de hacer un escenario de hormigón, como base de un futuro quiosco de música, en el lugar que ocupa la fuente que hay en la Plaza Gregorio Bravo.

Para ello tomaría como base la figura que forman las farolas que la rodean. Si la altura que va a tener es de 2,5 metros, ¿cuántos metros cúbicos de hormigón necesitaría?

INVENTA UN PROBLEMA

Situaros en la plaza de la Constitución (plaza del ayuntamiento) y tras observar detenidamente todo lo que la rodea y en ella existe, inventa un problema que proponer a tus compañeros.

IGLESIA DE ROCAMADOR

La iglesia de Santa María de Rocamador es uno de los templos cristianos de Valencia de Alcántara, su nombre procede de la advocación de los franceses que vinieron a luchar contra el invasor moro, ROCH-AMADOR o amador de la Roca.

Esta iglesia ha tenido varias reformas a lo largo de los tiempos de su existencia y en su interior podrás observar su estructura, retablos, cuadros y otras circunstancias que habrás de tener en cuenta para realizar la siguiente prueba.

A) Año que aparece hasta en el techo. Los millares que tiene pueden servirte.
B) En éste se celebró una boda famosa. Suma sus cifras y repártelas siete veces.
C) Entonces se entrevistaron dos viudas de un mismo hombre. Su numeral es la clave.
D) Encuentra el número de juanes pintados.
E) El apodo del pintor del cuadro divino tiene un número de letras.
F) ¡Qué siglo! Restauraron hasta la techumbre. Lleva los datos anteriores a la casilla correspondiente y con imaginación completa los números que faltan.

A			12		F
B	D	C	4		E

INVESTIGACIÓN

UN PASEO POR CÁCERES

Cáceres fue fundada como colonia romana en el siglo I a.C. Desde entonces ha vivido momentos de decadencia con las invasiones bárbaras, resurgió bajo dominio almohade y alcanzó tiempos de esplendor con la reconquista cristiana.

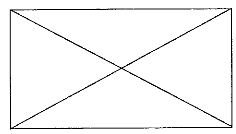
Tras su muralla, se fueron construyendo magníficas y austeras casas-palacio, torres, templos y conventos cuyo conjunto por su homogeneidad, belleza y conservación ha sido declarado Patrimonio de la Humanidad. Un paseo por sus calles transmite sensaciones evocadoras de otros tiempos que sobrecogen y cautivan al visitante.

Para comprobar todo esto, os invitamos a dar un paseo matemático por el Cáceres monumental. Tomad el mapa que os entregamos, en él aparecen una serie de calles, plazas y monumentos marcados en azul. Buscad de forma razonada (si es que existe) un itinerario que recorra todas las calles y plazas marcadas de forma que una misma calle nunca se recorra dos veces. Podremos pasar más de una vez (si es preciso) por las plazas o cruces, pero no por una calle que ya hayamos visitado antes.

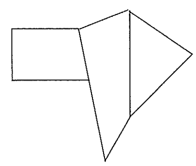
Primera ayuda

Esta tarea es muy semejante a los juegos que aparecen con frecuencia en libros, revistas o periódicos y que invitan al lector a reproducir un determinado dibujo, sin levantar el bolígrafo del papel ni pasar dos veces por el mismo sitio (salvo cruces). Son los llamados «grafos unicursales» que fueron estudiados por Euler (importante malemático). Él descubrió las razones por las que unas veces era posible hacer tales dibujos y otras no.

Olvidémonos por el momento del plano de Cáceres e investigad sobre el tema: ¿por qué unas veces sí y otras no?, ¿dónde está el truco? Comenzad haciendo pruebas con dibujos como los que aparecen a continuación. Intentad descubrir sus secretos. Cuando lo hayáis logrado, seguro que os resulta más fácil pasear por Cáceres.

