SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 22

22

JUNIO

1996

SUMA 22
junio 1996

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.200 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

SUMA 22
junio 1996

En vísperas del ICME-8

EDITORIAL

Son muy variadas las formas por las que los profesionales de la educación nos podemos perfeccionar: experiencia propia, trabajo en común dentro del departamento, asistencia a cursos sobre aspectos concretos, lectura de libros y revistas, participación en jornadas, encuentros, congresos... Todas ellas no sólo son compatibles sino que son complementarias y, en conjunto, hacen que, incluso de forma inconsciente, vayamos cambiando concepciones y formas de hacer en la clase. Cada una tiene características diferentes y virtualidades propias; mientras en el departamento se pueden estudiar cuestiones muy concretas de la realidad diaria, el libro puede proporcionar la reflexión sobre aspectos educativos más globales; mientras en el curso se pueden intercambiar ideas con el ponente o los otros participantes, la revista permite un estudio más sosegado, más tranquilo en el que el lector elige el tiempo y el lugar.

Un congreso posee unas características especiales: es un foro en el que se presentan las últimas novedades, tanto en pequeñas experiencias muy concretas como en resultados de investigaciones de más amplio rango. Pero lo que también hace provechoso un congreso es la posibilidad de intercambio de ideas entre todos los participantes, no sólo en las sesiones de trabajo, en ponencias, comunicaciones, talleres, grupos temáticos, etc., sino también en los pasillos y, por qué no, tomando un café en el bar más próximo. La posibilidad de establecer contacto con colegas que están trabajando en líneas paralelas o complementarias, contrastar ideas, intercambiar experiencias o materiales, enterarse de la publicación del último libro sobre una cuestión concreta o conocer la existencia de una revista que ignorábamos, entre otras muchas cosas, hace de los congresos algo muy vivo que lo convierte en una actividad distinta.

Si bien todo esto es cierto en cualquier tipo de jornadas o congresos, evidentemente se magnifica cuando se trata del ICME, el más importante congreso dedicado a la Educación Matemática. La valentía de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y, muy especialmente, de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales nos va a permitir disfrutar este año en España de este gran acontecimiento que por primera vez se va a celebrar en un país de habla hispana.

La posibilidad de escuchar «en vivo y en directo» a las máximas autoridades en Educación Matemática, de participar en grupos de trabajo con colegas de otras latitudes, de hacer nuestro primer «pinito» internacional presentando una comunicación, de conocer experiencias muy variadas, de intercambiar puntos de vista con personas a las que no conocíamos pero de las que quizás habíamos leído algún artículo, de tocar un material cuyas posibilidades didácticas ni siquiera intuíamos, de... va a constituir una experiencia difícilmente repetible para muchos de nosotros.

No es aventurado predecir que para la educación matemática, en general, y para la vida de la Federación y de sus sociedades, en particular, va a haber un antes y un después del ICME-8. ¡Aprovechémoslo!

Al día siguiente de clausurarse el ICME se producirá el relevo en la Secretaría General de la Federación. En la última Junta de Gobierno se eligió como nueva Secretaria General a Carmen Azcárate. A ella y a los miembros de su equipo, Marta Berini y Jordi Deulofeu, como vocales, y Florencio Villarroya, como tesorero, les ofrecemos desde SUMA toda nuestra colaboración y les deseamos toda clase de éxitos en esta difícil y apasionante tarea.

SUMA 22
junio 1996, pp. 5-7

Una breve descripción de la Comisión Internacional de Educación Matemática y de sus actividades*

Miguel de Guzmán

La actividad científica se organiza a nivel global en la actualidad a través de un organismo internacional e interdisciplinar que se denomina el Consejo Internacional de Uniones Científicas. Lo forman 20 uniones científicas entre las cuales se cuenta, como órgano internacional que de algún modo coordina las diversas actividades en torno a la matemática, la Unión Matemática Internacional (la IMU, International Mathematical Union).

La actividad matemática internacional se estructura por tanto a través de la IMU, un organismo que coordina las acciones comunes en el campo matemático de 52 países actualmente. Cada uno de ellos envía representantes a las Asambleas Generales de la IMU que se celebran cada 4 años, generalmente en el transcurso del Congreso Internacional de Matemáticos. Ellos eligen los miembros del Comité Ejecutivo de la IMU, así como los miembros del Comité Ejecutivo del ICMI (Comisión Internacional de Educación Matemática), que se encarga de coordinar las actividades en el campo de la *educación* matemática de los diferentes niveles de la educación propiamente académica así como las que se refieren a la interacción de las matemáticas con la sociedad. Además del ICMI existe otra Comisión (CDE, Comission on Development and Exchange) que se encarga de fomentar el desarrollo propiamente matemático a través del intercambio personal e institucional.

El ICMI agrupa de una forma u otra a más de 70 países actualmente. Todos los países miembros de la IMU son automáticamente miembros de pleno derecho del ICMI, pero existen otros que pertenecen al ICMI aun sin ser, por diversas razones miembros de la IMU.

El ICMI se estructura en la actualidad alrededor de un Comité de unas 10 personas elegidas por la Asamblea General de la Unión Matemática Internacional para un

ARTÍCULOS

* Artículo publicado por el autor en *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, 88 (1994), 319-322.

período de cuatro años. A nivel nacional existe en unos cuantos países, como se recomienda intensamente, una Subcomisión del ICMI, en la que se integran, fundamentalmente, los organismos nacionales que tienen que ver con los problemas de la Educación Matemática a nivel práctico y teórico, que normalmente se encarga de elegir los representantes del respectivo país en las Asambleas del ICMI, que tienen lugar usualmente cada cuatro años aprovechando la celebración de los Congresos Internacionales en Educación Matemática. Se piensa que esta forma de estructura nacional logra dar un mayor dinamismo y una mayor permanencia de la influencia del ICMI que si sus actividades se hacen depender demasiado estrechamente del interés y personalidad de uno o dos individuos.

El ICMI, en realidad, es un órgano mucho más antiguo que la Unión Matemática Internacional, que nació en 1952. El ICMI fue fundado en 1908, a partir de una idea del matemático americano David Eugene Smith, quien la propuso en el marco del cuarto Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado entonces en Roma.

Su primer presidente fue el matemático alemán Félix Klein, y su órgano oficial fue entonces, y lo sigue siendo actualmente, la prestigiosa revista *L'Enseignement Mathématique* (Suiza). Otros presidentes fueron, por períodos en general de 4 años, con algunas interrupciones en la actividad debidas a las guerras mundiales, sucesivamente: Smith (Estados Unidos), Hadamard (Francia), Behnke (Alemania), Stone (Estados Unidos), Lichnerowicz (Francia), Freudenthal (Holanda), Lighthill (Gran Bretaña), Iyanaga (Japón), Whitney (Estados Unidos) Kahane (Francia). Siendo Presidente Châtelet en 1952 se creó la Unión Matemática Internacional y fue entonces cuando se decidió que el ICMI pasara a ser una Comisión de la Unión.

Una de las actividades más importantes del ICMI actualmente es la supervisión de los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME, International Congress on Mathematical Education), que se celebran cada 4 años. Los últimos Congresos de este tipo se han celebrado en: Adelaide (Australia, 1984), Budapest (Hungría, 1988), Quebec (Canadá, 1992). En el de Quebec asistieron unos 3.500 matemáticos de todo el mundo especialistas en la educación matemática de los diferentes niveles, que trataron de examinar los problemas que desde los diferentes puntos de vista la enseñanza matemática propone a la comunidad de matemáticos y a la sociedad. El Octavo Congreso Internacional de Educación Matemática tendrá lugar en Sevilla en julio de 1996.

El ICMI acoge en su entorno diversos grupos de estudio en algún modo afiliados a él. Se trata de grupos constituidos para el desarrollo de la investigación en torno a problemas específicos relacionados con la educación matemática. Tales son en la actualidad: The International Organization of Women and Mathematics Education (IOWME), The International Study Group for the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (ISGHPM), The International Study Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), The World Federation of Mathematical Olympiads (WFMO). A través de tales organizaciones, algunas de ellas con una muy potente vitalidad, se realiza con permanencia una buena parte de la actividad del ICMI en torno a problemas muy importantes.

Una de las actividades más importantes del ICMI actualmente es la supervisión de los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME, International Congress on Mathematical Education), que se celebran cada 4 años.

El ICMI desde su mismo comienzo a principios de siglo, ha propiciado muy intensamente la investigación en Educación Matemática. *L'Enseignement Mathématique,* incluso antes de constituirse en órgano oficial del ICMI, tuvo una gran influencia en el desarrollo de diversos campos de estudio alrededor de la investigación en educación matemática. El estudio-encuesta publicado entre 1905-1907 sobre las formas de trabajo de los matemáticos, los estudios comparativos sobre la enseñanza matemática en diversos países europeos, son buena prueba del interés en los comienzos del siglo XX por temas importantes relacionados con la educación matemática.

Desde 1969 se vienen celebrando cada cuatro años los ICME, Congresos Internacionales de Educación Matemática (1969 Lyon, 1972 Exeter, 1976 Karlsruhe, 1980 Berkeley, 1984 Adelaide, 1988 Budapest, 1992 Quebec). Tales congresos constituyen una de las piezas clave en el intercambio de información en torno a los principales problemas de la educación matemática, convirtiéndose en vitales foros de discusión, en donde se debaten los principales temas de estudio del momento con espíritu crítico y abierto.

Fiel a este espíritu, el ICMI, sobre todo a partir de la década de los ochenta, bajo la inspiración de Jean-Pierre Kahane y de Geoffrey Howson, viene supervisando también en la actualidad la organización de reuniones de estudio enfocadas hacia problemas mas específicos, como los siguientes:

- Influencia de la informática sobre la matemática y su enseñanza (Strasbourg, 1985).
- La enseñanza de la matemática en los 90 (Kuwait, 1986).
- Cognición y educación matemática (juntamente con el grupo Psychology and Mathematical Education).
- Matemática como ciencia auxiliar (Udine, Italia, 1987).
- Popularización de la matemática (Leeds, Gran Bretaña, 1989).
- Evaluación en la enseñanza matemática (Costa Brava, 1991).
- Género y Educación Matemática (Höör, Suecia, 1993).
- ¿Qué es investigación en Educación Matemática? (Washington, 1994).
- La enseñanza de la geometría hacia el siglo XXI (Catania, 1995).

Los estudios correspondientes han sido publicados por Cambridge University Press y Kluwer Academic Press. (Algunos han sido publicados en español por la Editorial Mestral, Valencia).

Por lo expuesto se puede entender la vitalidad en muchos aspectos diferentes del organismo que comenzó modestamente en 1908 para fomentar la exploración y correcta solución de los principales problemas que van surgiendo en torno a la educación matemática.

Existen diversas fuentes en INTERNET en las que actualmente se puede encontrar información actualizada relacionada con las actividades de la Unión Matemática Internacional (IMU), la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI), el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8, Julio 1996, Sevilla),...

htpp://elib.zib-berlin.de

http://icme8.us.es/ICME8.html

Asimismo, la versión electrónica del Boletín que el ICMI publica periódicamente se puede obtener sin más que pedirla directamente al Secretario General, Prof. Mogens Niss, en <mn@mmf.ruc.dk>.

Miguel de Guzmán
Presidente del ICMI

PRE-PROCEEDINGS

ASSESSMENT IN MATHEMATICS

EDUCATION AND ITS EFFECTS

ICMI STUDY 1991, 11-16 APRIL, CALONGE, SPAIN

Estudio del ICMI de 1991. Calonge (España)

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Secretario General: Luis Balbuena Castellano
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: María Antonia Canals
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Adela Salvador
Apartado de Correos 4051. 28080-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidenta: Rosa Pérez García
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Manuel Fernández Reyes
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Constantino de la Fuente Martínez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Andrés Marcos García
Facultad de Económicas. Universidad de La Coruña

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Javier Brihuega
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didáctica de la Matemática. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 22
junio 1996, pp. 9-11

Unas reflexiones sobre el ICME-8*

Claudi Alsina

ARTÍCULOS

La inminente celebración en julio de 1996 del 8.° Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8) en la ciudad de Sevilla constituye la constatación de un hecho: el movimiento innovador de educadores matemáticos que aglutina la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas ha merecido el reconocimiento y la confianza internacional para organizar este evento. Ello debe permitir afianzar y ensanchar nuestro marco de proyección nacional e internacional y debería contribuir a que en nuestras aulas se afincara un espíritu innovador y de cambio que masivamente invada todos los lugares y todos los niveles donde nuestra profesión puede influir.

En la historia de la educación matemática española de este siglo destacan con luz propia determinadas personalidades e instituciones que con su labor han contribuido a la mejora de nuestra enseñanza pero nunca como ahora habíamos gozado de un movimiento de renovación tan amplio como el que forma hoy la Federación. En particular, la Sociedad Thales con su presidente Gonzalo Sánchez Vázquez a la cabeza realizan con la organización del ICME-8 una enorme contribución.

Seguramente para los que trabajamos para el ICME-8 el evento es un honor, para la Federación y sus sociedades una consolidación y relanzamiento, para la comunidad de educadores de Matemáticas una oportunidad positiva y para el futuro del país una apuesta por una mayor atención a la educación. En relación a la labor en el Comité Internacional de Programa intentaré glosar cuáles son algunos de los temas, interrogantes y deseos que se nos plantearon en el diseño del programa para ICME-8.

En primer lugar, los ICME tienen unas tradiciones y unas características ya consolidadas en ediciones anteriores y a las que no cabe renunciar. Destaquemos una: *ICME debe ser un lugar de encuentro de educadores y educadoras de*

* Actualización del artículo publicado por el autor en *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid,* 88 (1994), 325-328.

matemáticas de todos los niveles, especialidades y paises. Asumir esto es admitir que un interés del congreso radica en la diversidad y la pluralidad de actividades, no en la especialización. Otra característica a destacar: *ICME debe ser un motor de contactos e iniciativas educativas internacionales.*

A pesar de la imposibilidad de tipificar las características de un participante en un ICME dado la diversidad de formaciones iniciales, niveles educativos de interés, especialidades personales y ámbito de actuación, hemos creído necesario poder asegurar que durante un ICME cualquier profesor o profesor de Matemáticas pueda tener las siguientes oportunidades:

- Posibilidad de presentar algún trabajo, resultado o experiencia innovadora.
- Posibilidad de ver cual es el estado de la cuestión en temas de gran interés.
- Posibilidad de discutir, con colegas de todo el mundo, cuestiones controvertidas de máxima actualidad.
- Posibilidad de adquirir una óptica internacional y plural sobre la Educación Matemática.
- Posibilidad de dialogar, conocer y enriquecerse del contacto personal con profesorado que comparte un mismo deseo y unos mismos problemas.

Dar pie a estas posibilidades a varios miles de profesores y profesoras de Matemáticas de todo el mundo exige necesariamente ofrecer un congreso equilibrado con mucha estructuración en paralelo pero donde cada cual pueda encontrar su *ruta.*

Se han organizado para el programa de ICME-8, 4 conferencias plenarias, 60 conferencias específicas, 26 grupos de trabajo simultáneos, 26 grupos temáticos paralelos, mesas redondas, informes de los tres estudios ICMI más recientes, sesiones de todos los grupos de estudio afiliados a ICMI, muestras de proyectos y materiales y un sinfín de actividades que siempre tienen vida propia durante los ICME.

Una parte privilegiada del programa debe ser la posibilidad de ofrecer forums de discusión. Para 1996 algunos interrogantes abiertos son:

- ¿Cómo podría mejorarse la comunicación en la clase, favorecer la motivación y aumentar las actitudes positivas?
- En una época de cambios curriculares en todos los niveles y en todos los países, ¿qué debe cambiarse en los currícula de matemáticas, cómo hacerlo y por qué hacerlo?
- ¿Qué currículum haríamos hoy si partiéramos de cero sin ningún condicionante curricular histórico?
- ¿Qué tratamiento debe darse a la diversidad? ¿influye el género en la formación matemática? ¿qué deberíamos ofrecer a los jóvenes con talento? ¿qué ayuda podemos dar a las personas con dificultades (de aprendizaje, físicas o psíquicas)?
- ¿Cómo cambiaremos la evaluación en todas sus dimensiones?
- ¿Cómo deberían influir las posibilidades tecnológicas en nuestra labor?
- ¿Cuál deber ser el papel del profesor y de la profesora y cuál su preparación? ¿qué ocurre con su consideración social? ¿pueden las acciones internacionales ayudar al profesorado de países con dificultades? ¿no podríamos integrar, globalizar y cooperar con otros temas?

Esperemos que puedan verse nuevas tendencias, materiales y experiencias en relación a los diferentes niveles educativos: primaria, secundaria, universidad, módulos profesionales, educación a distancia,... lo cual incide en cómo los diferentes países están llevando a cabo sus cambios curriculares.

Esperemos que puedan verse nuevas tendencias, materiales y experiencias en relación a los diferentes *niveles* educativos: primaria, secundaria, universidad, módulos profesionales, educación a distancia,... lo cual incide en cómo los diferentes países están llevando a cabo sus cambios curriculares.

El estado de cómo se están desarrollando hoy determinados temas o por dónde debería ir su presencia en el futuro inmediato es también una cuestión de interés: ¿cómo se educa en el indeterminismo y el azar? ¿qué tratamiento recibe la información estadística? ¿qué nuevas posibilidades ofrece la enseñanza del cálculo a la luz de las nuevas tecnologías? ¿qué geometría debería recuperarse en los niveles obligatorios? ¿qué incidencia tiene la matemática en el arte? qué podríamos aprovechar de la historia?

Las estrategias propias de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, que son múltiples y combinables, merecen una reflexión serena: ¿abre el constructivismo una nueva dimensión a nuestra labor? ¿es la resolución de problemas la mejor dinámica?, ¿deberíamos preocuparnos más por la modelización y matematización de la realidad? ¿qué tratamiento debe darse a las demostraciones? ¿cómo influir en la creatividad? ¿son las competiciones un dinamizador esencial? ¿el laboratorio de matemáticas es imprescindible? ¿la tecnología visual es un fiel aliado? ¿qué ventajas introducen calculadoras, ordenadores y todas las nuevas tecnologías? ¿cuáles son las características de la investigación en Educación Matemática?

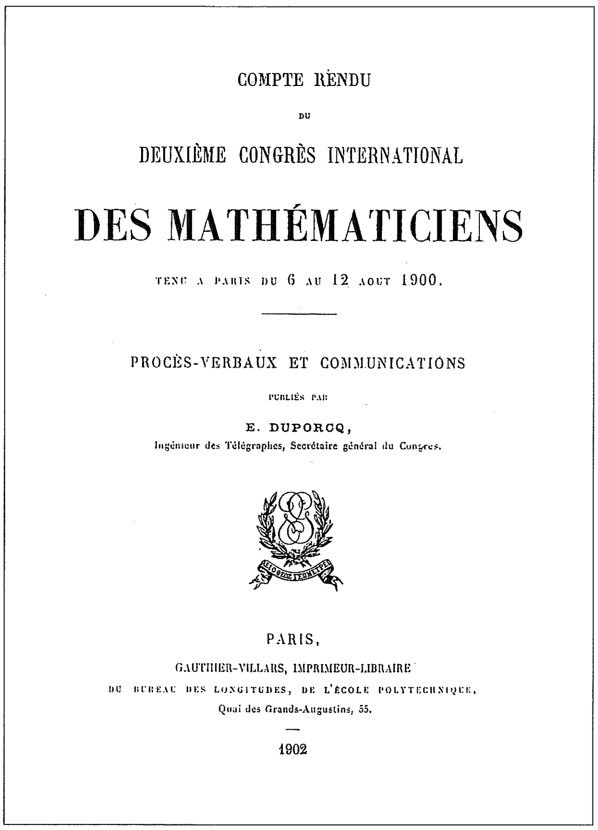
Estas y otras cuestiones de importancia han centrado en gran medida el diseño del programa de ICME-8 que esperamos sea de interés para todos los participantes

Planear el día después de un congreso excede claramente las obligaciones de los organizadores del mismo. Pero no obstante al «planear» un programa en el fondo se está pensando en este día después, en todo aquello que los participantes se llevarán en su mente, en su maleta o en su corazón. Desearíamos que se llevasen obligatoriamente cuatro cosas:

- Un conocimiento más fino de la realidad de la Educación Matemática española y del compromiso de sus colegas españoles por asegurar una mejor formación matemática de los futuros ciudadanos del país.
- Un interés renovado por innovar, mejorar y entusiasmar en su labor profesional.
- Una sensación de confianza y autoestima por aquello que se hace y la seguridad de que muchas inquietudes son compartidas.
- Una reafirmación de que en Educación Matemática no hay fórmulas magistrales ni soluciones únicas sino retos cambiantes, y que precisamente en esta inseguridad reside la dificultad y la grandeza de nuestro oficio.

Dejamos para después del congreso conclusiones y reseñas. Ahora debemos trabajar para que ICME-8 sea un éxito.

Claudi Alsina
Presidente del Comité
Internacional de Programas
del ICME-8


COMPTE RENDU

DU

DEUXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL

DES MATHÉMATICIENS

TENU A PARIS DU 6 AU 12 AOUT 1900.

PROCÈS-VERBAUX ET COMMUNICATIONS

PUBLIÉS PAR

E. DUPORCQ,

Ingénieur des Télégraphes, Secrétaire général du Congrès.

PARIS,

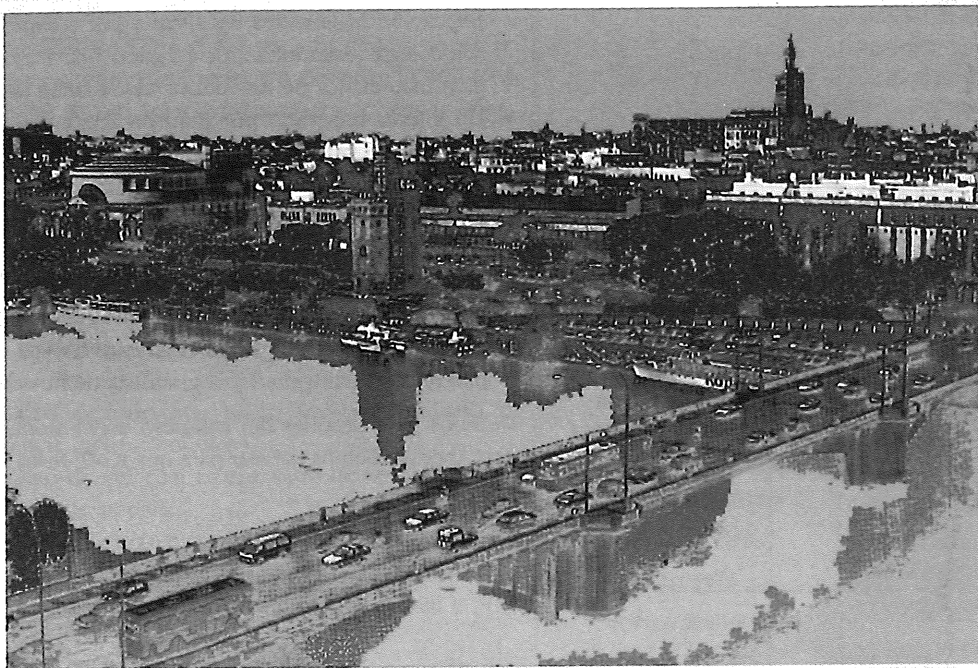
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

Segundo Congreso Internacional
de Matemáticos.
París, 1900.
Un antecedente de los ICME



ICME 8

SEVILLA 1996

8° Congreso Internacional de Educación Matemática

Sevilla, España
14 al 21 de Julio de 1996

SUMA 22
junio 1996, pp. 13-24

Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local

José-Luis Llorens Fuster

ARTÍCULOS

Se ha resuelto el problema abierto de la extensión del modelo de Van Hiele a niveles educativos superiores, fuera del ámbito de la Geometría, aportando descriptores de los niveles de razonamiento a una de las manifestaciones del concepto de aproximación local: el de recta tangente a una curva en un punto. Se ha analizado la relación existente entre el modelo de Van Hiele y la duplicidad de imágenes conceptuales de Vinner. La posibilidad de aplicar el modelo a los fundamentos del Análisis Matemático abre nuevas perspectivas en la investigación, revelándose útil para valorar la eficacia de propuestas metodológicas. La parte experimental del trabajo aporta técnicas aplicables a grupos numerosos de estudiantes.