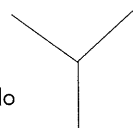


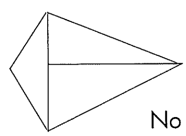
No puede hacerse



Sí, puede hacerse

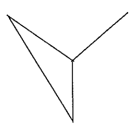
No

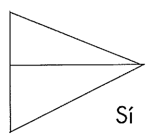




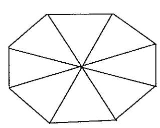
No

Sí

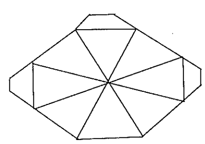




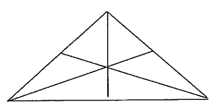
Sí



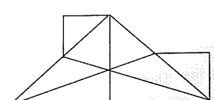
No



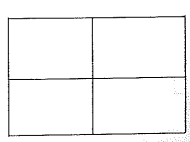
Sí

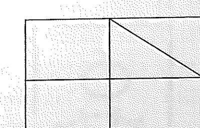


No



Sí





NOTA: Disponéis de otras dos ayudas que podréis solicitar (una o las dos) tras la primera media hora de trabajo. Anotad todas vuestras averiguaciones, las buenas y las malas. Explicad lo mejor que podáis todos los métodos que probéis. Recordad: lo importante es el procedimiento.

Segunda ayuda

Observa los siguientes dibujos, unos pueden hacerse y otros no. Algunos que no podían dibujarse con un sólo trazo, pueden serlo tras hacerles pequeños añadidos.

Tercera ayuda

Cuando uno de los dibujos puede hacerse con un único trazo:

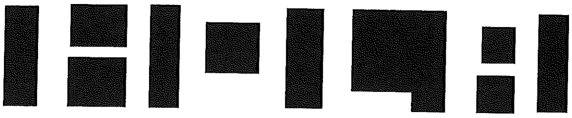
¿por dónde empiezas?,

¿dónde terminas?

Fijaos bien, el secreto está en los cruces.

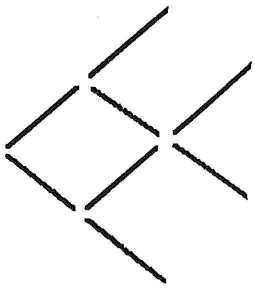
INGENIO

1. ¿AQUI QUÉ PONE?

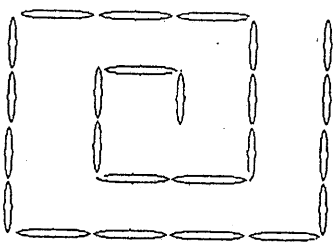


2. PROBLEMAS CON PALILLOS Y MONEDAS

a) Un pez tropical está nadando hacia el Oeste. Hazle ir hacia el Este cambiando la posición de sólo tres palillos.



b) Transforma la espiral de la figura en tres cuadrados (no es necesario que todos sean iguales) moviendo sólo 4 palillos.



c) Coloca 3 monedas de manera que se vean 2 caras a un lado de la raya y 2 cruces al otro.

---

3. PROBLEMAS DE «LA CUENTA LA VIEJA»

a) Cinco obreros en cinco horas cavan 5 metros de zanja. ¿Cuántos obreros serán necesarios para cavar en 100 horas 100 metros de zanja?

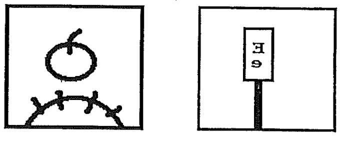
b) Cuando Ana va al instituto a pie y vuelve en autobús, tarda hora y media. Si va y vuelve en autobús, tarda media hora.
¿Cuánto tardará si hiciese la ida y la vuelta a pie?

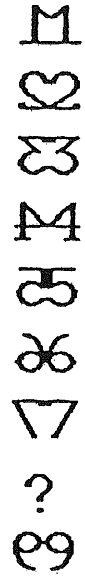
c) Cada mochuelo a su olivo y sobra un mochuelo. En cada olivo dos mochuelos y sobra un olivo.
¿Cuántos mochuelos y olivos hay?

d) Serías capaz de repartir en dos partes iguales los 8 litros de leche que llenan una vasija disponiendo de otras dos vasijas, también sin divisiones, vacías, de 3 y 5 litros.

4. CON IMAGINACIÓN

a) Interpreta los garabatos de la figura. ¿A que no adivinas qué son?





b) ¿Cuál es el término (?) que falta en la serie de la figura adjunta?

5. PROBLEMAS CON TRUCO

a) ¿Qué palabra de quince letras todos los licenciados en filología por Salamanca escriben incorrectamente?

b) ¿Qué es lo contrario de «no estoy dentro»?

c) Acomoda las siguientes letras: A B A P A S O N U L A L A R, de manera que formenn una sola palabra. No es nombre propio ni voz extranjera. (Sesudos/as abstenerse).

d) La madre de Luis tiene cinco hijos. El primero se llama Pa, el segundo Pe, el tercero Pi, el cuarto Po. ¿Cómo se llama el quinto?

e) ¿Qué razón puede tener un barbero sevillano para preferir cortar el pelo a dos madrileños que a un solo catalán?

f) ¿Cuál es la pregunta que contiene la palabra «melón» sin razón aparente?

g) Cuando un reloj da 17 campanadas, ¿qué hora es?

h) ¿Cuántos minutos, a fuego fuerte, son necesarios para cocer un huevo duro?

i) ¿Cómo aumentar el número 666 a una vez y media sin realizar con él ninguna clase de operaciones matemáticas?

j) Cinco por cuatro veinte, más dos, igual a veintitrés. ¿Cómo puede ser eso cierto?

k) ¿Sabrías cómo quitarle a 19 uno y obtener como resultado 20?

1) Escribe 1.000 con tres números romanos.

6. ¡YO NO PASO!

En la entrada al Colegio hay dos carteles con los contenidos siguientes:

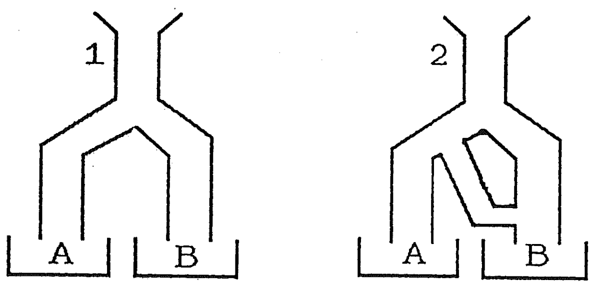
No hagas caso de los carteles

Prohibido entrar en el colegio

Supón que has llegado a las 9:30 al Colegio con unas «enormes» ganas de asistir a clase y que has leído los dos carteles anteriores. Explica razonadamente si entrarías en el Colegio o te marcharías a tu casa.

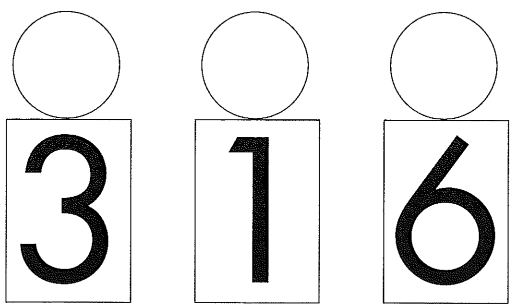
8. EL MÉTODO DEL MOGOLLÓN

Se han echado 1.000 bolas por uno de los aparatos. Hemos contado 386 bolas en la caja A y 614 bolas en la B. ¿Qué aparato se ha utilizado el 1 o el 2?



8. MÚLTIPLOS DE CABEZA

¿Cómo deben colocarse estos 3 chicos para que las cifras marcadas en sus camisetas formen un número de 3 cifras que sea múltiplo de 7?



9. ¡ME FALTAN DATOS!

a) ¿Cuál crees que fue el día que menos hablaron los españoles y las españolas el año pasado?

b) Imagina que eres un taxista. Tu taxi es amarillo y negro y ya tiene siete años. Faltan tres meses para pasar la ITV. Una de las escobillas del limpia parabrisas está rota; el carburador necesita una puesta a punto. Aunque en el depósito de combustible caben cincuentar litros, sólo está a unos tres cuartos de su capacidad. ¿Qué edad tiene el taxista?

10. LA EXCURSIÓN SEXISTA

Los encargados de organizar la excursión de los 120 alumnos y alumnas (60 son chicas y 60 son chicos) de 8.° de EGB, han contratado dos autobuses con 60 plazas cada uno. Para fastidiar, los organizadores deciden ocupar un autobús con todos los chicos y el otro para todas las chicas.