En un momento histórico en el que los recursos tecnológicos están incidiendo de forma muy notable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ciertos aspectos de la investigación en educación matemática adquieren un interés añadido. Así, la utilización de esos recursos plantea la cuestión fundamental de su utilidad para facilitar *la comprensión* de los conceptos. Ésa fue, en parte, la motivación de nuestra memoria de doctorado, de la que a continuación presentamos un breve resumen.

El modelo de Van Hiele aporta una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de unos *niveles de pensamiento*, característicos del modelo. Precisamente, esos niveles suponen unas formas peculiares de razonar y, por tanto, no se identifican con niveles de destreza en cálculos algebraicos ni con los niveles educativos. Actualmente, nos referimos a esos niveles como nivel 0 (básico o predescriptivo), nivel I (de reconocimiento o descriptivo), nivel II (teórico informal o de análisis) y nivel III (deductivo o teórico). El propio Van Hiele (1986, p. 47) señala que niveles superiores a éstos pueden tener sólo un interés teórico y presentar dificultades severas para su discernimiento. Hay que señalar que el nivel III es el que contiene los elementos esenciales del razonamiento matemático, pues en él se lleva a cabo *la demostración*. La aplicación del modelo de Van Hiele a un tema supone, por tanto, aportar *descriptores* de los niveles, esto es, características que permitan reconocer cada uno de los niveles a partir de la actividad de los estudiantes. En el contexto del párrafo anterior, es evidente el interés que tiene la aplicación del modelo para la validación de determinadas propuestas metodológicas. Simplificando la cuestión, podríamos decir que una metodología es tanto más eficaz cuanto facilita más rápidamente o más generalmente (a más estudiantes) el progreso hacia el nivel III.

El modelo de Van Hiele se ha aplicado en numerosas ocasiones a diversos temas. Así, pueden verse descriptores (o recopilaciones de los mismos) en Fuys, Geddes y Tischler (1985), Burger y Shaughnessy (1986), Crowley (1987), Gutiérrez y Jaime (1990), entre otros. Sin embargo, las aplicaciones del modelo se han ceñido casi exclusivamente a cuestiones geométricas y a niveles educativos elementales. En todo caso, podíamos considerar como *problema abierto* la aplicación del modelo a cuestiones fundamentales del análisis matemático en niveles educativos universitarios o preuniversitarios.

Por otra parte, en la descripción de las dificultades conceptuales que surgen frecuentemente en la enseñanza secundaria y en la universitaria en relación con los fundamentos del análisis matemático, ha venido siendo muy eficaz la *terminología* introducida por Vinner relativa al *concepto-imagen* y al *concepto-definición* asociados a un concepto matemático –una formulación reciente de estos términos y de sus aplicaciones puede verse en Vinner (1991, pp. 65-81)–. La coexistencia de esa duplicidad de imágenes conceptuales asociadas a un concepto dado ocasiona frecuentemente situaciones conflictivas que se manifiestan en una escasa o nula comprensión de esos conceptos. Como se ha probado en numerosos trabajos (por ejemplo: Tall y Vinner, 1981; Cornu, 1983; Vinner, 1983; Sierpinska, 1987; etc.), esos conflictos se manifiestan de forma especialmente aguda cuando un concepto, del que el estudiante tenía una idea previa, se introduce sin definirlo explícitamente y, por tanto, sin integrar la definición formal con esas ideas previas de las que partía el estudiante. Tal es el caso del concepto de recta tangente a la gráfica de una curva en un punto, cuestión estudiada específicamente por Vinner (1982).

En nuestra memoria resolvimos las dos cuestiones fundamentales que se han esbozado en los párrafos anteriores. Por una parte, hemos aplicado el modelo de Van Hiele al concepto de recta tangente a una curva en un punto, es decir, a una de las manifestaciones del concepto de aproximación local, cuestión que aparece en los fundamentos del análisis matemático, en los primeros cursos de matemáticas en la universidad o en los últimos de secundaria. Por tanto, aportamos una descripción de cada uno de los niveles I, II y III que cumple las condiciones teóricas para ser considerada propia del modelo de Van Hiele. Para ello, diseñamos dos instrumentos prácticos que permiten la detección de los niveles así descritos: el guión de una entrevista *semiestructurada y socrática*, y las preguntas de una prueba de elección múltiple, de respuesta *semicerrada*. Como resultado de la aplicación de esta prueba a diversas muestras de estudiantes universitarios y preuniversitarios, presentamos también algunas conclusiones sobre la eficacia de propuestas metodológicas basadas en la visualización asistida por ordenador y, en concreto, en la utilización frecuente de programas de cálculo simbólico. Finalmente, el tratamiento estadístico realizado para obtener estos resultados supone una contribución a la resolución del problema genérico que se suscita en la detección de los niveles de Van Hiele en grupos numerosos de estudiantes y, sobre todo, aporta una confirmación independiente a nuestra descripción de niveles, reafirmando su existencia y la misma descripción realizada. Por otra parte, en esa descripción de los niveles de razonamiento, se caracteriza su relación con el *modelo* de Vinner en el sentido de que la existencia de una duplicidad conflictiva de imágenes conceptuales impide el progreso hacia el pensamiento matemático avanzado, es decir, hacia los niveles superiores de pensamiento.

...hemos aplicado el modelo de Van Hiele al concepto de recta tangente a una curva en un punto, es decir, a una de las manifestaciones del concepto de aproximación local, cuestión que aparece en los fundamentos del análisis matemático, en los primeros cursos de matemáticas en la universidad o en los últimos de secundaria.

El concepto de aproximación local

Existen diversas manifestaciones del concepto de aproximación local. El concepto de límite de una sucesión, el de suma de una serie, el de convergencia aplicado a una expresión decimal infinita, el concepto de límite funcional, el de derivada, el concepto de recta tangente a la gráfica de una curva en un punto, etc., son ejemplos de ellas. En todos ellos podemos distinguir algunos aspectos comunes. Por ejemplo, la necesidad de recurrir a la idea de infinito, de tal suerte que podemos decir que cada uno de esos conceptos comporta un *proceso de razonamiento infinito*. ¿Es finita –o puede serlo– la acumulación indefinida de cantidades finitas? ¿Llega a convertirse en un segmento la magnificación indefinida de un *pedazo* de la gráfica de una curva? Esa característica podemos resumirla diciendo que el concepto de aproximación local es un *concepto dinámico*. Ese dinamismo del concepto significa, entre otras cosas, que el concepto involucra la idea de infinito en un proceso de razonamiento intrínsecamente abstracto, no visualizable, en absoluto sensible.

Un estudiante puede considerar trivial obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3$ en $x = 0$ y, a la vez, «definir» recta tangente a una curva en un punto como aquella recta que *toca a la curva en un punto*, oponiendo esa definición (imagen) a la representación gráfica de $y = x^3$ en $x = 0$ y, por tanto, negando que $y = 0$ sea tangente a esa función en ese punto (Vinner, 1991, p. 78). La integración del concepto-imagen y el concepto-definición se muestra así como una *conditio sine qua non* para el progreso hacia un nivel de pensamiento superior en el que se produce una adecuada comprensión de los conceptos dinámicos como consecuencia del proceso de razonamiento inherente a la idea de aproximación. Recíprocamente, un estilo excesivamente *formalista* de la enseñanza, tiende a identificar «rigor» con formalismo entendido como manipulaciones algebraicas. El resultado es, muchas veces, el del ejemplo: estudiantes con ciertas habilidades algebraicas pero con deficiencias conceptuales importantes *en los mismos temas.* La elección del concepto de recta tangente como objeto de nuestro estudio es, en este sentido, casi indiferente. Se trata, sobre todo, de estudiar ese proceso de razonamiento inherente al concepto de aproximación, aunque sea en un contexto gráfico y, por tanto, supuestamente sencillo y conocido por los estudiantes que acceden a las carreras técnicas en la universidad.

En nuestro trabajo hemos probado que en una *primera fase* del concepto (precisamente la más intuitiva, pero que contiene los elementos esenciales del razonamiento) podemos distinguir niveles de razonamiento, acordes con el modelo de Van Hiele. Es decir, que *el proceso mental que conduce a concluir que una curva con tangente en un punto se caracteriza porque las sucesivas ampliaciones en un entorno de la gráfica de esa curva en ese punto se confunden con una recta que es, precisamente, la tangente en ese punto*, supone cierta *madurez de razonamiento* que, entre otras cosas, requiere la capacidad de comprender y aplicar el proceso de aproximación local. Es en ese proceso mental, *en esa madurez de razonamiento,* donde *es posible distinguir niveles,* en el sentido de lo establecido en el modelo.

Tanto la entrevista como el test de elección múltiple utilizados para obtener y validar esos descriptores, se plantearon con un carácter socrático...

Validación de los descriptores

Los descriptores que propusimos (que pueden verse en el apéndice 1 de la página siguiente) verifican las condiciones *teóricas* que consideramos como características del modelo de Van Hiele:

- Cada uno de los descriptores corresponde al nivel que describe y es concordante con las descripciones habituales del modelo.
- Presuponen los del nivel precedente; al mismo tiempo está expresamente caracterizada la separación, las diferencias entre los distintos niveles.
- Reflejan comportamientos que son consecuencia de una gradual adquisición de profundidad en el razonamiento y son fácilmente detectables.
- Finalmente, se ha descrito con amplitud cada uno de los niveles (no menos de tres descriptores por nivel), lo que permite una buena selección de actividades para detectarlos.

Tanto la entrevista como el test de elección múltiple utilizados para obtener y validar esos descriptores, se plantearon con un carácter *socrático*: se trata, por una parte, de que las preguntas no enmascaren el lenguaje propio de los estudiantes, imprescindible para detectar su nivel de razonamiento. Pero, por otra parte, se aprovechan las mismas respuestas de los encuestados o entrevistados para orientar el desarrollo de la prueba. Eso es particularmente cierto en el caso de la entrevista en la que, aunque existe un guión, no se excluye la intervención espontánea del entrevistador, de acuerdo con este objetivo. Esa orientación no es otra que tratar de llevar al entrevistado *hacia la verdad* o, en otros términos, procurar que la entrevista suponga una *fuerte* experiencia de aprendizaje que coopere, si fuera preciso, al progreso en el nivel de razonamiento.

La entrevista tiene un contenido esencialmente *visual*: Aunque las preguntas se formulaban verbalmente, en cada una se entregaba al entrevistado una hoja que reproducía el enunciado al tiempo que se le mostraba alguna representación gráfica sobre la que versa la pregunta. En determinados momentos se entrega información al entrevistado, coherentemente con el carácter socrático. La prueba es un *diálogo* pero que tiene su apoyo y su contenido en ese carácter visual. En ese sentido, se evita entrar en las *definiciones* de los términos que se usan: *curvas, rectas, puntos, gráfica* e, incluso, *tangente, secante,* etc. El término *zoom* se usó acompañado de sinónimos tales como *magnificar, ampliar, lente de aumento,* etc. En

Apéndice I
DESCRIPTORES DE LOS NIVELES

NIVEL I

I.1. El nivel I se caracteriza porque su imagen conceptual es muy semejante al caso de la circunferencia, es decir que para un estudiante en este nivel su idea de tangente es que la recta toca en un punto y, por tanto, es capaz de discriminar los casos evidentes (secante, exterior).

I.2. En este nivel aparece el reconocimiento de las ideas de escala y de localidad referidas al concepto. El estudiante que se mueva en este nivel será capaz de distinguir, ante una representación de una curva y de una recta, que esa recta no es tangente a la curva cuando evidentemente (visualmente) no lo sea, al menos en la parte de la representación que se le muestre. También distinguirá si la recta es secante en esos mismos casos evidentes.

I.3. Sin embargo, ante una gráfica que represente una recta que pueda ser tangente a una curva, afirmará sin demasiadas dudas que, efectivamente, ésa es la relación que tienen la recta y la curva, sin considerar la necesidad de ninguna propiedad adicional, basándose sólo en la apariencia.

I.4. Específicamente, en la cuestión del comportamiento de una curva en un entorno de un punto cuando se hace un proceso de aproximación (zoom) en dicho entorno, es capaz de reconocer que la forma, la apariencia de una curva, puede ser muy distinta según desde qué escala se la contemple.

I.5. Así, en este nivel puede reconocer que el vértice de un ángulo no cambia de aspecto aunque se haga sobre él un proceso de aproximación (zoom).

I.6. (Separación del nivel II): En este nivel es característico que el estudiante no relacione la cuestión de la aproximación con la de la tangente. Menos aún que una recta que corta a una curva pueda ser tangente (simultáneamente) a la curva (en el mismo punto).

NIVEL II

II.1. En el nivel II, el estudiante manifiesta una total seguridad para llevar a cabo esos procesos de aproximación visuales y, por tanto, para razonar sobre los cambios de forma o de apariencia que comportan dichos procesos sobre la representación gráfica de la curva. Por tanto, es capaz de distinguir aquellas curvas que, en ese proceso, localmente se aproximan a una recta, de las que no cumplen esa propiedad.

II.2. En cuanto a la tangente, la reconoce precisamente como el final de esa aproximación local. De modo que, como es característico de este nivel, relaciona el concepto de tangente con el de aproximación, y ahora ya no es suficiente que la recta parezca que es tangente, que toque a la curva en un punto, sino que debe cumplir una propiedad adicional que, realmente, la caracteriza. Así, dadas una curva y una recta con apariencia de tangentes (en un punto) formulará la necesidad de ver más de cerca la figura, de iniciar la aproximación, para dar contestación a la pregunta de si la recta es tangente o no.

II.3. (Separación del nivel III) Sin embargo, en este nivel no dará, en general, respuestas a las situaciones patológicas, es decir, a aquéllas en que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación. Por ejemplo, para los ángulos o vértices señalados antes.

II.4. Un estudiante no podrá progresar desde el nivel II al nivel III (ni al IV) mientras mantenga dualidades entre el concepto-imagen y el concepto-definición. El nivel de razonamiento que permite la comprensión de los conceptos avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre imagen y definición. La plena integración entre los conceptos intuitivos y estáticos (tangente a una circunferencia) con los dinámicos (aproximación local) caracterizaría el acceso al nivel III.

NIVELES III y IV

III.1. En el nivel III (teórico-formal) es capaz de demostrar que la tangente a una curva, suponiendo que exista, será la única recta que, precisamente, es el límite ("el final") de ese proceso de aproximación visual o de zoom.

III.2. De hecho, será capaz de definir la tangente de esa forma. Sólo aquellas curvas que tengan un comportamiento patológico en ese proceso, es decir, que no acaben siendo como una recta, carecerán de tangente.

III.3. (Separación del nivel IV) El reconocimiento de la imposibilidad de predecir, en algunos casos, la existencia de la tangente (y, por tanto, de su inclinación) expresado con términos precisos y formales, aunque con el lenguaje propio del contexto y de la definición adoptada, podría ser una manifestación de ese acercamiento al nivel IV y, en todo caso, es una manifestación de la adquisición del nivel III.

Nuestro estudio no recoge ningún descriptor específico del nivel IV, entendido éste como un nivel teórico-formal, en el que predomina la comprensión no sólo del concepto considerado sino de éste en relación con otros. La definición y el análisis del concepto de recta tangente nos permite advertir que, ciertamente, al asegurar la misma posibilidad de la extensión de modelo por la elección de esa definición, prácticamente se desechaba la posibilidad de considerar el nivel IV, justamente porque consideramos esa definición aislada de cualquier otro contexto. Podemos decir que las características que potencian la aplicación del modelo son las mismas que impiden la manifestación de ese nivel. Finalmente, recordemos que la comprensión del concepto queda garantizada con la consecución del nivel III.

el mismo sentido, todas las gráficas se presentaron *sin ejes de coordenadas*, para evitar cualquier interferencia explícita con el concepto de función. Tampoco se habla de *ecuación de la recta*, ni de *ángulo* o de *pendiente*. Menos aún se menciona la palabra *derivada* (desconocida para algunos de los estudiantes). Como decíamos, la palabra *tangente* se usa expresamente sin haberla definido en ningún momento. Ello obedece a la evidencia contrastada de que los estudiantes la conocen y, además, *creen saber lo que significa*. Precisamente, un objetivo de la prueba es determinar cuál es para ellos ese significado, es decir, en qué medida tiene algo que ver con el concepto de aproximación local que lleva consigo.

Tras la formulación definitiva del guión de la entrevista socrática y la consiguiente validación de los descriptores, abordamos la cuestión de aplicar nuestras conclusiones a grupos numerosos de alumnos. El planteamiento de la prueba escrita es, coherentemente con las características del modelo, una *transcripción* de la entrevista: hay una coincidencia casi total en las preguntas; respetamos, asimismo, las respuestas, en el sentido de que las alternativas que se ofrecen en cada pregunta son las respuestas que escuchamos más frecuentemente cuando realizamos las entrevistas, además de una alternativa de *respuesta libre*, para asegurar en lo posible la manifestación espontánea del entrevistado usando su propio lenguaje; finalmente, se mantiene el carácter socrático, entregando información al encuestado, volviendo a plantear preguntas tras esas entregas de información, etc. Es obvio que, individualmente, el mejor procedimiento de clasificación es la entrevista. Sin embargo, con propósitos globales y respetando estas condiciones, estamos en condiciones de asegurar la validez y eficacia, en el contexto del modelo de Van Hiele, de este tipo de pruebas.

Tanto en la entrevista como en el test escrito (que puede verse en el apéndice 2 –páginas siguientes–) podemos distinguir tres bloques diferenciados de preguntas. Las del primer bloque (de la 1ª a la 6ª) tienen como objetivo examinar, *sin relación con el concepto de tangente*, las cuestiones derivadas de las representaciones gráficas (nivel 0) y de los cambios de escala (nivel I). Tras la sexta pregunta, se hace una primera entrega de información, para terminar de establecer el marco de la prueba respecto a la cuestión de las aproximaciones visuales, tanto en lo que se refiere a la posibilidad de conocer lo que piensa inicialmente el estudiante sobre ellas como para sugerirle, para el caso más extremo, que el efecto de los *zoom* con relación a la apariencia de la curva puede ser *importante* (caracterizábamos el nivel I por la capacidad manifestada para reconocer esos cambios, de acuerdo con la perspectiva o la escala). En el segundo bloque (desde la 7ª a la 15ª) se trata de detectar, en primer lugar, el concepto-imagen con respecto a la tangente a una curva; después, usando el *socratismo*, se tratará de incidir en la oposición secante-tangente, derivada seguramente de la situación aplicable a la circunferencia. Por último, se relacionan las aproximaciones sucesivas con la misma existencia de la tangente. Para ello, se entrega nuevamente información en la que, sutilmente, se puede comprobar que las aproximaciones sucesivas permiten discriminar no sólo si una recta es o no tangente a la curva sino que *la existencia de la tangente la determina el comportamiento de la curva como consecuencia de esas aproximaciones*. Finalmente, el último bloque da oportunidades específicas para manifestarse en el nivel III. En la prueba escrita, además de las preguntas relacionadas con las *patologías* o con la posible limitación del método que también aparecen en la entrevista, se añaden cuestiones directamente relacionadas con los descriptores del nivel III: una *definición* del método; una *demostración* de la unicidad de la tangente, cuando ésta existe, basada en la definición que se está usando implícitamente; una explicación del aspecto de la definición referido a la apariencia de coincidencia entre la curva y su tangente, etc.

...la palabra tangente se usa expresamente sin haberla definido en ningún momento. Ello obedece a la evidencia contrastada de que los estudiantes la conocen y, además, creen saber lo que significa.

Resultados experimentales. Tratamiento estadístico

Ya hemos indicado que la obtención y validación de los descriptores se logró, inicialmente, a través de las entrevistas. Para la prueba escrita nos propusimos los siguientes objetivos:

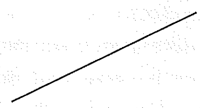
- La confirmación de los descriptores obtenidos a través de la entrevista.
- La validación de la propia prueba escrita, como instrumento coherente con nuestra descripción de los niveles, aplicable a grupos numerosos de estudiantes.
- La valoración de la eficacia de propuestas metodológicas basadas en la visualización por el uso habitual de programas de cálculo simbólico.

Apéndice 2
PRUEBA ESCRITA

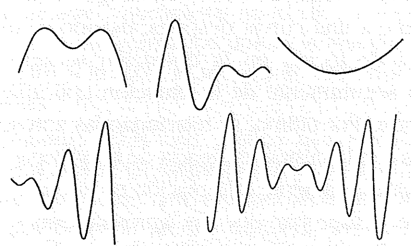
El original se presentaba con un tamaño diferente y en hojas separadas, con la indicación expresa de *no pasar la página* hasta haber completado la respuesta y otras recomendaciones semejantes que aquí se omiten.

1. La ilustración adjunta decimos que corresponde a una **recta**. En realidad es, más bien, la representación de:

a) Un segmento.
b) Un trozo de recta.
c) Una función.
d) Un polinomio de primer grado.
e) Ninguna de las anteriores: ...



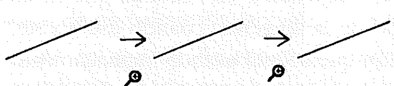
* * * * *



2. ¿Crees que las ilustraciones anteriores pueden corresponder a distintas perspectivas (*zooms*, «trozos» diferentes, etc.) de la misma curva?

a) No, porque tienen el mismo grosor.
b) Sí, es posible.
c) No.
d) Es posible, pero es muy dudoso.
e) Ninguna de las anteriores: ...

* * * * *

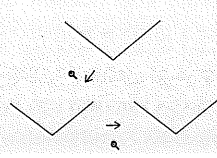


3. ¿Crees que las ilustraciones anteriores pueden representar *zooms* sucesivos aplicados a la misma recta? (Es decir, la pregunta es si lo que veremos al ampliar una recta tiene siempre el mismo aspecto).

a) No, porque todo el rato se ve el mismo trozo.
b) Sí, porque todo el rato se ve el mismo trozo.
c) Sí, porque el aspecto de una recta no cambia aunque se cambie el zoom.
d) No, porque la recta se vería más «gorda», más «gruesa».
e) Ninguna de las anteriores: ...

* * * * *

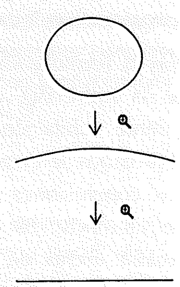
4. La misma pregunta para el «ángulo» de una curva como la que muestran las ilustraciones siguientes:



a) No, porque el ángulo se iría abriendo a medida que ampliamos.
b) No, porque todo el rato se ve del mismo grosor.
c) Sí, porque el aspecto de un ángulo no cambia aunque se cambie el zoom.
d) Sí, aunque tendría que verse un poco más abierto cada vez.
e) Ninguna de las anteriores: ...

* * * * *

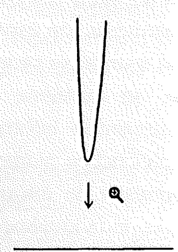
5. ¿Crees que es posible que las tres ilustraciones correspondan a la misma gráfica, a la que se aplican distintos «zooms»? (Es decir, contemplando una parte de la primera cada vez más de cerca):



a) Depende de la parte que se ampliase.
b) No, porque al final es recta y nunca llegaría a ser una recta.
c) Sí, es posible que se vea de esa forma.
d) No.
e) Ninguna de las anteriores: ...

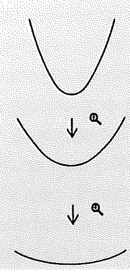
* * * * *

6. Repetimos la pregunta para la ilustración siguiente. Es decir, lo que se amplia, lo que se contempla más de cerca, es la zona de la curva que corresponde al *vértice*, al punto más bajo. La pregunta -insistimos- es si crees que si vamos ampliando llegará un momento que el aspecto puede ser el que muestra la segunda ilustración:



a) No, porque habría que ampliar muchísimo y es excesivo, nunca se acabará viendo recto.
b) Sí.
c) No, porque el vértice siempre se verá curvo.
d) No.
e) Ninguna de las anteriores: ...

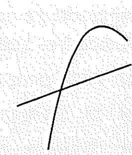
* * * * *



En la pregunta anterior, la respuesta correcta era que **sí** que es posible acabar viendo de esa forma la zona del vértice. En realidad, si hiciésemos ampliaciones sucesivas veríamos lo que se percibe en las ilustraciones adjuntas, en las que, efectivamente, podemos comprobar como la curva aparece poco a poco menos *puntiaguda*, se va haciendo plana.

7. ¿Qué relación tienen la recta y la curva?

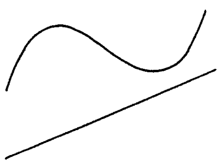
a) *Se cruzan.*
b) *Son secantes.*
c) *Se tocan en un punto.*
d) *Son tangentes.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*



* * * * *

8. ¿Qué afirmación te parece más correcta, más precisa?

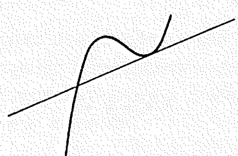
a) *La recta no corta a la curva.*
b) *Es posible que la recta corte a la curva, pero en la zona que muestra la ilustración la recta no tiene puntos comunes con la curva.*
c) *La recta no toca a la curva.*
d) *La recta y la curva no pueden tener ninguna relación entre ellas.*
e) *Ninguna de las anteriores: ..*



* * * * *

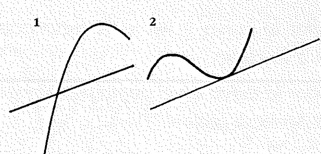
9. ¿Crees que la recta es tangente a la curva? ¿Por qué?

a) *No, porque la recta corta a la curva.*
b) *No, porque la recta tiene dos puntos comunes con la curva.*
c) *En una parte, seguro que no. En la otra, puede que sea tangente.*
d) *No se puede saber.*
e) *Ninguna de las anteriores:...*



* * * * *

10. En la zona que muestran cada una de las ilustraciones (que corresponden a distintas zonas de la **misma** ilustración anterior), ¿crees que la recta **puede ser** tangente a la curva?

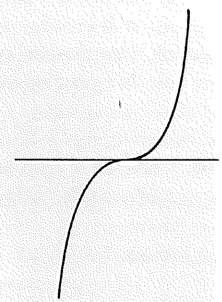


a) *La primera no es tangente y la segunda sí que es.*
b) *La primera no es tangente y la segunda puede que no lo sea o puede que sí.*
c) *Las dos son tangentes.*
d) *Ninguna es tangente.*
e) *Ninguna de las anteriores:...*

* * * * *

11. La recta de la figura corta a la curva en un solo punto. ¿Crees que esa recta es tangente a la curva (en ese mismo punto)?

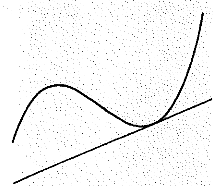
a) *No, porque la recta corta a la curva, la «atraviesa».*
b) *No, porque la recta toca a la curva en muchos puntos.*
c) *No, porque la recta corta a la curva y, además, la toca en muchos puntos.*
d) *Sí, parece que sí que es tangente.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*



* * * * *

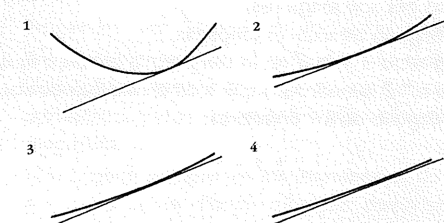
12. ¿Crees que, **en la zona** que muestra la ilustración, la recta **es** tangente a la curva en un punto?

a) Teniendo en cuenta sólo lo que se ve en la figura, no podemos estar seguros de que la recta sea tangente a la curva.
b) No, porque más bien parece que la toca en muchos puntos.
c) Sí, es tangente.
d) No, la recta es secante.
e) Ninguna de las anteriores: ...



* * * * *

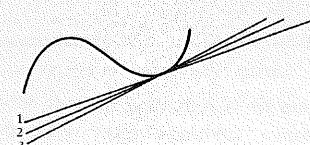
Sin embargo, la misma ilustración anterior, ampliada sucesivas veces en esa zona, tiene el aspecto siguiente:



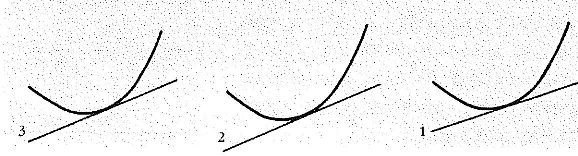
Como puedes observar, la recta **ni siquiera toca** a la curva en la zona donde se preguntaba.

* * * * *

13. En las figuras siguientes aparece una curva y, tres rectas (distintas, evidentemente) que pasan **por un mismo punto de esa curva** (insistimos en que las tres pasan por el mismo punto de la curva):



Ahora te las mostramos por separado, con una pequeña ampliación

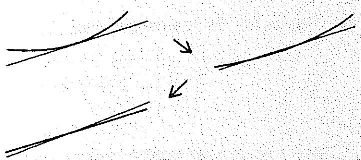


a) *Es posible que las tres rectas sean tangentes a la curva en el punto en cuestión.*
b) *Las tres son tangentes, porque tocan en un punto.*
c) *Es posible que ninguna de las tres rectas sea tangente a la curva.*
d) *Una de ellas es tangente y las otras dos no lo son.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

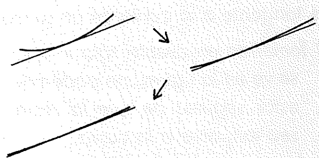
* * * * *

14. Como en el caso anterior, te mostramos ahora ampliaciones sucesivas de cada una de las rectas (por separado) y de la curva.

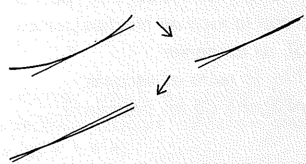
Recta 1:



Recta 2:



Recta 3:



¿Cambia tu respuesta anterior, de alguna forma?

a) *La recta 1 y la 3 no son tangentes. La 2 parece que sí.*
b) *Las tres son tangentes.*
c) *Ninguna de ellas es tangente.*
d) *La recta 1 y la 3 no lo son porque cortan a la curva, y la n.° 2 tampoco porque toca en muchos puntos.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

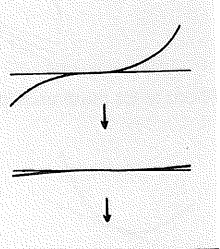
* * * * *

15. ¿Crees que una recta que corta a una curva en un punto puede ser tangente a la curva **en ese mismo punto**?

a) *No, porque si una recta toca a la curva no la corta.*
b) *Sí.*
c) *No, porque una recta no puede ser secante y tangente a la vez.*
d) *Sí, porque todas las rectas tangentes también son secantes.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

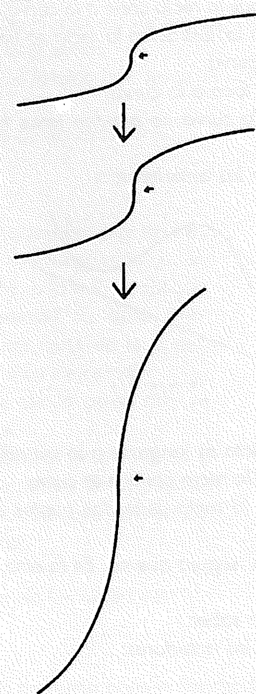
* * * * *

Independientemente de tu respuesta a la pregunta anterior, conviene que observes las ilustraciones siguientes, que son ampliaciones sucesivas de la figura de la pregunta 11. Allí se mostraba una recta que *cortaba* a la curva en un solo punto. Además, esa recta es tangente a la curva en el punto, como se puede observar...



16. ¿Eres capaz de predecir como será la tangente en el punto señalado de la curva, de la que, a continuación, te mostramos tres *zooms*?

a) *No, porque no habría tangente.*
b) *Sí. Sería una recta vertical.*
c) *Sí, sería una recta horizontal.*
d) *Sí: Cualquier recta que pasase por ese punto.*
e) *Ninguna de las anteriores:...*



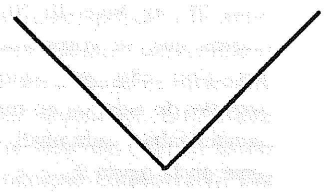
* * * * *

17. Supongamos que disponemos de un instrumento que nos permite ampliar, hacer *zooms* sucesivos, de cualquier curva. Entonces, un método para poder trazar la tangente de una curva en un punto, podría ser -en resumen- el siguiente:

a) *Ampliar la curva y ver si la recta acaba superponiéndose a la curva.*
b) *Ampliar la curva en el punto y prolongarla cuando aparente hacerse recta.*
c) *Ampliar la curva y la recta hasta que se toquen en el punto.*
d) *Trazar una recta que pase por el punto y ampliarla.*
e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

18. Aplicando el método anterior (que podemos llamar, método del *zoom*), respecto de la «curva» de la pregunta 4 y su tangente en el punto más bajo (en el *ángulo*):



a) *No es aplicable el método del zoom, porque no es una curva.*

b) *El método demuestra que esa curva no tiene tangente en ese punto porque siempre se ve un ángulo, por mucho que amplíes.*

c) *Como siempre se ve un ángulo, cualquier recta que sólo toque en el ángulo es tangente en ese punto.*

d) *Como al ampliar el ángulo desaparece, la tangente será horizontal*

e) *Ninguna de las anteriores:...*

* * * * *

19. Supongamos que queremos aplicar el método anterior para trazar la tangente a la curva de la ilustración siguiente, en el punto señalado. Entonces:

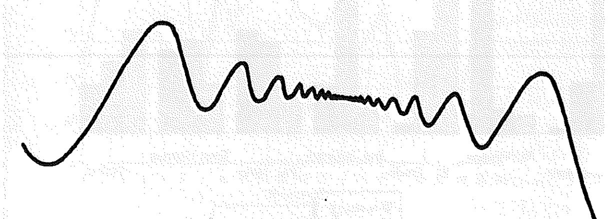
a) *Como antes, iríamos ampliando sucesivamente. Al final obtendríamos una recta, que será aproximadamente horizontal.*

b) *No es seguro que el método sea aplicable: Es posible que, al ampliar, comprobemos que siempre van saliendo más y más oscilaciones. Entonces, no sabríamos si hay o no hay tangente.*

c) *No se puede aplicar el método porque siempre van a salir más y más oscilaciones.*

d) *No puede haber tangente en ese punto porque siempre cortaría a la curva (salvo que fuese vertical, que no puede ser).*

e) *Ninguna de las anteriores: ...*



* * * * *

20. En esta pregunta pretendemos -para terminar- que demuestres, **si crees que es cierto**, que una curva sólo puede tener una tangente en un punto. O que demuestres lo contrario, si crees que lo cierto es lo contrario.

a) *Cuando se amplía una curva, pueden ocurrir sólo dos cosas: Que acabe viéndose siempre lo mismo (un ángulo) o que acabe viéndose una recta, que será la tangente. Pero no puede ser que la curva se convierta en dos o más rectas, de modo que si la tangente existe, es única.*

b) *Según la forma que tenga la curva, es posible que no haya tangente, que haya sólo una o que haya infinitas, ya que por un punto pasan infinitas rectas y, por tanto, la tangente puede ser única o puede no serlo.*

c) *De todas las rectas que pasan por un punto de una curva, que son infinitas porque por un punto pasan infinitas rectas, sólo una la toca porque las demás la cortarán. Por tanto, la tangente es única.*

d) *Como la tangente a una curva se halla haciendo la derivada de la función en el punto, si la función es derivable tendrá un resultado único. Por tanto, la tangente es única.*

e) *Ninguna de las anteriores:*

* * * * *

21. Como habrás podido observar a lo largo de la prueba, cuando se dibujan una curva y su tangente, parece que tienen más de un punto en común, que coinciden no sólo en un punto sino en un *segmento*, en un *trozo* de la curva cercano al punto de contacto. ¿Crees que siempre sucede esto?

a) *En general, no: Depende de la calidad del dibujo.*

b) *Sí, precisamente por la definición de tangente, ésta debe aproximarse a la curva de manera que siempre aparentará que se superpone a ella cerca del punto de tangencia.*

c) *No. Sucede eso porque los instrumentos de dibujo no son capaces de dibujar algo tan pequeño como un punto.*

d) *Sí, salvo que la curva sea lo suficientemente pronunciada («curva») como para que se pueda distinguir bien el punto.*

e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

22. Te planteamos ahora una cuestión más bien teórica: La tangente a una **recta** en uno de sus puntos. Entonces:

a) *No tiene sentido porque coincidirá con la propia recta y la tocará en muchos puntos.*

b) *Sería cualquier recta que pasase por el punto.*

c) *Coincidirá con la propia recta.*

d) *No tiene sentido porque una recta no es una curva.*

e) *Ninguna de las anteriores: ...*

* * * * *

- La «valoración» en este contexto del sistema de enseñanza tradicional en lo referido a su eficacia en el progreso en el nivel de razonamiento.

Para ello, se eligieron grupos de estudiantes, tal como aparecen en la figura 1:

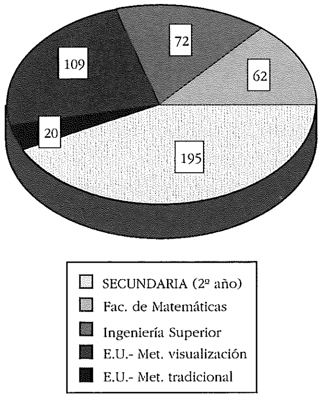


Figura 1.
Distribución de grupos en la muestra

Como podemos observar, la muestra total se distribuye en dos grandes grupos: 195 estudiantes de 2.° curso de secundaria (año en el que se introduce el concepto de aproximación local, derivadas, límites, etc.) y 263 estudiantes universitarios, distribuidos a su vez del siguiente modo: un grupo de 62 estudiantes de ingeniería técnica inmersos en un proyecto de innovación consistente en la utilización habitual de programas de cálculo simbólico (más detalles de ese proyecto pueden verse en Llorens (1993, pp. 61-80); un grupo de 72 estudiantes del mismo centro y nivel que el anterior, con metodología tradicional; dos grupos más, también con metodología tradicional (de ingeniería superior y de la facultad de Matemáticas), pero de nivel educativo superior a los anteriores.

Para el tratamiento estadístico elegido, se identificó cada entrevista con un vector de 22 componentes, cada una de las cuales es «1» o «0»: se codificó con «1» la coincidencia de la respuesta con un *patrón ideal*, coherente con el nivel III, y con un «0» en cualquier otro caso. A continuación se aplicó el algoritmo de clasificación *k-means* (cuyos detalles pueden verse en S-Plus Reference, p. 81 y ss.) caracterizando *previamente* los *cluster* (niveles) de acuerdo con el criterio que aparece en la tabla 1:

Criterio I	Bloque 3.°	Bloque 2.°	Bloque 1.°
Nivel III	≥ 4	≥ 5	≥ 3
Nivel II	< 4	≥ 5	≥ 3
Nivel I	< 2	< 4	≤ 3

Tabla 1

que refleja el número de aciertos (mínimo o máximo) por bloque de preguntas y nivel. Inicialmente, los casos que corresponden a cada nivel, resultaron: Nivel III: 46; Nivel II: 70; Nivel I: 61, valores que se consideran satisfactorios. Con ello, se obtuvieron unos *patrones* de aciertos en respuestas que caracterizaban cada nivel, como puede verse en la figura 2.

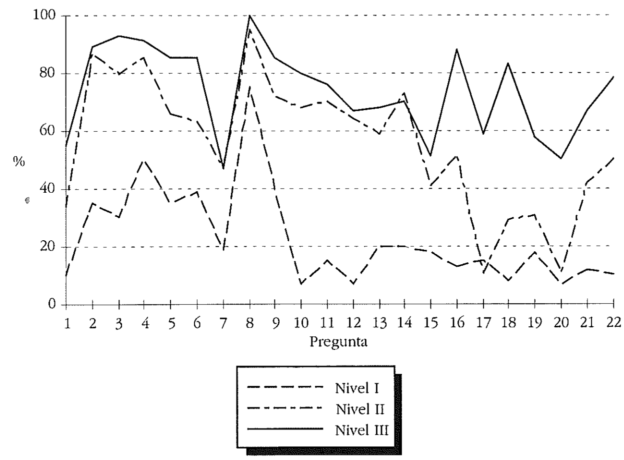


Figura 2. Centros iniciales
(% de aciertos por pregunta)

Tras la clasificación del total de vectores (es decir, de cada uno de ellos) se obtuvo la distribución por niveles de cada una de las muestras, tal como aparece en la figura 3.

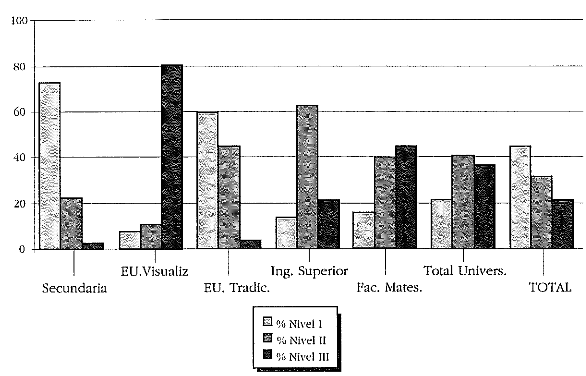


Figura 3. Porcentajes de niveles
en las muestras

Del análisis de esos resultados, se deducen casi inmediatamente las *conclusiones* siguientes:

- El mayor porcentaje de estudiantes en nivel III corresponde a la muestra de estudiantes universitarios implicados en técnicas de enseñanza asistida por ordenador. Esto confirma nuestra tesis de que, al menos para el concepto considerado, esas técnicas pueden facilitar significativamente el progreso hacia niveles superiores de compresión de los conceptos, de pensamiento matemático.
- Aunque existen diferencias entre los alumnos de secundaria y los universitarios, estas diferencias son irrelevantes si se consideran los universitarios de nivel educativo inferior. En todo caso, el porcentaje de estudiantes en nivel III que corresponde a las muestras de metodología tradicional es muy pequeño. En el contexto del modelo de Vinner, podemos interpretar este dato como la relativa incapacidad de esta metodología para facilitar la adecuada integración entre los conceptos imagen y definición, por lo que, de acuerdo con nuestros descriptores de nivel III, no se progresa hacia los niveles superiores.

Por otra parte, si comparamos los centros iniciales (figura 2) con los definitivos (figura 4), observamos inmediatamente diferencias muy significativas en la evolución de las medias de coincidencias en las preguntas del segundo bloque en los niveles II y III.

Aunque existen diferencias entre los alumnos de secundaria y los universitarios, estas diferencias son irrelevantes si se consideran los universitarios de nivel educativo inferior.

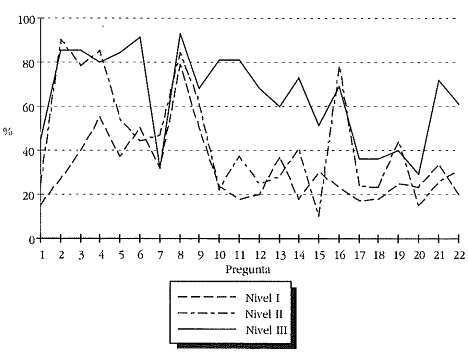


Figura 4. Centros definitivos (% de aciertos por pregunta)

Recordemos que el criterio de preclasificación mostrado en la tabla 1 no incluía esas diferencias (en ambos casos exigíamos no menos de 5 aciertos en ese bloque). Tras la clasificación definitiva, esas diferencias han aparecido, lo que representa una confirmación de la distinción entre el nivel II y el nivel III *independiente del criterio establecido previamente.* Además, *esas diferencias suponen también una confirmación explícita del descriptor en el que establecemos la relación entre el modelo de Vinner y el de Van Hiele,* puesto que las preguntas de ese bloque son las que tienen que ver directamente con la duplicidad de imágenes conceptuales.

Observaciones análogas pueden hacerse respecto de los niveles I y II con relación al último bloque de preguntas. Se comprueba que, en efecto, ese bloque discrimina los niveles II y III, pero no el nivel I y el nivel II. Al contrario, las preguntas del primer bloque (en particular, las 2ª, 3ª y 4ª) parece claro que tienen ese efecto separador entre los dos primeros niveles.

Estabilidad del análisis

Estas conclusiones vienen avaladas por la estabilidad del análisis estadístico. En efecto, si se realiza nuevamente el proceso de clasificación de acuerdo con este algoritmo pero partiendo de un criterio diferente (aunque, en todo caso, coherente con nuestro análisis previo de los descriptores establecidos) hay que esperar obtener una clasificación semejante. Así ocurre, por ejemplo cuando se parte del criterio que aparece en la tabla 2 (entre paréntesis figuran los valores del criterio anterior):

Criterio II	Bloque 3.°	Bloque 2.°	Bloque 1.°
Nivel III	≥ 5 (4)	≥ 5	≥ 4 (3)
Nivel II	< 5 (4)	≥ 5	≥ 4 (3)
Nivel I	< 4 (2)	< 4	≤ 3

Tabla 2

pues se obtiene, caso por caso, la misma asignación final a cada uno de los tres niveles. *Esa estabilidad confirma, en definitiva, la propia existencia de los niveles y la eficacia de los descriptores y de la misma prueba,* puesto que la existencia de *tres patrones de respuestas* bien diferenciados es clara.

El estudio de la estabilidad del análisis se completó con un análisis *discriminante,* en el que, estimando el estadístico de *Wilks* y dos funciones discriminantes lineales, de la forma

$$D = B_0 + B_1X_1 + \dots + B_pX_p$$

(en las que X_i (i=1,...,p) representa el valor de cada variable –en nuestro caso X_i=1 o X_i=0, con la codificación que mantenemos– y B_j (j=0, 1 ,..., p) son los coeficientes que se determinan de forma que difieran *lo más posible* entre los grupos), se obtienen sendas puntuaciones para cada vector y, como consecuencia, una nueva asignación individual a cada grupo. En nuestro caso, se obtuvo un valor de de 0,1128 para la primera función discriminante, y una coincidencia en la asignación a cada grupo en el 97,2% de los casos. Es decir, sólo existió discrepancia con el grupo asignado anteriormente en un total de 13 casos, en los cuales el segundo grupo más probable es el grupo asignado previamente.

Conclusiones

Bajo ciertas condiciones es posible extender el modelo de Van Hiele a *conceptos dinámicos*, es decir, a ciertos conceptos matemáticos cuya complejidad los sitúa curricularmente en los niveles educativos más altos, en los que el *razonamiento* tiene un papel preponderante o exclusivo, frente a las destrezas en cálculos. Esas destrezas algebraicas se corresponden con una *segunda fase* en el desarrollo de esos conceptos y, por sí solas, no garantizan su comprensión. Al contrario, el énfasis en esas cuestiones, propio de una metodología *formalista* (o puramente formal) provoca una duplicidad conflictiva entre el concepto-imagen y el concepto-definición que, en todo caso, impide el progreso a los niveles superiores de razonamiento y, en definitiva, la comprensión misma del concepto.

Ciertamente, la entrevista es el medio idóneo para la determinación del nivel de razonamiento individual y, antes, para la investigación que culmina en la formulación y validación de los descriptores de los niveles. Sin embargo, es posible diseñar pruebas de respuesta múltiple, apropiadas para grupos numerosos de estudiantes cuyos resultados son susceptibles de ser tratados estadísticamente. Ese tratamiento no sólo confirma la descripción de los niveles y la validez de la propia prueba, sino que demuestra la misma existencia de los niveles. Además, al administrarse en grupos diferentes, permite la comparación entre las distribuciones de niveles respectivas lo que, para un mismo concepto, permite establecer conclusiones sobre la eficacia de las distintas metodologías empleadas en cada grupo.

En este sentido, y para conceptos dinámicos como el de *aproximación local* que, en sí mismos, no son visualizables, ciertas técnicas basadas en la utilización frecuente –en todas las fases del proceso de enseñanza y aprendizaje– de programas de cálculo simbólico, facilitan la integración de las imágenes conceptuales y, en todo caso, provocan con mayor frecuencia el progreso hacia el nivel III de Van Hiele.

Bajo ciertas condiciones es posible extender el modelo de Van Hiele a conceptos dinámicos, es decir, a ciertos conceptos matemáticos cuya complejidad los sitúa curricularmente en los niveles educativos más altos, en los que el razonamiento tiene un papel preponderante o exclusivo, frente a las destrezas en cálculos.

José Luis Llorens
Departamento
de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica
de Valencia

Referencias bibliográficas

BURGER, W. F. y J. M. SHAUGHNESSY (1986): «Characterizing the van Hiele levels of development in geometry», *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, 31-48.

CORNU, B. (1983): *Apprentisage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat, Univ. de Grenoble.

CROWLEY, M. L. (1987): «The van Hiele model of the development of geometric thought», en NCTM, *Learning and teaching Geometry, K-12 (Yearbook)*, 1-16.

FUYS, D., D. GEDDES y R. TISCHLER (1985): *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (final report)*, Brooklyn College, City Univ. of N. York.

GUTIÉRREZ, A. y A. JAIME (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele», en LINARES y SÁNCHEZ (ed.), *Teoría y práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevilla.

HOFFER, A. R. (1983): «Van Hiele-Based Research», en *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Richard Lesh y Marsha Landau, Academic Press.

LLORENS, J. L. (1993): «Un curso de Matemáticas con DERIVE», *Epsilon*, v. 26.