En la primera parada hay un grupo de chicos que se introducen en el autobús de las chicas. El conductor de este autobús, al comprobar que había más viajeros que plazas, devolvió al otro autobús todas las personas que sobraban. Entre ellas había chicos y chicas.

Una vez que todas las plazas estaban cubiertas en los dos autobuses, reanudaron 1a marcha. Por tanto, en el autobús de las chicas van algunos chicos y en el de los chicos algrunas chicas. En ese momento, ¿qué será mayor, el número de chicos en el autobús de las chicas o el número de chicas en el autobús de los chicos? Razona tu respuesla.

11. EL CUBO DE LAS CARAS NEGRAS

Pintamos un cubo de madera con pintura negra y luego lo cortamos en 3x3x3=27 cubitos iguales. ¿Cuántos cubitos obtendremos con una cara pintada?, ¿y de dos caras pintadas?, ¿y de tres caras pintadas?, ¿y con cuatro caras pintadas?, ¿y con ninguna cara pintada?

12. OTRA EXCURSIÓN

Con motivo de la Semana Cultural, los alumnos del grupo de Ecología acompañados por su profesora señorita Reciclatodo, realizan una marcha ecológica por la Sierra de Gredos. Un cambio brusco de temperatura y una copiosa nevada les obligó a resguardarse en un refugio, al que llegaron calados, hambrientos y con frío. La profesora pide las cerillas al encargado del material que descubre horrorizado que sólo le queda una.

En el refugio encuentran un cámping gas, una vieja lámpara de petróleo, una chimenea grande con leña y una cocina de carbón en perfecto estado. La señorita Reciclatodo pregunta a sus alumnos qué debe encender primero. Teniendo en cuenta las especiales circunstancias en que se encuentran, ¿qué responderíais vosotros?

ICME 8

En la crónica que se hacía en el n.° 23 de SUMA, sobre el ICME 8, en el cuadro sobre la participación española quedó sin citar la intervención, como ponente en el grupo temático TG18, de José Ramón Vizmanos Buelta que impartoó la conferencia: «¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas?».

SUMA 26

noviembre 1997

La reforma de la Primaria: ¿Cómo van las Matemáticas?

El curso pasado terminó su etapa de Educación Primaria la primera generación de alumnos desde que entró en vigor la LOGSE. Es un momento adecuado para empezar a contemplar el cambio que ha sufrido la enseñanza elemental de matemáticas en nuestro país.

SUMA está preparando un Informe para el inicio del próximo curso, en el que se valore el cambio en la enseñanza de las matemáticas en el nivel primario, que parta tanto de las intenciones de la reforma como de las realidades de su aplicación, y que evite, en lo posible, tanto las descalificaciones tajantes como las defensas a ultranza.

Los aspectos que se van a tomar en consideración son variados e incluyen:

- ¿Qué objetivos terminales se pueden alcanzar? ¿cuáles no?
- ¿En qué sentido debería modificarse el currículo para adaptarlo a la realidad?
- El currículo abierto, ¿es posible?, ¿cómo se está materializando?
- Muestras de secuenciaciones de contenidos, de proyectos curriculares de matemáticas, etc.
- Experiencias de aula: muestras de lo que se está haciendo en las aulas, de cómo puede construirse un determinado conocimiento matemático en los niveles elementales.
- Necesidades en la formación de los profesores en relación al nuevo currículo.

Se podrán enviar aportaciones, según las normas de publicación habituales en SUMA, que se refieran preferentemente a uno o varios de los aspectos reseñados, para que sea considerada su inclusión dentro del Informe por sus coordinadores.

INFORME

NUEVAS TARIFAS DE SUSCRIPCIÓN

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

SUMA

SUMA 24
febrero 1997

Olimpiada de la FESPM
Jornadas de Coeducación
III Jornades (Al-Khwarizmi)
VIII JAEM

CONVOCATORIAS

VIII Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

La octava edición de la fase nacional de la olimpiada, convocada por la Federación, se celebrará los días 23 al 28 de junio de 1997 en Asturias organizada por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes y coordinada por Josechu Arrieta Gallastegui. Colaboran diferentes instituciones asturianas: Consejería de Educación y Cultura del Principado de Asturias, Fundación Municipal de Cultura del Ayuntamiento de Gijón, Dirección Provincial del MEC, Universidad de Oviedo y los Ayuntamientos de Gijón, Oviedo, Cangas de Onís y Llanes.