S-PLUS REFERENCE MANUAL (1991): *v. 3.0. Statistical Sciencies.*

SIERPINSKA, A. (1987): «Humanities students and Epistemological Obstacles Related to Limits», *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-387.

TALL, D. O. y S. VINNER (1981): «Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limitis and continuity», *Educational Studies in Mathematics*, vol 12, n.° 2, 151-169.

VAN HIELE, P. M. (1986): *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

VINNER, S. (1982): «Conflicts between definitions and intuitions: The case of the tangent», *Proc. of PME 6, Antwerp*, 24-28.

VINNER, S. (1983): «Concept definition, concept image and the notion of function», *Int. J. Math. Educ. Scl. technol.*, vol. 14, n.° 3, 293-305.

VINNER, S. (1991): «The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics», *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Ac. Pub, 65-81.

SUMA 22
junio 1996, pp. 25-31

El problema de Isis: interés educativo de sus variadas soluciones. Algunas generalizaciones

Alberto Martínez Delgado

ARTÍCULOS

Este trabajo resume algunas de las formas de resolución publicadas del problema de Isis, ofrece una variante en el método de resolución –basado en dar prioridad sobre cualquier representación concreta a la idea de acotación–, resuelve generalizaciones planas y tridimensional del problema, formula una acotación del conjunto de variables para la generalización d-dimensional y recoge algunas notas de carácter didáctico y epistemológico.

Interés educativo del *problema de Isis*

El problema, atribuido a la diosa egipcia Isis, pide la determinación de las dimensiones, números naturales, de un rectángulo cuya área sea igual a su perímetro. La simplicidad de su enunciado, las connotaciones histórico-culturales que evoca y la diversidad de formas de resolución, con conocimientos matemáticos que pueden considerarse, en general, de un nivel de bachillerato, confiere a este problema una especial importancia en la práctica educativa y en la reflexión teórica sobre la actividad matemática.

Este problema, de importancia mágico-religiosa, fue resuelto por los antiguos egipcios, aunque no sabemos cómo. Davis (1985, p. 89) ha señalado al respecto: «no tengo ni idea de cómo los egipcios probaron el teorema de que [...] son los *únicos* enteros positivos que representan el perímetro de un rectángulo y también el área del mismo rectángulo».

Como sucede con gran parte de los problemas de matemáticas, el problema de Isis permite tanto una aproximación empírica basada en un tanteo rudimentario como planteamientos teóricos resolubles por métodos distintos. El cálculo empírico, por tanteo, ofrece frutos rápidos que conducen de forma casi automática a formular preguntas de envergadura estrictamente matemática: ¿cómo hallar de forma sistemática *todas* las soluciones posibles? ¿el estancamiento en el cálculo empírico de soluciones, significa que no existen más posibilidades?

Las soluciones que presentamos, la mayoría de ellas ya publicadas, nos permitirán apreciar la riqueza de enfoques y la reflexión sobre aspectos cognitivos que el problema suscita, tema sobre el que volveremos más adelante. La utilización de estrategias y representaciones distintas, aunque algunas emparentadas entre sí, ofrecen en algunos casos una bella simplicidad. El método empleado por Greer (1993, pp. 175-176) añade el aliciente de su proximidad a lo que pudo haber sido la forma de resolver el problema en el antiguo Egipto (Davis, 1993, p. 6).

Quienes lo deseen pueden detener la lectura en este punto para intentar resolver independientemente este problema, durante unos minutos, unas horas o unos meses; puede ser interesante también seguir las soluciones aquí recogidas e intentar posteriormente otros métodos de resolución.

Distintas resoluciones publicadas del problema de Isis

El tanteo conduce, sin necesidad apenas de conocimientos matemáticos, a la determinación de las soluciones (lados 4 y 4, con perímetro y área 16, o lados 3 y 6, con perímetro y área 18). Una segunda fase del problema surge inmediatamente, espoleada por la curiosidad de saber si podemos encontrar otras soluciones, dada la infinitud del conjunto de los números naturales. Esta segunda fase puede formularse como un teorema que sostiene la no existencia de otras soluciones.

El tanteo conduce, sin necesidad apenas de conocimientos matemáticos, a la determinación de las soluciones (lados 4 y 4, con perímetro y área 16, o lados 3 y 6, con perímetro y área 18).

El enunciado general del problema de Isis, se traduce al lenguaje algebraico en los siguientes términos:

$$x \cdot y = 2x + 2y \text{ , donde } x, y \in \mathbb{N}.$$

A continuación recogemos, esquemáticamente, algunas formas de resolución, publicadas en *The Journal of Mathematical Behavior*, a partir de que Davis (1985) llamara la atención sobre el problema de Isis:

1. *Solución de M. Klamkin* (1986):

Partiendo del planteamiento general del problema, $xy = 2x + 2y$, se consigue la descomposición factorial: $(x-2)(y-2) = 4$, que nos proporciona inmediatamente las soluciones 3, 6; 4, 4.

2. *Solución de M. Walter* (1986):

Partiendo también del planteamiento general, $xy = 2x + 2y$, despejamos una de las incógnitas, x: $xy - 2x = 2y$, $x(y-2) = 2y$, $x = 2y/(y-2)$; dividiendo: $x = 2 + 4/(y-2)$; los valores de y pueden ser 3 o 4, dando valores para y, 6 o 4. Los lados solución son por tanto 3, 6 y 4, 4.

3. *Solución de L. Imree* (1987):

$xy = 2x + 2y$; dividiendo los dos miembros entre xy ($\neq 0$):

$$1 = \frac{2}{y} + \frac{2}{x}$$

como x e y «son intercambiables», x e y no pueden ser simultáneamente mayores que 4 ... soluciones 3, 6; 4, 4.

4. *Solución de R. Pandharipande* (1985):

$xy = 2x + 2y$; como en el método de M. Walter: $x = 2y/(y-2)$. Fácilmente se obtienen los valores 3, 6 y 4, 4.

Consideremos ahora $y > 6$:

$$\frac{2y}{y-2} > \frac{2y-4}{y-2} = 2$$

por otra parte:

$$\frac{2y}{y-2} < 3$$

Si hallamos la derivada de $2y/(y-2)$ tenemos:

$$\left[\frac{2y}{y-2}\right]' = -\frac{4}{(y-2)^2} < 0, \forall y (y > 6)$$

Como la expresión obtenida al despejar x, está comprendida entre 2 y 3, y como la pendiente es negativa, resulta que x no puede tomar ningún valor entero. Por tanto sólo se pueden presentar soluciones en que $2 < y \leq 6$, que se determinan fácilmente.

5. *Solución de B. Greer* (1993):

Partiendo de la descomposición factorial realizada por M. Klamkin, $(x-2)(y-2) = 4$, en la figura 1 se «ve» que, en general, el número de cuadrados en el «perímetro grueso» es P–4 ... el área del rectángulo «interior» (prescindiendo del «perímetro grueso») es $(x-2)(y-2)$ ...

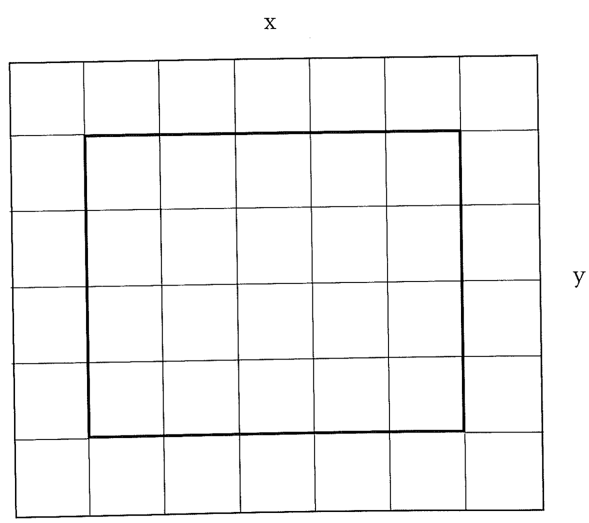


Figura 1. Solución de B. Greer. Área y «perímetro grueso»

Cuando el área del «interior valga 4» (que sólo se puede obtener por las dos descomposiciones factoriales 1·4 y 2·2), tendremos la solución del problema (lados de valores 3 y 6, o 4 y 4).

Esta forma de abordar el problema de Isis, a base de considerar «baldosas» del perímetro y «baldosas» del área puede llevarse a cabo a través de una contabilización «inteligente y sistemática» (Davis, 1993, p. 4) de «baldosas», estudiando cómo cada una de ellas contribuye al área o al perímetro según su posición en el rectángulo considerado. La sistematización, que puede hacerse de forma narrada, admite también una representación esquemática como división del rectángulo en celdillas, indicando en cada una de ellas el área y el perímetro que correspondería al rectángulo si la celdilla en cuestión fuera el vértice «inferior derecho» del rectángulo; de esta forma se observarían las regularidades, progresiones aritméticas para áreas y para perímetros, las soluciones y la imposibilidad de otras soluciones *aumentando el tamaño del rectángulo.*

6. *Solución de M. O'Nan (Davis, 1993):*

Si a la expresión algebraica del problema añadimos la consideración no restrictiva de que uno de los lados del rectángulo ha de ser menor o igual que el otro ($x \leq y$), podremos establecer la siguiente acotación:

$$xy \leq 2(y+y) = 4y \Rightarrow x \leq 4.$$

A partir de esta acotación es fácil estudiar la solución algebraica de los casos x=1 (1y = 2 +2 y, sin solución en $\mathbb{N}$), x=2 (2y = 4 + 2y, sin solución), x=3 (3y = 6 + 2y, solución y=6) y x=4 (4y = 8 + 2y, solución y=4).

La solución encontrada por dos alumnos de COU

Durante las sesiones, una semanal, de un Seminario sobre Estructuras y Problemas Ejemplares de Matemáticas, a cargo del autor de este trabajo en el IB Tartesos de Camas (Sevilla), realizadas a lo largo del curso 1995–96, se le planteó a los alumnos asistentes, pertenecientes al Curso de Orientación Universitaria, el problema de Isis. En unos minutos se encontraron las soluciones del mismo, pero quedó por resolver si éstas eran las únicas. La traducción al lenguaje algebraico también se obtuvo rápidamente. La resolución se orientó, por parte del profesor, tras dejar transcurrir algunas semanas para dejar libre curso a las propias ideas e iniciativas que pudieran manifestarse, hacia vías que estuvieran relacionadas con los conocimientos más «trabajados» por los alumnos de ese nivel, apareciendo como prometedora la utilización del estudio y representación de la gráfica cartesiana de la función asociada al problema de Isis:

$$xy = 2x + 2y;$$

$$y = \frac{2x}{x-2}$$

La gráfica cartesiana (figura 2) ilustra que dicha función, una hipérbola, sólo pasa por los puntos (de coordenadas números naturales, positivos) que ya conocemos como soluciones al problema de Isis.

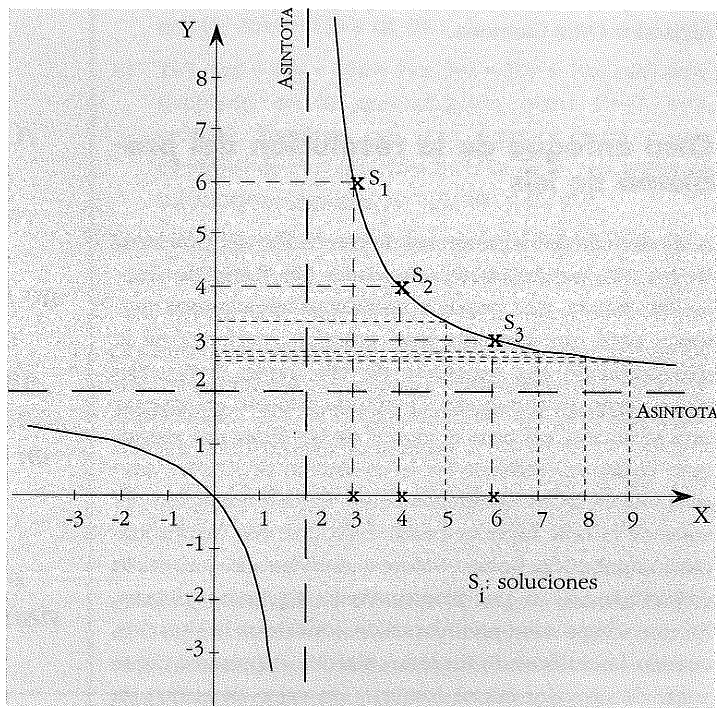


Figura 2

El carácter decreciente de la función estudiada (a través del estudio de su función derivada) y la existencia de asíntotas son puntos claves en esta demostración del *teorema* de Isis, que conlleva una actitud de «insumisión» a algunos términos del enunciado, saliendo del marco preestablecido de los números naturales para situarse en el

La resolución se orientó, por parte del profesor, [...] apareciendo como prometedora la utilización del estudio y representación de la gráfica cartesiana de la función asociada al problema de Isis de los números reales, para después de determinados análisis en este nuevo marco obtener conclusiones sobre su restricción al conjunto numérico inicial ($\mathbb{N}$).

Los argumentos anteriores fueron silenciados por el profesor que se limitó a comentar el enunciado de este problema al grupo normal de alumnos de COU, fuera de las sesiones del Seminario, a pedir que se realizara la gráfica de $y = 2x/(x-2)$ y a, en alguna sesión posterior, preguntar si existía alguna relación entre ambas cuestiones, relación que fue advertida públicamente por algunos alumnos. Al cabo de algunas semanas, Alejandro Ortiz Carmona y Alberto Bech Sánchez, alumnos del grupo de COU en que se había incitado de alguna manera a buscar una solución inspirada en la gráfica cartesiana, y asistentes al Seminario mencionado, expusieron de forma convincente el resultado de su trabajo conjunto que suponía una nueva demostración del teorema de Isis que el autor de este trabajo no ha encontrado publicada hasta ahora, aunque puede entroncar con la de Pandharipande.

Les ha sido pedida una exposición escrita de su indagación, en la que, según manifiestan, ha jugado un papel la representación gráfica de la función con un «viejo» ordenador, *Spectrum de 128K*, y un programa elaborado por Alejandro Ortiz Carmona.

Otro enfoque de la resolución del problema de Isis

A las siete métodos anteriores de resolución del problema de Isis, nos parece interesante añadir una forma de resolución distinta, que puede considerarse inicialmente algo tosca, pero que presenta gran potencia resolutiva en la generalización del problema de Isis, tanto dentro del plano como en el espacio. El método consiste en obtener una acotación, no para el menor de los lados del rectángulo como se establece en la resolución de O'Nan, sino para ambos lados simultáneamente. La determinación del valor de la cota superior puede realizarse por comprobación algebraica sobre valores conjeturados (incluso empíricamente) o por planteamiento algebraico directo. En este último caso partiríamos de considerar la situación cuando los valores de los lados pueden expresarse como suma de un valor inicial común y un valor específico de cada uno de ellos (cambio de variable):

$$x = k + a,\ y = k + b,\ a, b \in \mathbb{N}$$

(incluso podría suponerse, $x = k$, $y = k + b$).

Recordando la expresión algebraica del problema de Isis ($A = P$, $xy = 2x + 2y$), si sustituimos en la expresión del área, A, y del perímetro, P, tendremos:

$$A = (k+a)(k+b) = k^2 + kb + ka + ab;$$

$$P = 4k + 2a + 2b.$$

[Otro] método consiste en obtener una acotación, no para el menor de los lados del rectángulo como se establece en la resolución de O'Nan, sino para ambos lados simultáneamente.

Si llamamos $\Delta = A - P$,

$$\Delta = ab + (k-2)a + (k-2)b + k^2 - 4k =$$
$$= ab + (k-2)a + (k-2)b + k(k-4).$$

La diferencia $\Delta \geq 0$, $\forall\ k \geq 4$, con lo que se llega a la conclusión de que el problema de Isis no puede tener solución si los dos lados son mayores que 4, simultáneamente, por lo que al menos uno de ellos ha de ser menor o igual que 4. La resolución terminaría como en el procedimiento de O'Nan, analizando los casos x=1, x=2, x=3 y x=4.

Si hubiéramos aventurado que esa cota superior, común a los dos lados, es 4, siguiendo un desarrollo similar al anterior quedaría demostrado que efectivamente los dos lados no pueden ser simultáneamente mayores que 4 ($\Delta > 0$):

$$\Delta = (4+a)(4+b) - 2(4+a) - 2(4+b) =$$
$$= ab+2a+2b>0,\ \forall\ a, b > 0.$$

Generalización plana del problema de Isis

El problema de Isis puede generalizarse, dentro de un planteamiento plano, bajo la condición de que *h* veces el área sea igual a *k* veces el perímetro ($hxy = 2k(x+y)$), o incluso adjudicando distintos coeficientes a x e y.

Siguiendo el mismo método que hemos utilizado para el problema de Isis, no generalizado, tendríamos, para el caso general anterior ($hxy = 2kx + 2ky$), la cota superior, s, simultánea para las dos variables x e y: $s = 4k/h$.

Como ejemplo podemos considerar los siguientes casos:

a) $xy = x + y$ ($h=1$, $k=1/2$), $s = 2$. Habría que comprobar sólo los casos x=1 (sin solución), x=2 (con solución, y=2).

b) $2xy = 3(x+y)$ ($h=2$, $k=3/2$, $s=3$). Comprobados los casos x=1, x=2 y x=3, obtenemos las soluciones respectivas 2, 6 y 3, 3.

c) $3xy = 2x + 2y$ ($h=3$, $k=1$, $s=4/3$). Sólo puede haber solución para x=1 (y=2).

d) $xy = 6x + 6y$, caso que se presentará en el estudio de la generalización tridimensional del problema de Isis (h=1, k=3, s=12); deberán probarse, sucesivamente, los valores de x de 1 a 12, que podremos reducir si determinamos una cota inferior de los valores de x (en este caso x>6, coeficiente de y en el segundo miembro). Las soluciones resultantes son los pares (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), y (12, 12).

e) $3xy = 10x + 10y$, utilizable también en la generalización del problema de Isis al espacio tridimensional, que veremos más adelante (h=3, k=5, s=20/3). Deben considerarse los casos en que x toma valores comprendidos entre 1 y 6, y las soluciones de la ecuación son los pares 4, 20 y 5, 10.

A las soluciones anteriores habría que añadir, como es obvio, las resultantes de intercambiar entre sí los valores de x e y.

Generalización espacial del problema de Isis

En el caso del espacio tridimensional $\mathbb{N}^3$, el problema de Isis podría enunciarse pidiendo la determinación de las dimensiones, naturales, de un paralelepípedo rectangular, cuyo volumen, V, sea igual al área, A, del mismo (formulado por Greer, 1993, p. 176):

$$V = A,\ xyz = 2xy + 2xz + 2yz$$

En el caso del espacio tridimensional $\mathbb{N}^3$, el problema de Isis podría enunciarse pidiendo la determinación de las dimensiones, naturales, de un paralelepípedo rectangular, cuyo volumen, V, sea igual al área, A, del mismo.

Podríamos establecer una acotación simultánea para los tres lados del paralelepípedo siguiendo un procedimiento similar al seguido en el plano: $x = k + a$, $y = k + b$, $z = k + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$(k+a)(k+b)(k+c) =$$

$$= 2(k+a)(k+b)+2(k+a)(k+c)+2(k+b)(k+c),$$

Si consideramos $\Delta = V - A$, operando las expresiones anteriores y reorganizando adecuadamente, tenemos:

$$\Delta = abc + ab(k-2) + ac(k-2) + bc(k-2) +$$
$$+ a(k^2-4k) + b(k^2-4k) + c(k^2-4k) + k^3 - 6k^2,$$

con $a, b, c, k \in \mathbb{N}$. Cuando $k > 6$, $\Delta > 0$, y el problema no tiene solución; por tanto una cota superior de las tres dimensiones del paralelepípedo rectangular, simultáneamente es 6. Esto nos permite estudiar el caso general a través de 6 casos particulares, tomando para uno de los lados (x por ejemplo), sucesivamente, los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6. De esta forma el problema tridimensional se reduce a seis casos bidimensionales (generalizados):

a) $x=1$, $yz = 2y + 2z + 2yz$, $2y + 2z + yz = 0$, que no admite soluciones positivas.

b) $x=2$, $2yz = 4y + 4z + 2yz$; $y + z = 0$, ecuación que tampoco admite soluciones positivas.

c) $x=3$, $3yz = 6y + 6z + 2yz$; $yz = 6y + 6z$, caso resuelto en el apartado d) de la generalización plana, dando los pares de soluciones (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), y (12, 12).

d) $x=4$, $4yz = 8y + 8z + 2yz$; $yz = 4y + 4z$. Siguiendo el procedimiento propuesto para la generalización bidimensional, tenemos h=1, k=2, s=8, una cota superior de los valores de y sería 8, y una cota inferior 5. Resolviendo las ecuaciones correspondientes a y=5, 6, 7 y 8, obtenemos, para y y z, los pares de soluciones (5, 20), (6,12) y (8, 8).

e) $x=5$, $5yz = 10y + 10z + 2yz$; $3yz = 10y + 10z$, caso contemplado en la generalización plana (h=3, k=5, s=20/3). Tenemos una cota superior (para y, por ejemplo) de 6, y una cota inferior de 3. Los pares de soluciones obtenidos son (4, 20) y (5, 10).

f) $x=6$, $6yz = 12y + 12z + 2yz$; $yz = 3y + 3z$ (h=1, k=3/2, s=6); $3 < y \leq 6$, y los pares de soluciones correspondientes son: (4, 12) y (6, 6)

Las ternas de soluciones obtenidas para el problema de Isis, generalizado al espacio tridimensional, para las dimensiones *x*, *y*, *z*, o cualquiera de sus permutaciones, son por tanto las diez siguientes:

(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10) y (6, 6, 6).

El método anterior para resolver el caso tridimensional puede generalizarse a espacios de mayor dimensión $\mathbb{N}^d$, $d \geq 4$, manteniendo el modelo de expresión algebraica del caso bidimensional y tridimensional; en el caso cuatridimensional la expresión algebraica correspondiente sería:

$$xyzt = 2xyz + 2xyt + 2xzt + 2yzt.$$

El elemento determinante para la acción de reducir el planteamiento a un número finito de casos es el establecimiento de una cota superior para el conjunto de las dimensiones. Siguiendo un procedimiento similar al seguido en el caso bidimensional y tridimensional se puede establecer con carácter general el teorema según el cual *una cota superior en $\mathbb{N}^d$ de las d variables es 2d* (4 en el caso bidimensional, 6 en el tridimensional, como ya sabemos, 8 para el espacio de cuatro dimensiones,...). La demostración de este teorema no es conceptualmente complicada empleando el método ya descrito, pero su expresión resulta algo prolija. Puede demostrarse (también para d=2 y d=3, ya analizados) de forma más elegante recurriendo a los procedimientos de resolución propuestos por O'Nan (Davis, 1993, p. 5) y por Imree (1987), respectivamente, procedimientos que revelan, a través de esta convergencia, su proximidad, por encima de las apariencias.

Siguiendo el procedimiento de O'Nan al caso general:

$$x_1x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1}x_d =$$

$$= 2(x_1x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1} + x_1x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_d + x_1x_2x_3 \ldots x_{d-1}x_d +$$

$$+ \ldots + x_1x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1}x_d + x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1}x_d).$$

Si ordenamos los valores de las distintas dimensiones:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_{d-1} \leq x_d,$$

podemos sustituir en cada término del segundo miembro cada factor hasta llegar al «factor ausente» en cada término, por el siguiente en la secuencia ordenada anteriormente; con ello el primer miembro queda acotado superiormente por el resultado de la sustitución mencionada (que afecta a todos los términos excepto al último de ellos):

$$x_1x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1}x_d \leq$$

$$\leq 2(x_2x_3x_4 \ldots x_{d-1}x_d + x_2x_3x_4 \ldots x_{d-1}x_d +$$

$$+x_2x_3x_4 \ldots x_{d-1}x_d + \ldots +x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1}x_d+x_2x_3 \ldots x_{d-2}x_{d-1}x_d)$$

Como todas las variables son positivas, podemos dividir por el término que aparece repetidamente en el segundo miembro, resulta:

$$x_1 \leq 2(1 + 1+ \ldots ^{d} \ldots +1),\ x_1 \leq 2d,$$

y queda demostrado que una cota superior de la menor de las dimensiones (y por tanto de todas ellas) es 2d.

Aplicando el procedimiento de Imree al enunciado general formulado, si dividimos los dos miembros por el producto de todas las variables que constituyen el primer miembro, resulta:

$$1 = \frac{2}{x_d} + \frac{2}{x_{d-1}} + \cdots \frac{2}{x_2} + \frac{2}{x_1}$$

(con d sumandos)

igualdad que no puede satisfacerse si todas las variables toman valores superiores a 2d, con lo que queda demostrada la acotación simultánea de todas las variables que intervienen en el problema de Isis, d–dimensional.

El problema de Isis presenta fundamentalmente un interés desde el punto de vista de la historia de las culturas matemáticas. Como otros problemas, sirve de motivo para la reflexión sobre el proceso de conocimiento humano, a través de los variados intentos y vías de resolución.

Consideraciones cognitivas sobre la resolución del problema de Isis

El problema de Isis presenta fundamentalmente un interés desde el punto de vista de la historia de las culturas matemáticas. Como otros problemas, sirve de motivo para la reflexión sobre el proceso de conocimiento humano, a través de los variados intentos y vías de resolución.

Davis (1985; 1993, pp. 3–8) destaca la importancia de las distintas «representaciones» empleadas en los intentos, con éxito o sin él, de resolución del problema de Isis, importancia que no puede ser negada. Sin embargo, conviene advertir del peligro de reducir el proceso de conocimiento a la evocación de esquemas o armazones de resolución. A pesar de que pueda vincularse la idea de «representación» a los más dinámicos principios piagetianos de «asimilación» y «acomodación» (Davis, 1984, p. 158), parece insuficiente limitarse al juego de «representaciones» en el desarrollo del conocimiento, en el proceso de aprendizaje y en la resolución de problemas.

En este sentido, de no supeditación a una interpretación basada exclusivamente en esquemas cognitivos, puede tener algún interés el trabajo presente. Así no nos parecen equiparables en importancia las dieciocho representaciones en los intentos de resolución recogidos por Davis (1985), algunas de ellas ligeras variantes de otras, con otros enfoques más amplios, quizás no limitables a meros esquemas de representación. Davis mismo admite la existencia de ciertas categorías por encima de cada tipo de representación cuando, por ejemplo, manifiesta respecto a la solución aportada por Greer «... él y sólo él, pensó acerca de las baldosas cuadradas concretas... todos los demás nos alejamos inmediatamente de las representaciones concretas del problema y empleamos en su lugar representaciones abstractas» (Davis, 1993, p. 6); surge pues, en el mismo texto de Davis, la necesidad de abordar el fenómeno de pasar de unos grupos de representaciones a otros.

En la resolución que hemos ofrecido del problema de Isis, basada en la idea de acotación, expresable, en un principio, de forma algo rudimentaria (con una mezcla de aspectos concretos, en la fijación de una presumible cota, y de aspectos algebraicos en la demostración de lo acertado de la conjetura concreta previa), y depurada posteriormente usando métodos algebraicos, y particularmente a través de los procedimientos de resolución empleados por O'Nan, M. (Davis, 1993, p. 5) y por Imree (1987), se perfila, como en los trabajos que acabamos de mencionar, quizás con mayor pureza en sus planteamientos más rudimentarios, la conveniencia de destacar una acción de resolución (si se prefiere un bloque de representaciones) consistente en deformar el conjunto del problema inicial, no acomodándose al planteamiento explícito en el enunciado de «igualdad», sino transformándolo en un problema de desigualdad que permita una mayor amplitud de manipulación, concreta y abstracta. Con toda la importancia que pueden tener las representaciones particulares del problema, distinguiendo, por ejemplo, como distintas representaciones «4n + 2v = v2n (quinta representación), 2n + v = nv (sexta representación)...» (Davis, 1985, p. 90), nos parece más relevante la distinción entre «líneas» o estrategias de acción y resolución. Una primera distinción de líneas puede establecerse en torno a la actitud de sujeción, o de independencia, respecto al enunciado recibido. En nuestro caso la actitud de irreverencia respecto al enunciado recibido, saltando, al menos provisionalmente, de un enunciado en el que se pone el énfasis en determinar valores concretos que satisfacen una condición de igualdad, a establecer una cota, superada la cual no se cumple dicha condición, supone una preponderancia de la acción de «asimilación» sobre la «acomodación», asimilación que acaso deba entenderse más allá del sentido cognitivo, restrictivo, para resaltar su aspecto biológico originario (Piaget, 1977) de actuación transformadora sobre el medio.

La importancia concedida a la actitud transformadora del sujeto no nos hace identificarnos, sin embargo, con el planteamiento constructivista en boga que ignora o menosprecia el papel del medio como moldeador del conocimiento y la referencia objetiva (exterior al sujeto) del conocimiento mismo.

Análoga situación de *insumisión* se detecta en el método de resolución descubierto por los alumnos de COU del IB Tartesos de Camas (Sevilla), Alejandro Ortiz Carmona y Alberto Bech Sánchez. En este caso el distanciamiento de las condiciones prefijadas del problema se produce respecto al conjunto numérico al que tienen que pertenecer las soluciones, planteando el problema en $\mathbb{R}$ (y no en $\mathbb{N}$), más que respecto a que la relación considerada sea de igualdad.

La importancia concedida a la actitud transformadora del sujeto no nos hace identificarnos, sin embargo, con el planteamiento constructivista en boga que ignora o menosprecia el papel del medio como moldeador del conocimiento y la referencia objetiva (exterior al sujeto) del conocimiento mismo. Aunque paradójicamente hayamos puesto el énfasis sobre la acción del sujeto en lugar de las meras representaciones, más propicias a ser consideradas como reflejos de una realidad objetiva, no suscribimos la filosofía y la epistemología constructivista defendida, entre otros, por Davis (Davis, Maher y Noddings, 1990), siguiendo el modelo del procesamiento de la información, nueva forma de conductismo para algunos. El debate sobre estos aspectos epistemológicos, apenas comenzado, necesita, para prosperar, liberarse del paralizante dogmatismo académico y administrativo, actualmente anclado en el constructismo y factor de su escasamente discutida hegemonía.

Alberto Martínez
IB Tartesos.
Camas (Sevilla)

Referencias bibliográficas

DAVIS, R. B. (1984): *Learning Mathematics. The Cognitive Approach to Mathematics Education*, Ablex Publishing Corporation, New Jersey (2ª impresión, 1986).

DAVIS, R. B. (1985): «The Role of Representations in Problem Solving: Case Studies», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 4, n.° 1, 85–97.

DAVIS, R. B. (1993): «The Isis Problem and the Question of Representations», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, n.° 1, 3–8.

DAVIS, R. B., C. A. MAHER y N. NODDINGS (1990): *Constructivist Views on the Teaching of Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Reston, Virginia (*Journal of Research in Mathematics Education*. Número 4, monográfico).

GREER, B. (1993): «A Pre–Algebraic Solution of the Isis Problem», The Journal of Mathematical Behavior, vol. 12, 175–176.

IMREE, L. (1987): «The Isis Problem Revisited», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 6, 381–382.

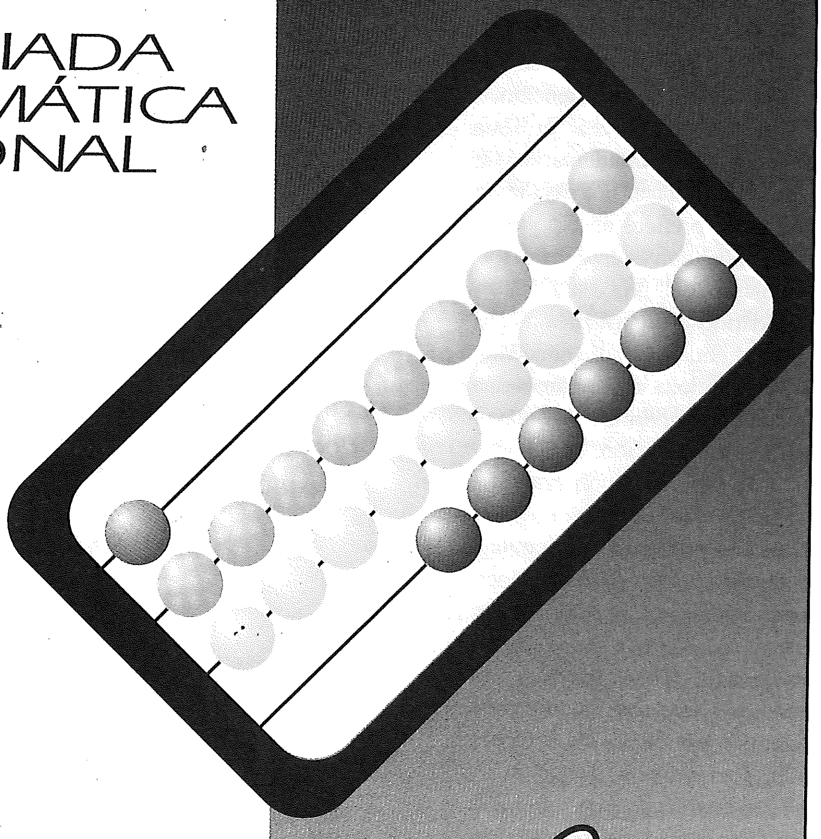
KLAMKIN, M. y M. WALTER (1986): «Contributions», *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 5, n.° 3, 337–338.

PANDHARIPANDE, R. (1985): «The Isis Problem»: *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 4, n.° 1, 101–103.

PIAGET, J. (1977): *Biología y conocimiento*, Siglo XXI, México, Madrid y Buenos Aires.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

VII OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL



COMUNIDAD DE EXTREMADURA

24 al 29 de Junio 1996

VALENCIA DE ALCÁNTARA

CÁCERES - MÉRIDA

SUMA 22
junio 1996, pp. 33-42

El software matemático y los lenguajes de programación

Jose F. Quesada Moreno

Se lleva a cabo un análisis de los lenguajes de programación desde el punto de vista de sus relaciones con el software matemático. Para ello se comienza con una definición bastante flexible de software matemático, para continuar con un análisis metodológico de los lenguajes de programación, estudiando los paradigmas imperativo, funcional, la programación lógica y la orientación a objetos. Por último se realiza un estudio histórico de los lenguajes de programación, así como de los lenguajes de programación más adecuados para la implementación de algoritmos matemáticos.

ARTÍCULOS

El software matemático: objeto y método de estudio

El objetivo de este artículo es el estudio del software matemático desde el punto de vista de los lenguajes de programación. Aunque aún estamos inmersos en la corriente de crecimiento exponencial que caracteriza a las tecnologías de la información, lo que podría cuestionar una visión crítica acerca del mismo proceso de desarrollo, creo que la interconexión entre las ciencias de la computación y las matemáticas es lo suficientemente notoria como para ser expuesta sin temor a una grave equivocación.

Es algo más que una simple curiosidad el que los primeros ordenadores estuviesen dirigidos, en lo fundamental, hacia la automatización de determinados cómputos matemáticos. Esta concepción «matematizadora» se ha mantenido durante todos estos años y dan cuenta de su permanencia algunos datos bastante significativos. En supercomputación, el ámbito de máxima potencia computacional, se mide la potencia de una plataforma en FLOPS[1] o en unidades más sofisticadas que integran el denominado ámbito de los *benchmarks,* que en su conjunto, y a pesar de sus diferencias, tienen un fuerte componente de cómputo matemático. Otro dato de interés se puede desprender de la consideración del conjunto de microinstrucciones implementadas a nivel hardware en la mayoría de los procesadores comerciales, donde aparece como un apartado, en ninguna medida secundario, el conjunto de operaciones matemáticas. También se puede mencionar la comercialización de coprocesadores matemáticos, o la enorme importancia que para determinados tipos de problemas están asumiendo los procesadores vectoriales.

La interconexión mencionada no se ha producido únicamente en el plano teórico, sino que se ha visto reflejada en una ingente cantidad de utilizaciones concretas de los recursos informáticos para la resolución de problemas matemáticos, tanto de las diferentes ramas de la matemática pura como de las múltiples áreas de aprovechamiento de la matemática aplicada.

Así pues, a la especificación inicial según la cual el objetivo propuesto sería el estudio del software matemático, habría que añadir el que este campo se puede caracterizar por la profusión de investigación y desarrollo, por lo que se hace necesario el discutir, a modo de estructuración conceptual, el objeto y el método de estudio en torno a los que girará nuestro análisis.

Para centrar el tema de estudio, asumiendo siempre como objetivos la brevedad y la economía conceptual, creo que la siguiente definición es bastante adecuada, al menos como hipótesis de trabajo: se entenderá por *software matemático* toda implementación computacional de algoritmos matemáticos.

Cabe destacar dos ideas de la definición anterior: en primer lugar, la noción de *algoritmo*, y más específicamente de algoritmo matemático, nos retrotrae hasta la existencia de un mecanismo formalizado y general para la resolución de un tipo dado de problemas. Las especificaciones formales del concepto de algoritmo conforman en sí mismas un campo amplio y apasionante; no obstante, para el problema que nos ocupa será suficiente considerar que un algoritmo es un conjunto de reglas mediante las que se especifica una serie de estructuras de datos y mecanismos u operadores para su manipulación, de tal forma que su ejecución, en un tiempo finito, permite obtener una o más estructuras nuevas de datos, cuyo contenido será la solución para el problema considerado.

La segunda idea a destacar de la definición de software matemático es la noción de *implementación computacional*. Es evidente que sólo se podrá hablar de software matemático cuando el algoritmo matemático pueda ser reescrito de forma tal que sea procesable por un computador, entendiendo un computador como una máquina, de propósito general, diseñada específicamente para el procesamiento de símbolos (lo que recuerda, aunque sólo en su base conceptual, la noción de *máquina de Turing*).

La definición presentada para el software matemático es intencionadamente genérica, es decir, no lo es por casualidad, sino porque se ha considerado que la imposición de otras restricciones, aunque permitiría perfilar con mayor precisión el campo, podría excluir áreas de verdadero interés.

Estas últimas consideraciones nos llevan hasta el problema del método de estudio. Existen varias formas de abordar el estudio de este campo caracterizado por la existencia de miles de entornos. En nuestro caso se ha optado por un enfoque analítico y sistemático, en el que, a través de una serie de esquemas clasificatorios, se ordena la mayor parte del software, herramientas, entornos, paquetes, etc., disponibles.

...se entenderá por software matemático *toda implementación computacional de algoritmos matemáticos.*

Un primer marco de clasificación nos permite delinear tres grandes áreas:

a) Lenguajes de programación.

b) Librerías matemáticas.

c) Sistemas de álgebra computacional.

El presente artículo se centrará en la primera de las áreas: los lenguajes de programación.

Los lenguajes de programación y el software matemático

Teniendo en cuenta el enfoque presentado, el primer tema que se debe abordar es el relativo a los lenguajes de programación, y ello por dos razones fundamentales.

En primer lugar, porque la implementación real de algoritmos matemáticos se debe hacer mediante algún lenguaje de programación. Siempre que alguien intente implementar cualquier algoritmo, desde los más básicos o elementales hasta los más sofisticados y complejos, deberá recurrir a un lenguaje, que es un concepto abstracto que engloba estructuras de datos, mecanismos o reglas lógicas que rigen la manipulación simbólica, estructuras de control del flujo del proceso, pero que es también un ente concreto formado por compiladores, editores, depuradores, etc. Además de esta razón, ocurre que el resto de los paquetes, librerías, entornos interactivos, sistemas de álgebra computacional, programas especializados para determinados ámbitos de la matemática aplicada, etc.; en general, todos los entornos más o menos sofisticados del software matemático, están programados en algún lenguaje, de forma que el conocimiento del lenguaje que le sirve de base puede ayudar a comprender de una forma más adecuada sus prestaciones, la sintaxis propia del entorno, e incluso nos puede per-

1 FLOPS (floating-point operations per second) se define como operaciones matemáticas elementales en punto flotante (usando decimales) por segundo.

mitir incorporar módulos propios o definidos por el usuario para abordar cuestiones no resueltas directamente por el paquete.

Otra razón, de cariz más general, es que el estudio de los lenguajes de programación permitirá conocer las técnicas básicas y fundamentales que se están empleando a nivel computacional y que sirven de soporte para comprender la evolución y las potencialidades del software que se está desarrollando y se desarrollará en los próximos años.

El resto del artículo se estructurará en torno a los siguientes temas: En la sección siguiente se presentará una breve descripción de lo que se entiende por lenguaje de programación, junto con una primera clasificación, muy esclarecedora, de los cuatro modelos o paradigmas básicos de la programación. Más adelante se ofrece una segunda clasificación de los lenguajes, en este caso dirigida por un motivo más historicista y que pretende dar cuenta de la evolución de los lenguajes a través de las así denominadas generaciones. A continuación se presentarán brevemente las fechas más características asociadas con los lenguajes más representativos, y por último, se abordará el estudio más técnico de las características de los lenguajes que han tenido, tienen o podrán tener mayor interés para el software matemático.

Los lenguajes de programación. Una clasificación metodológica

Partimos de la noción de *lenguaje* entendido de acuerdo con la tradición del racionalismo lingüístico antisolipsista representada por el *Tractatus logico-philosophicus* de Wittgenstein, según la cual un lenguaje es un conjunto de reglas que permiten la comunicación o transmisión de ideas, comunicación que es posible al ser las reglas compartidas y aceptadas por un grupo de individuos. La consecuencia fundamental de este planteamiento es la noción de convención en torno a un conjunto de reglas: un *formalismo*, para la comunicación de ideas, entendidas estas últimas en un sentido muy amplio, donde por supuesto caben los algoritmos.

...un lenguaje es un conjunto de reglas que permiten la comunicación o transmisión de ideas, comunicación que es posible al ser las reglas compartidas y aceptadas por un grupo de individuos.

Así pues, el concepto de lenguaje queda automáticamente ligado con otro no menos importante a este nivel como el de *gramática*, entendida esta última como el conjunto de reglas que especifican la sintaxis de un lenguaje. El conjunto de reglas que forman una gramática definen todas las construcciones válidas del lenguaje, por lo tanto, una gramática se puede contemplar formalmente como una definición intensiva de un lenguaje. Desde un punto de vista constructivo o de diseño, una gramática está formada por cuatro elementos básicos:

a) Un conjunto de *símbolos terminales*, que son las realizaciones atómicas (individuales) concretas que se combinan para formar construcciones del lenguaje.

b) Un conjunto de *símbolos no terminales*, que no forman parte del lenguaje en sí mismo, sino que representan elementos intermedios de cuya definición se encargan las reglas de producción, y que de alguna forma constituyen las abstracciones teóricas o conceptuales implicadas en el proceso de análisis de una entrada según las reglas, para determinar su gramaticalidad.

c) Un conjunto de *reglas de producción* que especifican formalmente las definiciones de los símbolos no terminales y que a nivel sintáctico determinan el proceso de análisis de la gramaticalidad de las construcciones de símbolos no terminales del lenguaje.

d) Un *símbolo meta*, perteneciente al conjunto de los símbolos no terminales, y que concebido como símbolo inicial de derivación sobre el que operan las reglas de producción determina el conjunto (finito o infinito) de fórmulas (combinaciones o secuencias de símbolos terminales del lenguaje) bien formadas.

La estructura de las reglas de producción determina el modelo gramatical del lenguaje. A este nivel es aún aceptada la clasificación de Chomsky que distingue entre gramáticas generales, sensibles al contexto, de contexto libre y regulares.

Esto nos permite establecer una primera especificación de lo que es un lenguaje de programación como en general un lenguaje, que, por consiguiente, tendrá asociada de forma biunívoca una gramática que determinará exhaustivamente la sintaxis del mismo y las fórmulas bien formadas que lo componen. Por tanto, en cuanto a su presentación formal un lenguaje de programación, o más exactamente su gramática, será una 4-tupla:

$$G = (T,N,P,I)^{2}$$

En esta definición el elemento determinante es el conjunto de reglas de producción o producciones, cuya estruc-

2 Donde T es el conjunto de símbolos terminales, N es el conjunto de los símbolos no terminales (y se cumple $T \cap N = \phi$), P es el conjunto de las reglas de producción e I es el símbolo inicial ($I \in N$).

tura determinará la complejidad gramatical del lenguaje. La mayoría de los lenguajes actuales poseen gramáticas incluidas dentro del tipo de contexto libre (CFG: *context free grammars*) dentro de la clasificación de Chomsky[3].

No obstante, los lenguajes de programación presentan ciertas características que los diferencian del resto de los lenguajes naturales, características que afectan fundamentalmente a los focos de la comunicación (intervención del computador), al contenido (programas, cuya estructura es significativamente diferente a la comunicación interpersonal) y al medio o canal (el simbolismo y la semántica que sirven de soporte a la construcción de programas).

Estas consideraciones nos permiten concluir con la siguiente definición: un *lenguaje de programación* es un lenguaje cuya gramática ha sido diseñada específicamente para que una *persona* pueda expresar formalmente el *proceso* que un *computador* deberá seguir para resolver un *problema.*

Los cuatro conceptos escritos en cursiva polarizan la atención a la hora de abordar una clasificación metodológica de los lenguajes de programación; pudiendo hablarse de lenguajes de programación orientados a la persona, al proceso, al computador y al problema, como se muestra en la figura 1.

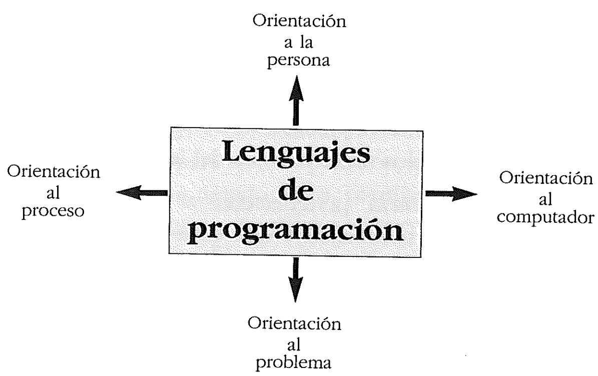


Figura 1. Orientaciones de los lenguajes de programación

Según qué polo sea el dominante se podrán establecer cuatro modelos de lenguajes que dan lugar a otras tantas metodologías de la programación, las cuales aparecen en la figura 2.

El modelo imperativo o procedimental

Este modelo asume la perspectiva del computador o, más exactamente, la perspectiva de la arquitectura SISD[4] o modelo Von Newmann. Teniendo en cuenta que bajo este modelo la computación se concibe como tratamiento (almacenamiento, manipulación y recuperación) de la informa-

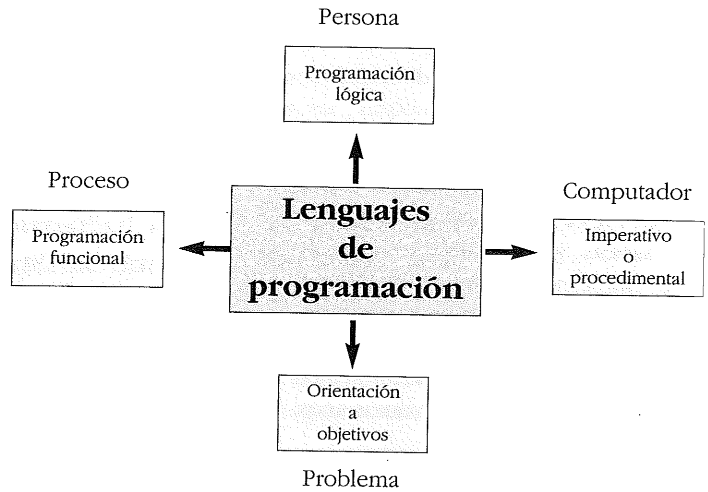


Figura 2. Metodología de programación

Sea G una gramática definida como $G = (T,N,P,I)$.

(a) Se entenderá por *cadena de símbolos s* cualquier secuencia, con o sin repeticiones, de símbolos del vocabulario de G

$$T \cup N$$

(b) Por *tamaño de una cadena*: $|s|$ se indicará el número de símbolos, incluidas repeticiones, de la cadena s.

(c) Se define una cadena especial: la *cadena vacía*: ϕ.

(d) Para cualquier conjunto (A) de símbolos se define el producto cartesiano $A \times A$, o A^2, como:

$$A \times A = \{s = ab \,/\, a \in A,\ b \in A\}$$

(e) A^i se define como la aplicación i-1 veces del producto cartesiano sobre A.