En el artículo 2 del Reglamento de la Olimpiada Matemática de la FESPM se establecen los siguientes objetivos generales:

- Propiciar la participación masiva de estudiantes y profesores en las fases previas al encuentro nacional, de acuerdo con los objetivos propuestos en los estatutos de la Federación.
- Fomentar entre los estudiantes el gusto por las Matemáticas, así como presentar una visión de las mismas complementaria a la utilizada en el aula.
- Favorecer las relaciones de amistad y conocimiento entre jóvenes de diversas comunidades autónomas.

En esta VIII edición se pretende lograr, además, los siguientes objetivos específicos:

- Aprovechar la celebración en Asturias de la Olimpiada Nacional para divulgar en nuestra región los fines que se persiguen con las olimpiadas y fomentar con ello una actitud positiva hacia las matemáticas en alumnos, profesores y la sociedad en general.

- Fomentar el espíritu cooperativo, potenciando las modalidades de participación en equipo y proporcionar a todos los participantes la ocasión de hacer matemáticas con placer.
- Promover la incorporación de la resolución de problemas a las clases de matemáticas, divulgando los materiales generados en la olimpiada entre el profesorado de matemáticas.
- Dar a conocer a los alumnos y alumnas participantes, así como al profesorado acompañante, las singularidades culturales, geográficas y humanas de Asturias.

El número total de participantes será de 43, correspondiendo a cada comunidad el número de representantes fijado por la FESPM: Albacete (2), Andalucía (6), Andorra (2), Aragón (3), Asturias (4), Canarias (3), Castilla y León (3), Cataluña (3), Extremadura (3), Galicia (3), Madrid (3), Murcia (2), Navarra (3) y Comunidad Valenciana (3).

Se realizarán cuatro tipos de pruebas:

a) *Prueba individual:* 4 problemas que se resolverán en 2 horas.

b) *Prueba por equipos* (3 o 4 componentes): en la primera parte, llamada prueba de colaboración, se propondrán 6 problemas que serán resueltos durante un tiempo de 50 minutos. En la segunda parte, llamada prueba de velocidad, los equipos deberán realizar 10 actividades cortas, disponiendo de 5 minutos para cada una de ellas.

c) *Circuito matemático* (equipos): se realizará en Oviedo en la zona de los monumentos prerrománicos del Naranco. Se tratará de varias pruebas relacionadas con el entorno donde se desarrolla.

d) *Prueba sobre fotografía matemática* (parejas o tríos): se entregará a cada pareja una cámara desechable, con un carrete de 12 fotos, disponiendo de tres días para la realización de las fotografías.

La evaluación y valoración de las diferentes pruebas correrá a cargo del comité organizador con la colaboración de los profesores y profesoras acompañantes.

No habrá premios específicos para las diferentes pruebas: todos los participantes recibirán un obsequio y un diploma acreditativo de su participación en la olimpiada. Se darán a conocer los tres primeros clasificados en cada una de las pruebas que se celebrarán.

El programa de actividades se complementará con visitas turísticas a distintos lugares de Asturias, así como otras actividades lúdicas destinadas a favorecer un clima de convivencia entre los participantes.

Coincidiendo con la celebración de la olimpiada se desarrollarán algunos actos de carácter divulgativo de las matemáticas (exposición y conferencias), dirigidas al público en general.

Programa de actividades

Domingo, 22

- Recogida de participantes.
- Recepción en el albergue «Palacio San Andrés de Cornellana» de Gijón. Apertura, bienvenida y entrega de documentación.

Lunes, 23

- Actividad de dinámica de grupos en Antiguo Instituto Jovellanos de Gijón.
- Prueba por equipos en el mismo lugar (pruebas de colaboración y de velocidad).
- Presentación de prueba fotográfica.
- Recepción oficial en el Ayuntamiento de Gijón.
- Visitas en Gijón: planetario, universidad laboral, termas, pueblo de Asturias.
- Cena y fiesta de bienvenida: «foguera de S. Xuan».

Martes, 24

- Durante la mañana visitas en Oviedo: Universidad, Catedral y zona antigua, Ayuntamiento.
- Visita a los monumentos prerrománicos del Naranco.
- Realización de la prueba por equipos «circuito matemático» en el Naranco.

Miércoles, 25

- Prueba individual (Antiguo Instituto Jovellanos).
- Visita al museo de la minería (Langreo).
- Finaliza el plazo para entrega de carretes del concurso de fotografía.
- Actividad nocturna sobre astronomía dirigida por grupo OMEGA.

Jueves, 26

- Excursión al oriente de Asturias: Cangas de Onís, Covadonga, Los Lagos y Llanes.
- Fiesta nocturna: actuación de grupo de magia.

Viernes, 27

- Exposición de fotografías del concurso.
- Entrega de premios en el Ayuntamiento de Gijón.
- Comida de clausura.
- Tarde libre en Gijón.

Sábado, 28

- Regreso de los últimos participantes.

Segundas Jornadas de Matemáticas y Coeducación

La Organización Española para la Coeducación Matemática Ada Byron envía el primer anuncio de las Segundas Jornadas de Matemáticas y Coeducación, que tendrán lugar en Madrid los días 24, 25 y 26 de abril de 1997.

Las jornadas estarán compuestas por sesiones plenarias, sesiones semiplenarias, conferencias, ponencias, comunicaciones, talleres, paneles, mesas redondas, exposiciones, etc.

Los participantes tendrán la oportunidad de:

- Discutir e intercambiar nuevas ideas y experiencias cara a cara.
- Relacionarse con personas interesadas en matemáticas y coeducación.
- Que sea reconocida su asistencia por el Ministerio y obtener por ello créditos.
- Recibir las actas correspondientes con todas las conferencias, talleres y ponencias presentadas.
- Ver publicada su contribución si presenta una ponencia o comunicación.

Algunos de los temas que se tratarán son:

- Teoría sobre «Género y Matemáticas».
- Intercambio de experiencias en coeducación y Matemáticas.
- La educación matemática en mujeres adultas.
- Ideas buenas para la clase de matemáticas.
- Evaluación del libro de texto.

Se podrán presentar artículos como ponencias, comunicaciones, talleres, paneles, etc. La extensión aconsejada es de seis páginas.

La cuota de inscripción es de 6.000 pesetas, excepto para socios y socias que es de 3.000 pesetas.

Para más información:

OECOM Ada Byron

c/ Almagro, 28. 28010 MADRID

Tno.: 91 310 47 78

III Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana

Durante los días 16, 17 y 18 de mayo de 1997 se van a celebrar en Valencia las terceras jornadas que organiza la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi. El objetivo consiste en propiciar que todos aquellos que trabajan en la enseñanza de la matemática en cualquier etapa académica, o bien tengan interés por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tengan un foro donde explicar sus experiencias en el aula, investigaciones en educación matemática, propuestas innovadoras, uso de determinados recursos en el aula, etcétera.

Las jornadas se inaugurarán el viernes 16 de mayo en el Palau de Pineda y las siguientes sesiones, correspondientes al 17 y 18, se celebrarán en la Facultad de Matemáticas, en el Campus de Burjassot. Las cuotas de inscripción son de 3.000 pesetas para los miembros de la sociedad y de 8.000 pesetas para los no socios. La cuota incluye la comida del sábado y las actas de las jornadas. Está previsto facilitar información sobre alojamiento.

Los contenidos de las jornadas girarán alrededor de las siguientes actividades:

- *Sesiones plenarias.* Conferencias que ofrecen una visión panorámica del trabajo de las matemáticas en el aula, o bien perspectivas y nuevos planteamientos. Estos ponentes serán invitados por la organización.
- *Sesiones de trabajo simultáneas.* Constarán de comunicaciones de aproximadamente 30 minutos de duración y un debate final de 15 minutos.
- *Talleres.* Se trata de sesiones de trabajo en las que, de forma práctica, los comunicadores muestran unos recursos didácticos o unos planteamientos innovadores. Duración estimada de 1 hora.
- *Exposición de material didáctico.* Materiales aportados por los participantes, por casas comerciales, exposición de fotografías y otros.