(f) $A^* = \Sigma_{\geq 0} A^i \qquad A^+ = \Sigma_{\geq 0} A^i = AA^* = A^*\text{-}\{\varepsilon\}$

A partir de estos conceptos se pueden obtener las especificaciones formales de los cuatro tipos de gramáticas, según la forma de sus producciones:

Tipo 0: Gramáticas generales

$$\forall(\alpha,\beta) \in P,\quad \alpha \in (T \cup N)^+,\quad \beta \in (T \cup N)^+$$

Tipo 1: Gramáticas sensibles al contexto

$$\forall(\alpha,\beta) \in P,\quad \alpha \in (T \cup N)^+,\quad \beta \in (T \cup N)^+,$$
$$|\alpha| \leq |\beta|$$

Tipo 2: Gramáticas de contexto libre

$$\forall(\alpha,\beta) \in P,\quad \alpha \in N,\quad \beta \in (T \cup N)^*$$
$$|\alpha| \leq |\beta|$$

Tipo 3: Gramáticas regulares

$$\forall(\alpha,\beta) \in P,\quad \alpha \in N,$$

$$\begin{cases} \beta = Ab, \text{ donde } A \in N,\ b \in T \\ \text{ó} \\ \beta = b, \text{ donde } b \in T \end{cases}$$

3 Una caracterización, aunque somera, de los tipos de gramáticas de la clasificación de Chomsky viene expresada en el recuadro adjunto.

4 Las siglas SISD corresponden a uno de los grupos (Single Instruction Single Data) de la clasificación de Flynn en 1966. Los computadores pertenecientes a este grupo se caracterizarían por tener CPUs capaces de procesar simultáneamente sólo una instrucción (Single Instruction) que opera sólo sobre un dato (Single Data).

ción contenida en la memoria del computador, los lenguajes que se basan en él reflejan de una forma bastante directa la ejecución secuencial de comandos y la utilización de datos (variables) cuyo contenido se modifica durante el proceso.

Debido a la cercanía con la arquitectura del procesador, su traducción a código máquina resulta relativamente sencilla por lo que fueron los primeros en aparecer, y los únicos hasta la década pasada. Entre los lenguajes que se pueden adscribir a este modelo destacan Fortran, Pascal, Ada y C.

La orientación lógica

La programación u orientación lógica de los lenguajes de programación se centra en la perspectiva de la persona, encarando el problema desde un punto de vista lógico. Es decir, aborda la especificación de un problema no desde el enfoque basado en *cómo hacer* (secuencias de pasos necesarios para obtener la solución) sino en *qué hacer* (hechos y reglas relevantes que pueden ser utilizados para deducir la solución).

La consecuencia principal de este modelo es la separación, tanto en el ámbito conceptual como en el de implementación, entre lo que es la *base de conocimientos* específica para el problema particular (y que en sí constituye el programa) y el *motor inferencial* genérico que incorpora los mecanismos de razonamiento que se aplican a la base de conocimiento para obtener la solución del problema (y que de alguna forma constituye el lenguaje).

Desde un punto de vista lógico, un programa escrito según el modelo que nos ocupa estaría formado por un conjunto de axiomas (hechos y reglas que se asumen como verdaderos) y una sentencia objetivo o meta a demostrar. A partir de estos datos, las reglas de inferencia deberán determinar si los axiomas permiten deducir el objetivo propuesto. La forma como esto se hace no es competencia del programador sino que forma parte del lenguaje mismo. Es decir, los programas escritos según el modelo lógico indican una meta y los hechos que son relevantes para su demostración, pero no expresan el método de derivación, sino que éste podrá ser el resultado de la ejecución del programa, en el caso en que la meta sea derivable de los hechos.

Desde un punto de vista lógico, un programa escrito [...] estaría formado por un conjunto de axiomas [...] y una sentencia objetivo o meta a demostrar. A partir de estos datos, las reglas de inferencia deberán determinar si los axiomas permiten deducir el objetivo propuesto.

Los ejemplos clásicos de orientación lógica lo constituyen Prolog y los lenguajes de interrogación para bases de datos relacionales.

El modelo funcional

Este modelo adopta el punto de vista centrado en el proceso de solución del problema. La idea que le sirve de base es la noción matemática de función, concebida como un tipo especial de correspondencia entre un conjunto dominio y un conjunto imagen o destino. La traducción gramatical de este concepto para servir como modelo de programación supone la equiparación entre el conjunto dominio con todas las posibles entradas y el conjunto destino con las salidas posibles. La definición de la función muestra cómo un elemento del conjunto imagen es obtenido a partir de un elemento del conjunto dominio.

A nivel formal se suele utilizar en el modelo funcional la denominada *expresión lambda* desarrollada por Church en 1941.

El lenguaje funcional más clásico es Lisp, el cual ha servido de modelo para otros lenguajes y entornos.

La programación orientada a objetos

Por último, y de aparición más reciente, encontramos la programación orientada a objetos, cuya filosofía de diseño se preocupa fundamentalmente por la perspectiva del problema real.

Desde un punto de vista estructural, este modelo está formado por cuatro componentes básicos:

— *Clases.* Una clase define un modelo de objetos. Puede concebirse como un tipo de datos abstracto (TDA) que incluye una estructura interna y un conjunto de operaciones. Con mayor detalle, una clase está formada por una serie de métodos y descripciones que asumirán automáticamente todos los objetos de la clase sin necesidad de una redefinición para cada caso.

— *Métodos.* Se trata de las descripciones de las operaciones que un objeto perteneciente a una clase realizará cuando reciba un mensaje. Es decir, la recepción de un mensaje por parte de un objeto desencadenará la ejecución de un método (que estará en función del tipo del mensaje, el tipo de objeto y su estado actual).

— *Mensajes*. Son los ítems de información transferidos desde un objeto hasta otro con la finalidad de obtener un resultado determinado, estando predefinidos en el objeto receptor las relaciones entre mensajes y métodos; además el objeto emisor no tiene por qué conocer el mecanismo de resolución del problema, sino que una vez enviado el mensaje, las operaciones necesarias que se deban ejecutar para obtener el resultado requerido estarán determinadas y controladas exclusivamente por el objeto receptor.

— *Objetos*. Los objetos son las instancias particulares de las clases y, por lo tanto están constituidas por un conjunto encapsulado de operaciones y una descripción actual del estado del objeto, que se encarga de mantener permanentemente los efectos de las operaciones ejecutadas sobre él. A partir de la recepción de un mensaje asociado con una operación, el objeto activa el método correspondiente, pudiendo, entre otras cosas, enviar nuevos mensajes a otros objetos.

Las principales características o propiedades del modelo son:

- *Herencia*: es posible definir una jerarquía de clases, y por extensión, de objetos, de forma que sea automática la asunción de propiedades, métodos, etc., por parte de las clases inferiores en la escala; permitiéndose, no obstante, la especificación de excepciones.
- *Encapsulado*: esta propiedad permite ver a los objetos como estructuras autónomas, donde el modelo descriptivo del estado y los pares mensajes-métodos vienen predefinidos por la clase a la que pertenece el objeto y el valor actual del objeto está determinado por los métodos activados en respuesta a los mensajes de una ejecución particular.
- *Polimorfismo*: lo que significa que el mismo mensaje puede ser enviado a diferentes objetos, y que el método adecuado se establecerá según la clase a la que pertenezca cada uno de los objetos receptores. E incluso, se podrán enviar mensajes sin conocer la clase de objetos receptora.

El primer lenguaje que implementó la metodología de la programación orientada a objetos fue Simula en 1966, posteriormente revisado en Smalltalk. C++ se considera un lenguaje híbrido, donde a partir de un lenguaje imperativo se han añadido algunas de las características del modelo orientado a objetos.

Una clasificación histórica de los lenguajes de programación

Son muchas las clasificaciones de los lenguajes de programación en etapas a lo largo de los últimos 40 o 50 años. De entre ellas se ha elegido la siguiente por ser representativa de la evolución que se ha logrado a este nivel. Básicamente se estructura la historia de los lenguajes de programación en cinco generaciones.

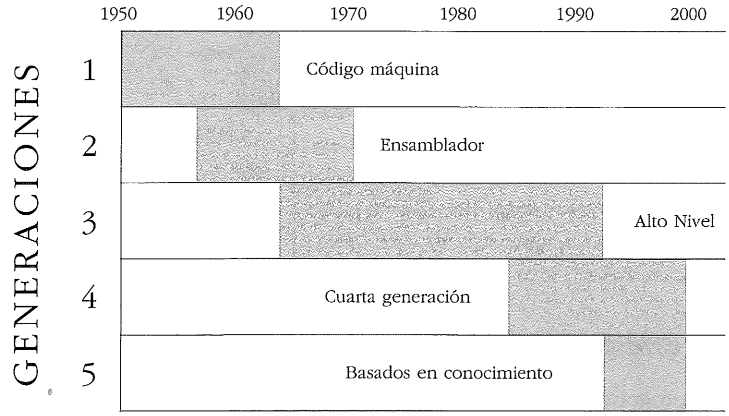


Figura 3. Las generaciones de los lenguajes de programación

Primera generación: Lenguajes máquina

La primera generación (1950-1960)[5] está basada en la utilización de instrucciones en código máquina, es decir, la programación se realiza utilizando directamente los códigos binarios de los procesadores. Los dos problemas de esta metodología eran la dificultad del código y la dependencia de la arquitectura.

Segunda generación: Lenguajes ensambladores

La segunda generación (1955-1970) está caracterizada por la presencia de lenguajes ensambladores simbólicos. Básicamente pretendió corregir uno de los problemas de la generación previa: la dificultad del código binario, al ofrecer un código alfabético mnemotécnico para cada instrucción máquina, haciendo más sencilla la comprensión y el desarrollo de programas. No obstante, persistía la segunda dificultad, a saber, la dependencia de la arquitectura y los consiguientes problemas de portabilidad.

5 Como es obvio, todos los procesos históricos no son fácilmente demarcables. Esto se ha visto reflejado en la breve historia de la informática, y así las fechas que se indican para cada generación deben ser comprendidas como etapas con límites difusos, pues las ideas asociadas con cada metodología y cada lenguaje no aparecen ni se eliminan de una forma puntual.

Tercera generación: Lenguajes de alto nivel

La tercera generación de lenguajes agrupa los denominados lenguajes de alto nivel y se inserta dentro de una corriente general de renovación en el ámbito de la informática ejemplificada por la tendencia a la estandarización de los sistemas operativos, intentando asegurar de esta forma la portabilidad de las aplicaciones.

Quizás la característica principal de esta generación sea la presencia de un entorno de desarrollo cercano al programador, que realiza grandes abstracciones con respecto a las instrucciones nativas de la máquina.

Los primeros lenguajes de alto nivel en aparecer fueron Fortran y Cobol, a los que siguieron Pascal, C, PL/1, etc., que implementan ya metodologías estructuradas de programación.

Cuarta generación

Desde principios de los ochenta se viene hablando de lo que sería una cuarta generación de lenguajes concebidos como herramientas para el desarrollo rápido de aplicaciones. Enlazado con la clasificación metodológica descrita en la sección anterior, esta generación representa la imposición de la metodología de la orientación lógica sobre la programación imperativa característica de la tercera generación; es decir, el paso desde el *cómo hacer* al *qué hacer*.

La posibilidad de una quinta generación de lenguajes ha venido vinculada a la realizabilidad de las técnicas de inteligencia artificial, y realmente suponen un nuevo paso en la incorporación de conocimiento a los sistemas computacionales.

Dentro de los entornos de cuarta generación se incluyen:

- Sistemas de gestión de bases de datos.
- Lenguajes de interrogación (tipo SQL).
- Generadores de informes.
- Gráficos comerciales interactivos.
- Paquetes de software integrado. Etc.

Quinta generación: Sistemas basados en el conocimiento

La posibilidad de una quinta generación de lenguajes ha venido vinculada a la realizabilidad de las técnicas de inteligencia artificial, y realmente suponen un nuevo paso en la incorporación de conocimiento a los sistemas computacionales.

Entre los sistemas basados en conocimiento que caracterizan esta quinta generación se encuentran:

- Los sistemas expertos.
- Los motores de inferencia.
- El procesamiento del lenguaje natural. Etc.

Las especificaciones formales de estos entornos introducen fuertes requisitos en cuanto a potencia computacional para lograr implementaciones eficientes. En concreto, la investigación actual ha fijado su interés en el procesamiento masivamente paralelo.

Breve historia de los lenguajes de programación

En esta sección se pretende ofrecer una breve relación de las fechas más importantes desde el punto de vista de la historia de los lenguajes de programación:

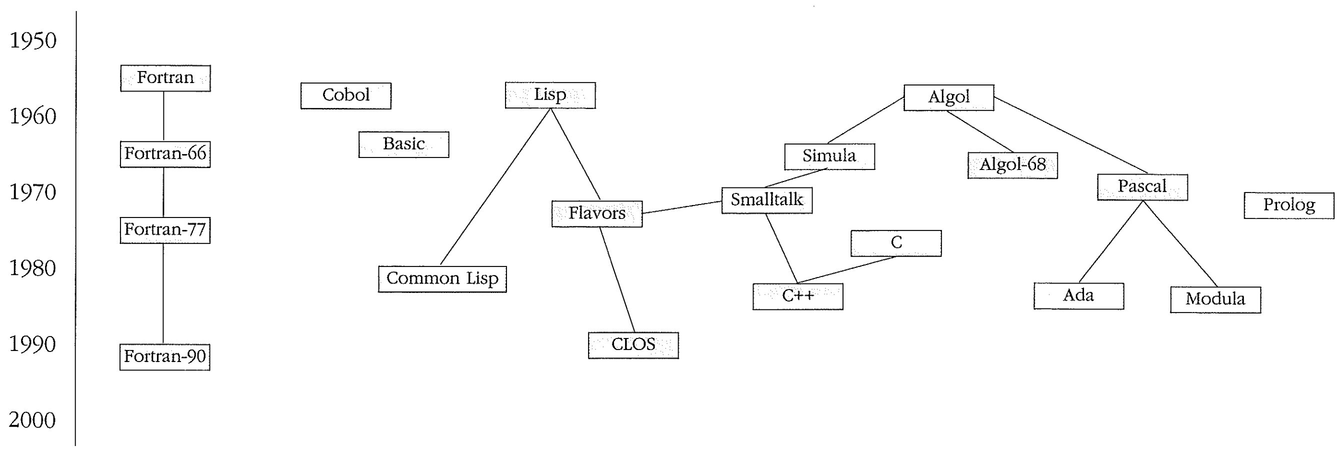


Figura 4. Principales relaciones entre los lenguajes de programación

1956 Fortran: diseñado e implementado por John Backus, IBM.

1960 COBOL.

ALGOL 60.

LISP, desarrollado por John McCarthy en el Artificial Intellegence Group del M.I.T

1962 APL, especificado por Kenneth Iverson.

1965 BASIC, desarrollado por Thomas Kurtz y John Kemeny es el Dartmouth College.

1966 Fortran 66, ANSI X3.9-1966.

1967 Simula 67, desarrollado por Ole-Johan Dahl y Kristan Nygaard.

1969 ALGOL 68.

Pascal.

1972 Prolog, desarrollado en la Universidad de Marsella por Alan Colmerauer.

1973 Smalltalk, desarrollado por Alan Kay en el centro de Investigación de Xerox en Palo Alto.

1978 C, desarrollado en los laboratorios Bell, desde 1972 por Dennis Ritchie.

Fortran 77, ANSI X3.9-1978.

1981 Common LISP.

1982 Modula-2, desarrollado por Niklaus Wirth.

1983 Ada ANSI/MILSTD 1815A.

1986 C++, Bjarne Stroustrup añadió en los laboratorios Bell de ATT características de orientación a objetos al lenguaje imperativo C.

1991 FORTRAN 90, ISO/IEC- 1953.

Los lenguajes de programación más importantes desde el punto de vista del software matemático

Prácticamente todos los lenguajes de programación incorporan elementos que los hacen susceptibles para ser utilizados en la implementación computacional de algoritmos matemáticos. No obstante, entre los lenguajes existen diferencias que afectan fundamentalmente a la cercanía notacional con respecto a las matemáticas, a la eficiencia con que ejecutan las implementaciones o a las herramientas de desarrollo que acompañan al lenguaje, desde librerías de funciones hasta editores sensibles al lenguaje. Esto ha hecho que no todos los lenguajes se hayan usado con la misma frecuencia en este ámbito, como lo demuestra la comparación, del que quizás es el caso más obvio, entre Fortran y Cobol.

Prácticamente todos los lenguajes de programación incorporan elementos que los hacen susceptibles para ser utilizados en la implementación computacional de algoritmos matemáticos.

Entre los lenguajes que se encontrarían en un primer escalafón en importancia con respecto al software matemático se podrían incluir Fortran, Lisp y C. A un segundo nivel se puede destacar también el uso extendido de Pascal, Ada, Modula, etc. Por motivos obvios de extensión centraremos nuestro estudio en los tres primeros.

FORTRAN

Se trata del lenguaje de alto nivel más antiguo, ideado inicialmente por John Backus en IBM, y concebido específicamente para el desarrollo de aplicaciones propias de la ciencia y la ingeniería. Es interesante notar que ante las alternativas que suponía el código máquina y el código ensamblador, el grupo dirigido por Backus se preocupará por obtener una sintaxis bastante cercana a la notación matemática usualmente empleada, de ahí el origen del término FORTRAN: **FOR**mula **TRAN**slations. A través de su dilatada historia, que se ha reflejado en la aparición de distintas normalizaciones: Fortran 66, Fortran 77 y el reciente Fortran 90, Fortran se ha convertido quizás en el lenguaje más usado para computación científica, existiendo realmente una cantidad ingente de material ya implementado en este lenguaje.

Desde un punto de vista más técnico, Fortran es un claro representante de la orientación procedimental, a la que contribuyó de una forma especial incorporando, entre otras, las siguientes nociones:

- Las variables y las sentencias de asignación.
- Los tipos de datos.
- La modularidad, a través del uso de subprogramas.
- Formateo de las entradas y las salidas.

Entre las características incorporadas por el nuevo estándar, Fortran 90, merecen destacarse las siguientes:

- Almacenamiento dinámico.
- Un formato fuente que abandona las características de las tarjetas para adecuarse más al uso de terminales.

- Tratamiento de arrays.
- Punteros.
- El usuario puede definir tipos de datos compuestos a partir de otras estructuras de datos, y puede también definir operaciones sobre las nuevas estructuras.
- Procedimientos recursivos.
- Argumentos opcionales en la llamada a procedimientos. Etc.

C

Ideado inicialmente por Dennis Ritchie a principios de los setenta en los laboratorios Bell, es un lenguaje que, aún a pesar de estar dentro de la metodología procedimental a la que también pertenece Fortran, representa no obstante, lo que podría denominarse una segunda corriente caracterizada por la idea de sistemas abiertos, portabilidad y gran eficiencia. Las ventajas que suponen estas características se han visto corroboradas por la creciente popularidad de C y UNIX.

Entre las características más destacables del lenguaje merecen citarse:

- El énfasis que pone para conseguir una gran generalidad y economía de las expresiones.
- El incluir un potente conjunto de estructuras de control y operaciones de manipulación.
- El permitir al programador un control, a bajo nivel, del sistema, llegando incluso hasta manipulaciones a nivel de bit, etc.
- Los operadores y la aritmética de punteros le permiten al usuario acceder a las facilidades más básicas, y también más eficientes, de la máquina, convirtiéndose en un lenguaje muy adecuado para el diseño de programas del sistema o programas en los que los recursos (tiempo y memoria fundamentalmente) pasan a ser un criterio clave.
- En general, la filosofía de C consiste en darle al programador todo el control posible sobre la ejecución del programa.

El caso de LISP es históricamente similar al de Fortran.

Estas características han hecho que C se convierta en un importante foco de interés para la implementación de software matemático, donde los problemas no son triviales y hay que aumentar tanto como sea posible la eficiencia de los algoritmos, aprovechando las características de procesamiento a bajo nivel, sin perder de vista en ningún caso la necesidad de portabilidad que representa la filosofía de los sistemas abiertos.

LISP

El caso de LISP es históricamente similar al de Fortran. Se trata también de uno de los primeros lenguajes de alto nivel, diseñado en 1960 por John McCarthy, y cuya historia se ha dilatado hasta la actualidad, habiendo influido en el desarrollo de otros lenguajes y entornos, aunque Lisp como tal nunca haya sido estandarizado.

La metodología de diseño y la orientación básica de Lisp hacen que difiera bastante de Fortran o C. Lisp no es un lenguaje con pretensiones numéricas ni posee una filosofía orientada a la ejecución procedimental que lo hagan cercano o cómodo para la traducción de algoritmos matemáticos concebidos secuencialmente. Por contra, Lisp representa el interés por la computación simbólica.

La estructura básica de Lisp, y de la que ha tomado su nombre, es la lista (LISP = **LIS**t **P**rocessing); mediante la utilización de éstas, LISP implementa la programación funcional a través de la invocación de funciones y su composición para la resolución de problemas complejos.

Esta equiparación entre estructuras de datos y unidades de proceso (listas y funciones) le permite al programador de Lisp utilizar la misma estructura para almacenar los datos y los programas, lo que ofrece nuevas posibilidades en el ámbito de la metaprogramación (al concebir los programas como datos que pueden ser procesados por otros programas).

Aunque Lisp, por las características mencionadas, no es un lenguaje adecuado para el procesamiento numérico, sus capacidades para el procesamiento simbólico lo han convertido en el lenguaje más frecuente en campos como la demostración automática de teoremas, el álgebra o la geometría computacional, la derivación e integración simbólicas, etc.

Resumen

El objetivo del artículo ha sido el análisis de los lenguajes de programación en su relación con el software matemático. Para ello se llevó a cabo una discusión inicial acerca de lo que se entenderá como software matemático, para pasar a continuación a un estudio de los lenguajes de programación. Este estudio se ha estructurado a través de una clasificación de las cuatro metodologías básicas de programación, que son la procedimental o imperativa, la orientación lógica, la programación funcional y la orientación a objetos. Asimismo se ha presentado una estructuración histórica de las principales generaciones de los lenguajes y los hitos más significativos y representativos de la historia de éstos.

Por último se han analizado los tres lenguajes de programación cuya utilización es más común desde el ámbito del software matemático.

José F. Quesada
C.I.C.A.
Sevilla

Bibliografía

BATE, J. J y D. B. VADINA (1987): *Fourth Generation Languages*, London, BSP Professional Books.

DERSHEM, H. L. y M. J. JIPPING (1990): *Programming Languajes: Structures and Models*, Wadsworth Publishing Company, Belmont, California.

KERNIGHAM, B. W y D. M. RITCHIE (1978, 1ª ed): *The C programming language*, Prentice Hall Software Series. (Existe traducción al expañol).

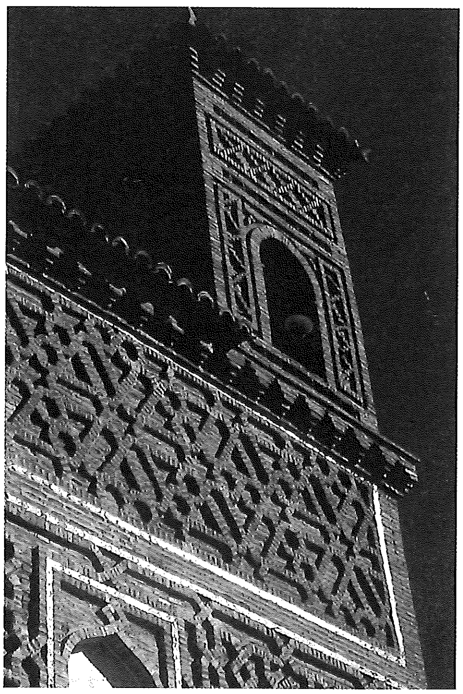
METCALF, M. y J. REID (1993): *Fortran 90 Explained*, Oxford University Press, Oxford.

MUELLER, R. A. y R. L. PAGE (1988): *Symbolic Computing with Lisp and Prolog*, John Wiley & Sons, Inc.

STEELE, G. L. (1990): *Common Lisp*, Digital Press.

STROUSTRUP, B. (1986): *The C++ programming language*, Addison Wesley Publishing Company.

WINBLAND, A. L; S. D. EDWARS y D. R. KING (1993): *Software orientado a objetos*, Addison-Wesley-Diaz de Santos.



Geometría mudéjar
Iglesia de Tobed (Zaragoza).
Siglo XIV
(Fotos: F. Villarroya)

SUMA 22
junio 1996, pp. 43-49

Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato*

Luis Serrano Romero
Carmen Batanero Bernabeu
Juan J. Ortiz de Haro

En este trabajo presentamos un estudio de la interpretación que hacen 277 alumnos de bachillerato de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial. Como resultado proporcionamos a los profesores información sobre posibles dificultades de sus alumnos en la interpretación de estos enunciados, extendiendo los resultados de las investigaciones de Konold.

* Este trabajo ha sido financiado por los Proyectos de la DGICYT PS91-0114.1 y PR95-064.

ARTÍCULOS

Actualmente asistimos a una propuesta de cambio curricular en la enseñanza de la probabilidad en todos los niveles educativos. En los nuevos diseños curriculares, no sólo en España, sino en otros países, se sugiere iniciar esta enseñanza a una edad más temprana e introducir la probabilidad en su acepción frecuencial. La metodología recomendada está basada en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios. Por ejemplo, en los estándares del NCTM se indica que los estudiantes deben explorar, mediante situaciones de y forma activa, los modelos de probabilidad. A través de la experimentación y la simulación, los estudiantes deben formular hipótesis, comprobar conjeturas y depurar sus teorías sobre la base de la nueva información. Se supone que esta metodología ayudará a superar las dificultades y obstáculos que, sobre el desarrollo de la intuición estocástica, han descrito distintos autores, como Fischbein y Gazit (1984), Fischbein y cols. (1991), Kahneman y cols. (1982) y Shaughnessy (1992).

Sin embargo, este enfoque de la enseñanza pudiera no ser tan simple como parece. En Serrano (1993) y Serrano y Batanero (1994) se sugieren, como posibles fuentes de obstáculos al aprendizaje, la heurística de la representatividad (Kahneman y cols., 1982), el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y la interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial.

En este trabajo realizamos un estudio descriptivo de las dificultades que tienen los alumnos sobre este último aspecto, esto es, para interpretar enunciados de probabilidad, desde el punto de vista frecuencial, partiendo de las investigaciones de Konold (1989, 1991) y Konold y cols. (1993). La muestra ha consistido en 147 alumnos de primer curso de bachillerato y 130 estudiantes del Curso de Orientación Universitaria. Nuestros resultados ponen de manifiesto que una proporción importante de alumnos presentan estas dificultades. Esperamos que estos resultados sean tenidos en cuenta por los profesores para detectar los estudiantes que tienen estos problemas y seleccionar actividades tendentes a su superación. Los ítems que presentamos podrían también ser empleados con finalidad diagnóstica en la enseñanza de la probabilidad.

Investigaciones sobre la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista frecuencial

Como se expone en Godino y cols. (1987), aunque axiomáticamente se admite una única definición del término «probabilidad», desde el punto de vista de la asignación inicial de probabilidades a los sucesos, existe una pluralidad de puntos de vista. Entre ellos se incluyen los enfoques clásico, frecuencial, lógico y subjetivo. La interpretación frecuencial de la probabilidad o «probabilidad empírica» se restringe a fenómenos en los cuales es posible repetir indefinidamente ensayos «idénticos». Bajo este punto de vista se considera que la probabilidad se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diferentes resultados en pruebas repetidas.

Aunque esta interpretación se considera dentro de las corrientes objetivas, no significa que esté libre de consideraciones de tipo subjetivo. Por el contrario, requiere que el sujeto acepte que los resultados de una larga serie de experimentos puedan ser considerados idénticos, para el fin de acumular la frecuencia de aparición de cada suceso particular. Por ejemplo, el hecho de que todos los lanzamientos que hacemos con una misma moneda puedan ser considerados idénticos es, hasta cierto punto, subjetivo, ya que la persona que las lanza, puede introducir sesgos en algunos de los lanzamientos.

Konold ha investigado la comprensión, por parte de estudiantes universitarios, de enunciados de probabilidad en que la asignación de probabilidades es de tipo frecuencial. En sus trabajos se interesó por el modo en que los alumnos interpretan las preguntas sobre la probabilidad o el valor de una probabilidad. En Konold (1989) se describe la dificultad que tienen algunos estudiantes para interpretar la repetición de un experimento aleatorio como parte de una serie de ensayos. Los sujetos que muestran esta dificultad consideran que cada una de las repeticiones del experimento está aislada; no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores. Denomina a esta conducta *outome approach* (enfoque en un solo resultado).

Konold (1991), como resultado de sus entrevistas a estudiantes universitarios, llegó a la conclusión de que estos interpretaban una pregunta sobre la probabilidad de forma no probabilística. Cuando se pide explícitamente calcular la probabilidad de un suceso se interpreta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en el siguiente experimento. Al interpretar una predicción meteorológica en la que se dan unas probabilidades de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día en cuestión no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Si llueve un 70% de días para los que se pronosticó un 70% de probabilidades de lluvia, pensarán que el meteorólogo es poco fiable.

...aunque axiomáticamente se admite una única definición del término «probabilidad», desde el punto de vista de la asignación inicial de probabilidades a los sucesos, existe una pluralidad de puntos de vista.

Sin embargo, son este tipo de situaciones sobre problemas reales los que se recomienda en los estándares del NCTM (1991) para el estudio de la probabilidad. «Estas investigaciones deben incorporar diversos problemas reales a partir de preguntas sobre acontecimientos deportivos o sobre si va a llover el día de la excursión del colegio» (p. 111).

Este tipo de sujetos evalúa las probabilidades comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si la probabilidad de un suceso dado se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se considerará como imposible o seguro, respectivamente. Sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio. Los estudiantes que muestran este tipo de comportamiento, tienden a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios. Por ejemplo, la frase «70% de posibilidades de lluvia» se interpreta como «70% de superficie cubierta por las nubes» o «70% de humedad relativa». Asimismo se ignora la información de tipo frecuencial, prefiriendo basar los juicios en consideraciones subjetivas sobre el fenómeno en cuestión. En consecuencia, construyen teorías sobre el suceso que está bajo estudio, que les resultan útiles no sólo como base para la predicción, sino también para la explicación de resultados inesperados.

Objetivos de la investigación y descripción del cuestionario

El estudio ha sido realizado sobre una muestra de 277 alumnos, 130 de ellos de primer curso de bachillerato y el resto del COU de las distintas especialidades. La muestra incluía aproximadamente igual número de varones y mujeres y alumnos de diversos centros de bachillerato de la ciudad de Melilla. El motivo para elegir estos dos grupos es analizar los posibles cambios en las concepciones de los alumno y alumnas a lo largo de sus estudios de bachillerato, así como su mayor maduración psicológica.

Los ítems que analizamos evalúan la interpretación que hacen los alumnos de los enunciados frecuenciales de probabilidad. El primero, que se presenta a continuación, ha sido tomado del test de Garfield (1991). Recoge la pregunta típica que Konold (1991) usó en su investigación, aunque esta fue llevada a cabo por medio de entrevistas.

Item 1

a) El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular.

Elige la opción que crees es la más apropiada:

La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

a) Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días
b) Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días
c) Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días
*d) Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días
e) Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días
f) No sabe, no contesta.

b) Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Qué conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de probabilidades de lluvia?

Los ítems que analizamos evalúan la interpretación que hacen los alumnos de los enunciados frecuenciales de probabilidad.

En una interpretación normativa de la probabilidad, la opción correcta al primer apartado del ítem es la *d*. Sin embargo, los sujetos que presentan el «outcome approach» elegirán típicamente una de las respuestas *a* a *c*, según los resultados de Konold. La segunda parte del ítem ha sido también tomada de las investigaciones de Garfield (1991) y Konold (1991). Se trata de confrontar a los alumnos con una situación no prevista, para ver si mantienen un argumento coherente con la opción elegida en la primera parte.

El segundo ítem ha sido construido para esta investigación. Aunque el enunciado de este ítem es bastante similar al anterior, el contexto es mucho más familiar al alumno. Además, la información frecuencial se da en términos del tanto por ciento de hamsters que prefiere un alimento, en lugar de usar el término más técnico de posibilidades o probabilidades.

Item 2

Al inicio de un camino que conduce a dos posibles orificios A y B se coloca un hamster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos pipas y en el B cacahuetes. Según un amigo mío que ha criado muchos hamsters, el 70 de cada 100 hamsters prefieren las pipas a los cacahuetes.

a) Si hacemos la prueba con un hamster y este se dirige hacia B ¿piensas que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?
b) Si hacemos la prueba con 10 hamsters y 3 de ellos se dirigen a B (eligen los cacahuetes) ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

Resultados y discusión

Una vez recogidos los datos se analizaron no sólo las opciones elegidas en los ítems, sino también los argumentos proporcionados por los alumnos, para lo cual se llegó a un sistema de categorías, mediante un proceso de análisis y refinamiento sucesivo. Con las categorías obtenidas se elaboraron tablas de frecuencias clasificadas según el grupo del alumno. A estas tablas se aplicó el test Chi cuadrado, agrupando las frecuencias de categorías similares cuando la frecuencia esperada en alguna de las celdas era menor que 5.

Las respuestas elegidas por los alumnos al primer ítem se incluyen en la tabla 1. La comprensión de la probabilidad frecuencial en esta pregunta parece razonable, ya que la mayor parte de los alumnos ha elegido los valores próximos al 70 por ciento (opción *d,* que ha sido elegida por el 43%). Sin embargo, una proporción bastante notable de alumnos eligen opciones sesgadas, especialmente las opciones *a* y *b* que indican que la frecuencia esperada de lluvia se sitúa por encima del 85 por ciento.

Respuesta	Alumnos de 14 años		Alumnos de 18 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a	17	11,6	14	10,8	31	11,2
b	19	12,9	8	6,2	27	9,7
c	32	21,8	20	15,4	52	18,8
d (*)	51	34,7	68	52,3	119	43,0
e	28	19,0	18	13,8	46	16,6
Blanco	0	0,0	2	1,5	2	0,7
Total	147		130		277	

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas al ítem 1.a

Estos alumnos no relacionarían la probabilidad teórica con la frecuencia esperada de días de lluvia, sobreestimando la frecuencia esperada, debido a que la probabilidad que se da de lluvia es alta. Al comparar los dos grupos, observamos que la interpretación correcta ha mejorado con la edad. Mientras que el 34,7% de alumnos de 14 años da la respuesta correcta y el 24,5% una estimación por encima del 85 por ciento para la frecuencia relativa esperada, en los alumnos de 18 años estos porcentajes son el 52,3% y 17% respectivamente. La significación estadística de estas diferencias ha sido probada mediante el contraste Chi cuadrado de homogeneidad de muestras, obteniéndose un valor χ^2=10,881 con 4 g.l. (p=0,0279). Sin embargo, es importante aún el número de alumnos de 18 años que interpretan incorrectamente un enunciado frecuencial de probabilidad.

Los argumentos dados en la segunda parte del ítem han sido clasificados según el siguiente esquema:

a) *Cae dentro del 30 % de probabilidades.* Recogemos en este argumento el caso de los alumnos que piensan que el pronóstico del hombre del tiempo era correcto, pero, debido al 30% de posibilidades en contra de la lluvia, el suceso que ha ocurrido cae dentro de estas posibilidades: «Pues que, como existía un 30% de posibilidades de que no llovería, se ha cumplido».

b) *Explicación de tipo causal.* Estos alumnos creen que debiera llover y buscan una explicación de tipo causal al fallo en su predicción: «Que lo más seguro es que llueva todavía». «Que hubo viento y se llevó las nubes». Hay que tener en cuenta que un enfoque probabilístico formal no niega necesariamente la existencia de mecanismos causales subyacentes (Batanero y Serrano, 1995). Venn (1962) analizó este punto, indicando que el cálculo de probabilidades adopta una posición por la cual se ignoran los posibles mecanismos causales, centrándose en las regularidades que ocurren en una serie de ensayos independientes de estos posibles agentes.

Sin embargo, en el outcome approach se intenta alcanzar la predicción a partir del análisis de posibles esquemas causales. Puesto que, para estos sujetos, 70% se interpreta como seguridad, la no coincidencia debe deducirse del análisis de los factores (causas) que la producen, más que de los datos de las frecuencias.

c) *Se equivocó, debería llover el 100% de los días.* Como en el caso anterior, los sujetos manifiestan una interpretación incorrecta de la probabilidad frecuencial, llegando al punto de pensar que el pronóstico era equivocado: «Que sus cálculos están mal hechos, pues habiendo calculado que hay mayores posibilidades de lluvia, después no llueve. Demuestra que se equivocó». Los sujetos traducen los enunciados «70% de posibilidades de lluvia» a otro más cualitativo «va a llover». Los valores de probabilidad son convertidos a una escala con tres puntos, 0%, 50%, 100%, de acuerdo con criterios subjetivos de proximidad. Por ello, 70% se asimila a la ocurrencia, esto es al 100%.

d) *Imposible sacar conclusiones.* Son los sujetos que creen que el carácter aleatorio del experimento lo hace imposible de controlar o predecir, ni siquiera en términos de probabilidades. Explican el fallo en su predicción por el carácter aleatorio del experimento: «el tiempo es impredecible». Serían los sujetos que subjetivamente han asimilado los datos al caso del 50% de ocurrencia, pensando que no puede darse ningún tipo de predicción.

[hay] sujetos que creen que el carácter aleatorio del experimento lo hace imposible de controlar o predecir, ni siquiera en términos de probabilidades. Explican el fallo en su predicción por el carácter aleatorio del experimento...

Contrasta el resultado de la segunda parte del ítem (tabla 2) con el de la primera. La mayor parte (44,4%) elige la opción *c* en la que se especifica que hubo un error por parte del meteorólogo. Esta es una respuesta típica que Konold ha encontrado en los sujetos que presentan el sesgo del «outcome approach». Konold denomina característica del «ensayo simple» a la tendencia a concentrarse en el resultado de un sólo experimento. Esta tendencia contrasta con la aproximación frecuencial, en la que el objetivo se concentra en una muestra de ensayos. Mientras que en el ensayo simple el objetivo es predecir un resultado y, por tanto, un proceso de decisión, en el enfoque frecuencial el objetivo es predecir el promedio en una muestra. Es decir, la estimación de la frecuencia de ocurrencia de un resultado particular en una serie larga de ensayos.

Otros sujetos (18,4%, respuesta *d*) creen que es imposible sacar conclusiones sobre el hecho planteado. Finalmente un grupo importante de alumnos (27,8%, respuesta *a)* hace una interpretación correcta de la probabilidad frecuencial, alegando que el hombre del tiempo podría estar dentro del 30% de posibilidades de que no lloviese. Como hemos indicado, este porcentaje es inferior al que dio la respuesta correcta.

Al comparar los dos grupos de alumnos, vemos de nuevo la mejora con la edad, especialmente si comparamos los porcentajes de respuestas a las opciones *a* y *c*. La diferencia fue significativa (χ^2 = 11,407 con 3 g.l. p < 0,001). Asimismo se observó la consistencia entre respuesta y argumento, ya que el argumento correcto fue elegido mayoritariamente por los alumnos que eligieron la respuesta correcta. Ello confirma nuestra interpretación de los resultados en el primer apartado del ítem, pues los argumentos *c* y *d* predominan entre los alumnos que predijeron una alta frecuencia de días de lluvia.

Las respuestas al ítem 2a se presentan en la tabla 3. En total 20 alumnos creen que había una equivocación en las frecuencias dadas. En definitiva se está razonando aplicando el «outcome approach». Hay una mayoría de alumnos, sin embargo, que dan una respuesta correcta y la proporción aumenta con la edad de los alumnos. Las diferencias entre los dos grupos fueron estadísticamente significativas. χ^2=8,39 (con corrección de continuidad) con 1 g.l. (p=0,001). Los argumentos en este ítem fueron clasificados con los mismos criterios que en el caso anterior, y se presentan en la tabla 4.

Otros sujetos creen que es imposible sacar conclusiones sobre el hecho planteado.

Argumentos	Alumnos de 14 años		Alumnos de 18 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a	29	19,7	48	36,9	77	27,8
b	5	3,4	1	0,8	6	2,2
c	74	50,3	49	37,7	123	44,4
d	27	18,4	24	18,5	51	18,4
Blanco	12	8,2	8	6,2	20	7,2
Total	147		130		277	

Tabla 2: Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 1 b)

Respuesta	Alumnos de 14 años		Alumnos de 18 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
Sí	16	10,9	4	3,1	20	7,2
No	127	86,4	126	96,9	253	91,4
Blanco	4	2,7	0	0,0	4	1,4
Total	147		130		277	

Tabla 3: Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 2.a

Hay una mayoría de alumnos, sin embargo, que dan una respuesta correcta y la proporción aumenta con la edad de los alumnos.

Argumentos	Alumnos de 14 años		Alumnos de 18 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a (*)	40	27,2	71	54,6	111	40,1
b	10	6,8	3	2,3	13	4,7
c	55	37,4	33	25,4	88	31,8
d	5	3,4	8	6,2	13	4,7
Blanco	37	25,2	15	11,5	52	18,8
Total	147		130		277	

Tabla 4. Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 2.a

Vemos que un porcentaje apreciable de alumnos (40,1%) da el argumento correcto basándose en que una probabilidad del 30 por ciento implica que el suceso puede ocurrir y no sería demasiado raro. Sin embargo este porcentaje es mucho menor que el que da la respuesta correcta, lo que señala la conveniencia de analizar los argumentos de los alumnos. También aparecen aquí de nuevo los casos en que los alumnos emplean sus teorías previas sin guiarse por los datos objetivos (respuesta b). Otro grupo amplio de alumnos aplica el «outcome approach» (respuesta *c*, 31,8%) o cree que, al ser el suceso aleatorio, podría ocurrir cualquier cosa, independientemente de las probabilidades (respuesta *d)*. Una parte de las respuestas correctas se eligen por razón incorrecta.

Al comparar los dos grupos de alumnos vemos una diferencia muy notable entre las proporciones de respuesta *c* que es correcta y *d* que es incorrecta, siendo la primera superior al 50% en los alumnos de 18 años. Es también mayor el número de alumnos de 14 años que no da argumento. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2 = 23,523 con 3 g.l., p = 0,00003).

La opción mayoritaria en el apartado *b* del ítem 2 es que no, correcta, aumentando con la edad. Las diferencias fueron estadísticamente significativas a favor de los alumnos de 18 años (χ^2 = 5,541 (corrección de continuidad) con 1 g.l., p < 0,0186). Además de los argumentos ya comentados, aparecieron los dos siguientes:

e) *Se mantiene la proporción.* La respuesta se basa en el parecido de la proporción muestral y la poblacional. Aunque la respuesta puede tener encubierto en empleo de la heurística de la representatividad, la consideramos correcta, porque no tenemos datos para discriminar el uso de esta heurística: «El resultado, aunque parece casual, ha sido igual que el predicho».

f) *Hay pocos hamsters.* El tamaño de la muestra no permite obtener conclusiones: «Hay pocos datos».

La mayor parte de los alumnos han elegido las opciones correctas *e* y *a;* es decir, se basan en que el caso se ajusta exactamente a las probabilidades teóricas. Los sujetos que eligen *b* y *d* creen que el suceso es impredecible o buscan explicaciones causales. Las diferencias fueron de nuevo significativas (χ^2 = 14,804 con 4 g.l. p = 0,005). Los alumnos de 18 años eligen en mayor proporción las respuestas correctas, mientras que los de 14 eligen las incorrectas en mayor medida. Sólo el 59,6 % de alumnos da un argumento correcto.

Respuesta	Alumnos de 14 años		Alumnos de 18 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
Sí	16	10,9	3	2,3	19	6,9
No	127	86,4	124	95,4	251	90,6
Blanco	4	2,7	3	2,3	7	2,5
Total	147		130		277	

Tabla 5. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 2.b

Argumentos	Alumnos de 14 años		Alumnos de 18 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a (*)	9	6,1	20	15,4	29	10,5
b	26	17,7	9	6,9	35	12,6
c	2	1,4	2	1,5	4	1,4
d	35	23,8	20	15,4	55	19,9
e (*)	66	44,9	70	53,8	136	49,1
f	9	6,1	9	6,9	18	6,5
Total	147		130		277	

Tabla 6. Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 2.b

En resumen, podemos concluir que un grupo importante de alumnos manifiesta dificultades en la interpretación frecuencial de una probabilidad.

Conclusiones

En resumen, podemos concluir que un grupo importante de alumnos manifiesta dificultades en la interpretación frecuencial de una probabilidad. Esto se ha notado especialmente en el ítem 1, aunque el contexto más familiar del ítem 2 ha facilitado su interpretación por parte de los alumnos.

Aunque la opción elegida en los ítems (en especial en los apartados del ítem 2) ha sido con frecuencia correcta, los argumentos en que se apoya la elección no son siempre normativos. Entre los argumentos incorrectos que hemos encontrado con mayor frecuencia destacamos los siguientes:

a) Creencia en que ha habido un error en los datos del problema y en la equivalencia entre alta probabilidad y seguridad en la ocurrencia del suceso.

b) Búsqueda de razones de tipo causal para explicar un suceso no esperado.

c) Justificar los resultados por la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, sin tener en cuenta la probabilidad de los sucesos.

Podríamos pensar que el «outcome approach» sería semejante a una asignación subjetiva de probabilidades, pues en ambos casos hay un grado de creencia implicado. Sin embargo, un enfoque subjetivo no llevaría a un proceso de decisión ocurrencia/no ocurrencia, como se muestra en los argumentos de los alumnos. Los modelos probabilísticos no se centran sobre la predicción y control de sucesos particulares, sino en las tendencias en muestras de suficiente tamaño.

Todos estos resultados suponen la necesidad de un diseño cuidadoso de las situaciones de enseñanza, para tener en cuenta estos tipos de problemas y ayudar a los alumnos a construir prácticas significativas para su resolución. Como indica Konold (1995), no es suficiente pedir a los alumnos que hagan predicciones y las comparen con los datos experimentales para cambiar sus concepciones incorrectas, porque raramente se recogen suficiente datos para revelar los patrones probabilísticos. Además la atención de los alumnos es limitada y la variabilidad del muestreo se suele ignorar. Por nuestra parte, en Godino y cols. (1987) y Shaughnessy y Batanero (1995) sugerimos algunos ejemplos de como llevar a cabo esta enseñanza.

Todos estos resultados suponen la necesidad de un diseño cuidadoso de las situaciones de enseñanza, para tener en cuenta estos tipos de problemas y ayudar a los alumnos a construir prácticas significativas para su resolución.

Luis Serrano
Juan Jesús Ortiz
Escuela de Formación del Profesorado. Melilla
Carmen Batanero
Facultad de Educación
Universidad de Granada

Referencias bibliográficas

BATANERO, C. y L. SERRANO (1995): «La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas», *UNO*, 5, 15-28.

GARFIELD, J. (1991): «Evaluating students' understanding of statistics: development of the statistical reasoning assesment», en R. UNDERHILL (Ed.): *Proceedings of the XIII PME-NA*, v. 2, Blacksburg, Va, 1-7

GODINO, J., C. BATANERO y M. J. CAÑIZARES (1987): *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*, Síntesis, Madrid.

FISCHBEIN, E. y A. GAZIT (1984): «Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?», *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 1-24.

FISCHBEIN, E., M. SAINATI y M. SCIOLIS (1991): «Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents», *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

LECOUTRE, M. P. (1992): «Cognitive models and problems space in "purely random" situations», *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

KAHNEMAN, D., P. SLOVIC y A. TVERSKY (1982): *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge University Press, Cambridge.

KONOLD, C. (1989): «Informal conceptions of probability», *Cognition and Instruction*, 6. 59-98.

KONOLD, C. (1991): «Understanding students' beliefs about probability», en E. von GLASERSFELD (Ed.): *Radical constructivism in Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, 139-156.

KONOLD, C. (1995): «Confessions of a coin flipper and would-be instructor», *The American Statistician*, 49 (2), 203-209.

KONOLD, C. y otros (1993): «Inconsistencies in students reasoning about probability», *Journal for Research in Mathematics education*, 5, 392-414.

MOORE, D. S. (1995): *The basic practice of statistics*, Freeman, New York.

M.E.C. (1992): *Educación Primaria. Área de Matemáticas,* MEC, Madrid.

N.C.T.M. (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, SAEM Thales, Sevilla. (Traducción de N.C.T.M. (1989): *Curriculum and Evalution Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, Va).

SERRANO, L. (1993): *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: un estudio de concepciones iniciales*, Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada.

SERRANO, L. y C. BATANERO (1994): «Concepciones sobre la convergencia estocástica y heurística de representatividad en una situación de simulación», *Actas de las V Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas*, Universidad de Badajoz, 571-574.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992): «Research in probability and Statistics: reflections and directions», en D. A. GROWS (Ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Mc Millan, New York.

SHAUGHNESSY, J. M. y C. BATANERO (1995): «Un enfoque visual para enseñar las probabilidades binomiales», *UNO*, 5, 103-112.

VENN, J. (1962): *The logic of chance*, Mac Millan, London. (Edición original de 1988).

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

XII Cursos sobre Aspectos Didácticos en la Enseñanza Secundaria

MATEMÁTICAS

Zaragoza, 12, 13 y 14 de septiembre de 1996

- *La gestión de la clase de Matemáticas*
  Marta BERINI LÓPEZ-LARA. IB Joan Martorell, Barcelona
- *Enseñanza y aprendizaje de las derivadas*
  Carmen AZCÁRATE GIMÉNEZ. Universidad Autónoma de Barcelona
- *De la geometría del área a la construcción del infinito*
  F. Javier MURIEL DURÁN. IB Norba Caesarina, Cáceres
- *Cómo generar problemas*
  Carlos USÓN VILLALBA y Ángel RAMÍREZ MARTÍNEZ. IB Quintiliano, Calahorra (La Rioja)
- *Una apuesta por la globalidad*
  Luis PÉREZ BERNAL, IB E. Prados, Málaga

Coordinador: Emilio PALACIÁN GIL
Secretaria: M. Pilar SANGRÓS MANERO

Curso homologado por el MEC: 20 horas (2 créditos de formación)
Fecha límite de inscripción: 6 de septiembre de 1996
Importe: 3.500 pta (incluidas actas)

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

XII CURSOS SOBRE ASPECTOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA. **MATEMÁTICAS**

Nombre: .... DNI ....

Dirección: ....

Población: .... CP: .... Provincia: ....

Inscripción: 3.500 pta (actas incluidas). ☐ En metálico ☐ Giro postal N.° ....

Remitir a:
Instituto de Ciencias de la Educación. C/. Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761494. Fax: (976) 761345

SUMA 22
junio 1996, pp. 51-57

Esquemas cognitivos. Algunos ejemplos de su aplicación a las matemáticas

Vicenç Font Moll

ARTÍCULOS

En la primera parte de este artículo se hace una breve introducción a la teoría de los esquemas. La segunda parte son dos ejemplos aplicados a las matemáticas en los que se analizan las implicaciones que tiene para la enseñanza de nuevos conceptos el hecho de considerarlos integrados en esquemas.

El marco de referencia del Diseño Curricular de la reforma educativa de la Generalitat de Catalunya es un conjunto de teorías y explicaciones que si bien mantienen entre sí, discrepancias importantes en numerosos puntos, participan de una serie de principios comunes o, al menos, no contradictorios. Este marco de referencia está delimitado por lo que podemos denominar enfoques cognitivos en un sentido amplio: a) la teoría genética de J. Piaget y de sus colaboradores de la Escuela de Ginebra, b) la teoría de la actividad en las formulaciones de Vygotsky, Luria, Leontiev, y en sus desarrollos posteriores (Wertsch, Forman, Cazden, etc.), c) la teoría del aprendizaje verbal significativo de D. Ausubel y su prolongación en la teoría de la asimilación de R. E. Mayer, d) la teoría del procesamiento de la información (teoría de los esquemas) y e) la teoría de la elaboración de M. A. Merril y Ch. M. Reigeluth. A partir de estos enfoques se ha formulado la propuesta constructivista que inspira la actual reforma educativa de la enseñanza no universitaria (Coll, 1989, p. 17).

Conocimiento organizado. Redes semánticas y esquemas

El marco curricular considera la estructura cognitiva del alumno como un conjunto de esquemas, los cuales son modificados de acuerdo con la teoría de la equilibración de Piaget. La teoría de los esquemas está inspirada en el programa de investigación que en psicología recibe el nombre de «procesamiento de la información». Dicho programa se basa en la aceptación de la analogía entre el funcionamiento de la mente humana y el funcionamiento de un computador[1], y se ha centrado, fundamentalmente, en el estudio de la memoria. Concretamente, analiza cómo se organiza nuestra representación de la información (el pensamiento proposicional y simbólico) en la memoria. Para hacer este estudio se han propuesto dos representaciones hipotéticas de nuestra manera de organizar en la memoria la representación de nuestro conocimiento: las redes semánticas y la teoría de los esquemas.

Las redes semánticas

Las redes semánticas[2] son representaciones hipotéticas de nuestras estructuras de conocimiento que permiten explicar las reglas de uso de los conceptos y las relaciones entre ellas. Por eso son útiles para estudiar a la vez los procedimientos y sus principios subyacentes. Los nódulos y las relaciones son las partes fundamentales de la red, la cual puede contener muchas afirmaciones, cada una de ellas en la forma nódulo-relación-nódulo. Como ejemplo de la aplicación de las redes semánticas a las matemáticas reproducimos a continuación dos posibles redes de conocimiento sobre la multiplicación y la división (Resnick, 1990, pp. 238-240).

[...] En la figura 7.2 se presenta un par de estructuras posibles del conocimiento para la multiplicación y la división. [...] Según las estructuras que se ilustran en la figura, se define la multiplicación como operación de «n-veces» (xn). La operación xn tiene un objeto (la cosa sobre la que se ejecuta la operación), en este caso la cantidad (m), y un resultado, la cantidad (mn). La división también se define como operación, ÷n; y esta operación también tiene objeto y resultado. La figura representa la estructura de conocimiento de alguien que conoce la multiplicación y la división, pero que no comprende su relación inversa. Las estructuras de multiplicación y de división no están unidas.

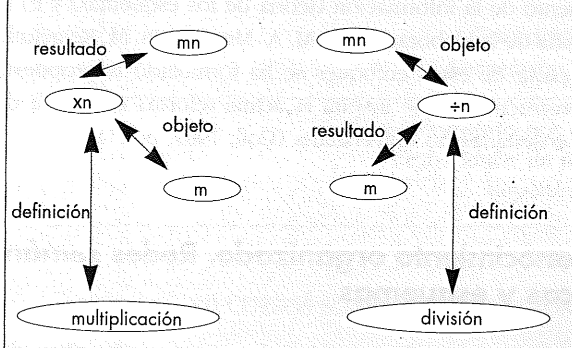


FIG. 7.2. Posibles estructuras de conocimiento sobre la multiplicación y la división. Su separación pone de manifiesto la falta de comprensión de la relación inversa que existe entre ambas operaciones.

Para comprender que la multiplicación y la división son operaciones inversas la una de la otra, hay que reconocer que existe una relación especial entre las cantidades objeto y las cantidades resultado de ambas operaciones. Concretamente, si una persona multiplica una cantidad por algún número (llamémosle n) y luego divide el resultado por el mismo número (n), entonces llega a la misma cantidad original. Esta comprensión se ilustra en la figura 7.3, en la que la cantidad resultado de una operación se representa como cantidad objeto de la otra. Ahora las estructuras de conocimiento de la multiplicación y de la división están unidas, y la estructura total se simplifica con dicha unión. [...]

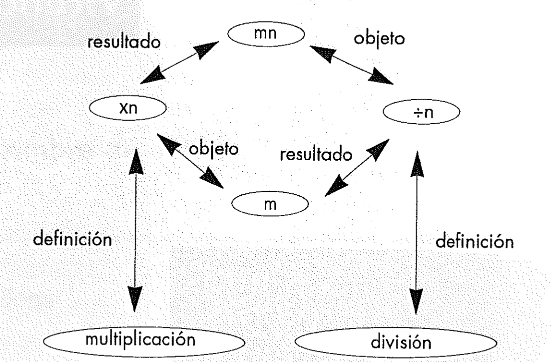


FIG. 7.3. Estructura del conocimiento que pone de manifiesto la comprensión de la relación inversa entre la multiplicación y la división. Esto supone una unión y simplificación de las estructuras de la figura 7.2.

Desde esta perspectiva, el objetivo que debe perseguir la enseñanza de nuevos contenidos del currículum debe ser conseguir que los nuevos contenidos no queden aislados, sino que se integren en un conocimiento bien estructurado del tema y en conexión con los otros conocimientos de los alumnos. Dicho objetivo lleva a la siguiente pregunta: ¿cómo podemos evaluar que el alumno ha conseguido un conocimiento bien estructurado?

Es evidente que no podemos observar directamente la estructura cognitiva de los alumnos, sino que solamente podemos inferir su grado de estructuración a partir de cómo actúan frente a situaciones tales como: resolución de problemas en los cuales haya que utilizar el conocimiento, entrevistas clínicas, elaboración de mapas conceptuales y de bases de orientación por parte del alumno, etc. Estas actuaciones deben valorarse, básicamente, a partir de tres criterios: 1) el grado de integración interna, 2) el grado de conexión que el

1 «[...] Según esta idea, el hombre y el computador son sistemas de procesamiento de propósitos generales, funcionalmente equivalentes, que intercambian información con su entorno mediante la manipulación de símbolos. Según esta concepción, tanto el ser humano como el computador son verdaderos "informívoros" [...], son sistemas cognitivos cuyo alimento es la información; y aquí la información tiene un significado matemático muy preciso de reducción de la incertidumbre». (Pozo, 1993, p. 43).

2 Una introducción a las redes semánticas se puede encontrar en Norman (1985, pp. 67-73) y un ejemplo de su aplicación al conocimiento matemático se puede encontrar en Resnick (1990, pp. 232-242).

nuevo conocimiento guarda con otros que ya sepa el alumno y 3) la correspondencia entre la manera que tiene el alumno de estructurar el conocimiento y la que el profesor tiene y le ha querido enseñar.

El siguiente ejemplo puede clarificar el primer criterio: supongamos que queremos valorar el grado de integración que tiene un alumno de las operaciones de multiplicar y dividir. Una actividad que puede servir para ello es la realización de un mapa conceptual de estas operaciones. Si en el mapa conceptual de un alumno las dos operaciones aparecen separadas y en el de otro alumno aparecen relacionadas como operaciones inversas la una de la otra, podemos inferir que el grado de integración interno del conocimiento de estas operaciones es superior en el caso del último alumno. En muchos casos el alumno puede integrar los conocimientos, pero puede hacerlo incorrectamente. Por eso, también es importante confrontar si la integración que hace el alumno se corresponde con el conocimiento que el profesor le ha querido enseñar. Si un nuevo conocimiento se conexiona con otros que ya poseía el alumno anteriormente, los vínculos que los relacionan entre sí le permitirán aplicarlo a nuevas situaciones. Por tanto, para valorar la conexión con los otros conocimientos matemáticos y generales es conveniente proponer situaciones problemáticas nuevas, en las cuales se tengan que utilizar conjuntamente las dos operaciones aritméticas y otros conocimientos anteriores.

El objetivo de conseguir un conocimiento bien estructurado, que se corresponda con la estructuración que los profesores tienen del tema, lleva a considerar que un elemento clave para evitar dificultades de aprendizaje es que su presentación por parte del profesor sea potencialmente significativa. En efecto, si los materiales que presentamos a los alumnos no son coherentes y las situaciones no están bien estructuradas, no serán potencialmente significativas con lo cual las dificultades para realizar un nuevo aprendizaje aumentan. Pero existen situaciones que ya de por sí no son potencialmente significativas: 1) cuando el profesor no tenga el conocimiento que quiere enseñar suficientemente estructurado, 2) cuando los materiales que se han escogido para introducir los nuevos contenidos, como por ejemplo los libros de texto, no sean claros y coherentes (ejercicios y problemas confusos, mal graduados, rutinarios y repetitivos, errores de edición, etcétera), 3) cuando la presentación que hace el profesor del tema sea inadecuada porque no es clara ni está bien organizada (no se le entiende cuando habla, habla demasiado rápido, la utilización de la pizarra es caótica, se olvida de explicar determinados contenidos, etc.), 4) cuando el profesor no pone suficiente énfasis en los conceptos claves del tema ni en la conexión de los nuevos contenidos con los que ya tiene el alumno, etc.

Desde la perspectiva constructivista no tiene sentido considerar los conceptos aisladamente, sino que los hemos de considerar integrados en esquemas, los cuales se conciben como paquetes de información que incluyen no sólo los conceptos sino también sus procedimientos de utilización

La teoría de los esquemas

Las redes semánticas son herramientas importantes y constituyeron el punto de partida de muchas investigaciones. Actualmente se ha pasado de las redes a unidades de conocimiento más extensas: *los esquemas.* El marco curricular considera la estructura cognitiva del alumno como un conjunto de esquemas, los cuales son modificados de acuerdo con la teoría de la equilibración de Piaget:

> *11) La estructura cognitiva del alumno, el papel central de la cual en la realización de aprendizajes significativos se ha subrayado en los puntos anteriores, puede concebirse como un conjunto de esquemas de conocimientos [...]. Los esquemas son «un conjunto organizado de conocimiento [...] pueden incluir tanto conocimiento como reglas para utilizarlo, pueden estar compuestos de referencias a otros esquemas [...] puede ser específicos [...] o generales [...]. «Los esquemas son estructuras de datos para representar conceptos genéricos almacenados en la memoria, aplicables a objetos, situaciones, sucesos, secuencias de sucesos, acciones y secuencias de acciones»* (Coll, 1989, p. 20).

Un esquema de conocimiento puede ser más o menos rico en información, estar más o menos estructurado, ser más o menos aplicable al conocimiento de la realidad, etc. Los nuevos contenidos aprendidos se almacenan en la memoria mediante su incorporación a uno o varios esquemas. Desde la perspectiva constructivista no tiene sentido considerar los conceptos aisladamente, sino que los hemos de considerar integrados en esquemas, los cuales se conciben como paquetes de información que incluyen no sólo los conceptos sino también sus procedimientos de utilización. Este hecho es la causa de que cuando hablamos de conceptos de nivel superior, como por ejemplo «proporcionalidad», sea conveniente considerarlos como el núcleo organizador del esquema y, en lugar de hablar tan sólo del concepto, referirse siempre al esquema de proporcionalidad del alumno que implica una mayor globalidad. El hecho de considerar los conceptos integrados en esquemas nos obliga a considerar que el «significado de un concepto» no depende solamente de su referente sino también del lugar que ocupa dentro del esquema y de las relaciones que lo ligan con los otros conceptos y de las relaciones de este esquema con otros. También desde esta perspectiva, más que plantearnos la formación de conceptos aisladamente, lo que nos ha de interesar es la revisión, enriquecimiento, diferenciación, construcción y coordinación progresiva de los esquemas del alumno a partir de los nuevos contenidos.

...desde esta perspectiva, [...] lo que nos ha de interesar es la revisión, enriquecimiento, diferenciación, construcción y coordinación progresiva de los esquemas del alumno a partir de los nuevos contenidos.

Ejemplos matemáticos

El hecho de considerar los conceptos como partes de un esquema (los cuales incluyen conceptos y procedimientos) tiene implicaciones importantes en el momento de plantearnos cuáles son las actividades de aprendizaje que han de desarrollar los alumnos a fin de formarse un determinado concepto. Ilustraremos la importancia de este hecho con dos ejemplos matemáticos diseñados y experimentados con alumnos de 12 años: el cuadrado entendido como una construcción geométrica y el concepto de mediatriz de un segmento.

El entorno escogido para ver como los esquemas cognitivos se ven enriquecidos por estas construcciones geométricas fue el Cabri-géomètre[3]. Este micromundo es un programa idóneo para realizar construcciones geométricas ya que las figuras se pueden construir mediante acciones y con un lenguaje muy próximo al empleado cuando se dibuja con lápiz y papel, y porque ofrece tres posibilidades que facilitan los procesos de abstracción y generalización de los alumnos. La primera es la opción macroconstrucción del menú varios, la cual permite que se puedan memorizar la serie de pasos seguidos para obtener una construcción geométrica y reproducirlos como un todo. Una macroconstrucción toma uno o más objetos iniciales y con ellos construye uno o más objetos finales. El proceso implica la construcción de otros objetos intermedios, pero éstos no se dibujan. La segunda es la opción *historia* del menú *varios* que permite reconstruir todas las acciones seguidas en una construcción geométrica. La tercera es la posibilidad que presenta de modificar sus construcciones geométricas en tiempo real.

El cuadrado entendido como una construcción geométrica[4]

A partir de la observación de los alumnos en tareas anteriores, se puede inferir que tienen un esquema, en el cual está integrado el concepto de cuadrado, que incluye conocimientos de diferentes tipos, tales como: 1) un cuadrado es la región del plano cerrada por cuatro lados iguales que forman ángulos de 90° (concepto), 2) tiene lados, diagonales, ángulos, etc. (reconoce partes de la figura), 3) tiene dos diagonales que se cortan en el punto medio, etc. (propiedades que relacionan partes de la figura), 4) un cuadrado es un polígono, etc. (relación entre conceptos), 5) sabe distinguir una figura cuadrada de una que no lo es, sabe calcular el perímetro (procedimientos), etc.

El objetivo de la secuencia de actividades que sigue es doble: por una parte pretende que el alumno generalice un método de construcción de cuadrados; y por otra, que el concepto de cuadrado que tiene el alumno quede enriquecido con la visión de que un cuadrado es el resultado de una construcción geométrica. Para ello, los alumnos realizan las acciones siguientes utilizando el Cabri-géomètre:

1) Elige la opción *punto* del menú *creación* para crear un punto.
2) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar A al punto anterior.
3) Elige la opción *punto* del menú *creación* para crear otro punto.
4) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar B al punto anterior.
5) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento AB.
6) Elige la opción *circulo def. 2 pts* del menú *creación* para crear la circunferencia de centro A y radio AB.
7) Elige la opción *recta perpendicular* del menú *construcción* para crear la recta perpendicular al segmento AB que pasa por A.
8) Elige la opción *intersección de dos objetos* del menú *construcción* para crear los dos puntos de intersección de la recta anterior con la circunferencia de centro A y radio AB.
9) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar D a uno de los dos puntos anteriores. Elige la opción *aspecto de los objetos* del menú *edición* para borrar el otro punto.

3 El Cabri-géomètre (de CAhier BRouillon Interactif pour l'aprentissage de la géométrie) es un programa desarrollado en el Laboratorio de estructuras discretas y de Didáctica de l'IMAG (Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble) de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble. En García (1995) se puede encontrar una amplia muestra de ejercicios y actividades para desarrollar con los alumnos utilizando este programa.

4 Esta secuencia desarrolla una actividad propuesta por Dörfler (1991).

10) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento AD.

11) Elige la opción *aspecto de los objetos* del menú *edición* para borrar la recta perpendicular al segmento AB que pasa por A, y la circunferencia de centro A y radio AB.

12) Elige la opción *recta perpendicular* del menú *construcción* para crear la recta perpendicular al segmento AD que pasa por D.

13) Elige la opción *recta perpendicular* del menú *construcción* para crear la recta perpendicular al segmento AB que pasa por B.

14) Elige la opción *intersección de dos objetos* del menú *construcción* para crear el punto de intersección de las rectas anteriores.

15) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar C al punto anterior.

16) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento CD.

17) Elige la opción *aspecto de los objetos* del menú *edición* para borrar la recta perpendicular al segmento AD que pasa por D.

18) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento CB.

19) Elige la opción *aspecto de los objetos* del menú *edición* para borrar la recta perpendicular al segmento AB que pasa por B.

20) Elige la opción *medir* del menú *varios* para medir las longitudes de los cuatro segmentos anteriores.

5 De acuerdo con Dörfler (1991), por abstracción constructiva entenderemos el proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, encuentra relaciones invariantes y hace su descripción simbólica. Esto quiere decir que, en dicho proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas de manera que la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que están inicialmente asociadas. La abstracción constructiva obtiene un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y existencia a partir de la acción.

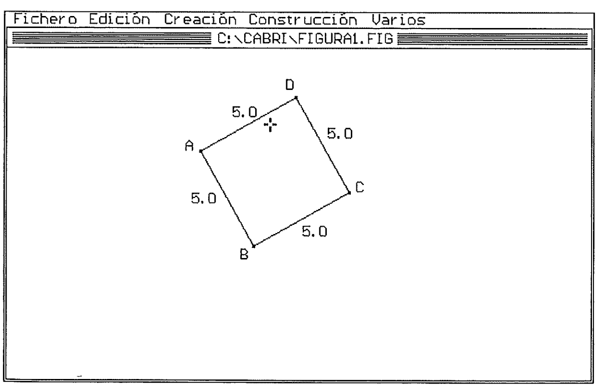


Figura 1

Una vez realizada la construcción anterior (figura 1), ésta se puede convertir en una *macroconstrucción*, la cual, a partir de una información de entrada (el segmento AB o bien otro segmento), da como resultado final la figura 1 o bien un nuevo cuadrado que tiene por lado el nuevo segmento. La figura 1 también se puede convertir en un *objeto variable*, es decir en un objeto *particular dinámico* que puede convertirse, potencialmente, en infinitas construcciones que continúan siendo cuadrados. Basta situar el puntero del ratón en el punto A y moverlo (figura 2). Este objeto variable se sitúa en un lugar intermedio entre el cuadrado particular y el concepto «cuadrado», entendido como la clase que contiene a todos los cuadrados particulares.

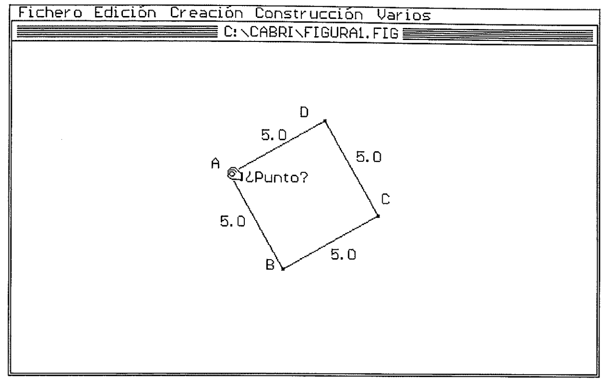


Figura 2

La opción *historia* permite reconstruir todas las acciones seguidas en la construcción de la figura 1 o en cualquiera de las figuras que resultan de mover el punto A, o bien son el resultado de aplicar la macroconstrucción que construye un cuadrado a partir del lado a un nuevo segmento. Esta opción permite que el alumnado se de cuenta de que las diferentes construcciones obtenidas al mover el punto A o al aplicar la macroconstrucción son el resultado de repetir el proceso que se ha seguido para construir la figura 1.

Los procesos de abstracción y generalización del alumno se facilitan con las opciones historia y macroconstrucción. En efecto, el alumno aplica la opción macroconstrucción y la opción historia a diferentes segmentos particulares y, *a partir de la abstracción constructiva*[5] que resulta de estas acciones, observa un *invariante*: la figura que aparece siempre es un cuadrado (los cuatro segmentos son iguales y los cuatro ángulos siempre son de 90° porque todas las rectas que se han creado son perpendiculares). Para determinados alumnos estas dos opciones son suficientes para llegar a las siguientes conclusiones: 1) siempre que hagan una construcción de este tipo obtendrán un cuadrado, y 2) cualquier cuadrado se puede construir de esta forma a partir de su lado. En cambio, otros sólo llegan a estos resultados después de convertir la figura 1 en un objeto variable, a partir de situar el puntero del ratón sobre un extremo del segmento inicial y moverlo. La variación continua del segmento inicial AB permite, potencialmente, dibujar un conjunto ilimitado de cuadrados y sitúa al alumno en un nivel mayor de generalidad que cuando sólo aplica la macroconstrucción a un número finito de segmentos y menos general que cuando considera todos los posibles cuadrados.

Si a continuación los alumnos trabajan con construcciones diferentes como las de la figura 3 (construcción de un cuadrado a partir de su diagonal) que también da como resultado un cuadrado, los alumnos no sólo sustituyen los segmentos iniciales sobre los que aplican las acciones como antes, sino que ahora son las mismas acciones las que pueden ser sustituidas por otras acciones, llegando a resultados del tipo: un cuadrado se puede construir geométricamente por diferentes métodos.

El alumno que desarrolla esta secuencia de actividades con el Cabri-géomètre enriquece su esquema con la conexión entre el concepto «cuadrado» y el concepto «construcción geométrica» (sabe que un cuadrado es el resultado de una construcción geométrica) así como con dos nuevos procedimientos (sabe construir un cuadrado a partir del lado, y a partir de la diagonal).

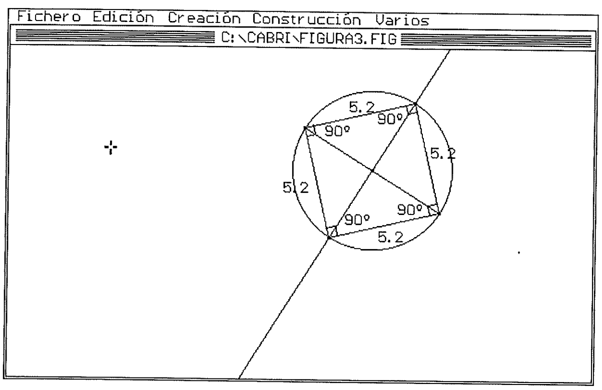


Figura 3

La mediatriz de un