El límite de admisión de comunicaciones es el 30 de marzo. Antes del 30 de abril los encargados de la selección comunicarán a los autores la aceptación o no de los trabajos enviados.

Para más información dirigirse a:

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi

Apartado 22.045

46071-Valencia

Tlf.: (96) 157 20 61

Fax: (96) 156 13 69

E-mail: cepto@ctv.es

htpp://www.oli14.uv.es/~semcv

VIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

1. *Entidad organizadora*:

   Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), por medio de la Sociedad Castellano-Leonesa de Profesorado de Matemáticas.

2. *Fechas*: 9, 10 y 11 de septiembre de 1997.

3. *Lugar de celebración*: Facultad de Ciencias. Plaza de la Merced s/n. Salamanca.

4. *Objetivos*:

   Enmarcados dentro de los fines primordiales de las Sociedades de Profesores de Matemáticas de todo el estado español –contribuir a la mejora de la educación matemática e impulsar la formación continua del profesorado de matemáticas– las VIII JAEM tienen los siguientes objetivos concretos:

   - Invitar a participar a todo el profesorado de manera que estén representadas todas las sociedades federadas.
   - Facilitar el intercambio de experiencias y la difusión de trabajos de innovación entre todos los grupos y sociedades relacionados con la Educación Matemática.
   - Ofrecer propuestas de actividades del entorno inmediato como recursos para la enseñanza de las Matemáticas.

5. *Estructura general*:

   - Conferencias plenarias.
   - Conferencias en las mesas temáticas.
   - Comunicaciones de los participantes.
   - Paneles.
   - Talleres.
   - Exposiciones: fotografía, informática, libros...

6. *Número de participantes*:

   Se ha limitado el número de inscripciones a 600, a las que se añadirán otras 50 personas entre organización e invitados.

7. *Niveles o modalidades que imparte el profesorado asistente*:

   Por los temas que se van a tratar, los asistentes serán de todos los niveles, desde Primaria a la Universidad.

8. *Conferencias plenarias*:

   - Paulo Abrantes.
   - Michelle Artigue.
   - Marta Berini.

9. *Mesas temáticas*:

   - La formación inicial y permanente del profesorado de Matemáticas.
     (Ponentes: Carmen Azcárate y Santiago Fernández.)
   - La gestión de la clase de Matemáticas.
     (Ponentes: Paulo Abrantes y José Luis Álvarez.)
   - Las Nuevas Tecnologías y su incidencia en la enseñanza de las Matemáticas.
     (Ponentes: Leoncio Santos y Juan Manuel García.)
   - Relaciones de las Matemáticas con otras materias escolares.
     (Ponentes: Carles Lladó y Carmen Calvo.)
   - Balance de la implantación de los nuevos currículos.
     (Ponentes: Mª Victoria Armendáriz y Javier Brihuega.)
   - Tratamiento de la diversidad en Matemáticas.
     (Ponentes: Amaia Basarrate y Charo Nomdedeu.)
   - Las matemáticas en la vida cotidiana, en la ciencia, en el arte y en la técnica.
     (Ponentes: Luis Balbuena y Fernando Corbalán.)
   - Las matemáticas en la Educación Infantil y Primaria.
     (Ponentes: Bernardo Gómez y Manuel Alcalá.)
   - Las matemáticas en la ESO, Bachillerato y FP.
     (Ponentes: Constantino de la Fuente y Eliseo Borrás.)
   - Las matemáticas en la enseñanza universitaria.
     (Ponentes: Gloria Serrano y Michelle Artigue.)

10. *Plazos para la presentación de trabajos y resúmenes*: 30 de abril de 1997.

11. *Alojamiento*: Se gestionarán reservas en colegios mayores a precios especiales.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ______________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad | | | | | Oficina | | | | | DC | | | Cuenta | | | | | | | | | | | |
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM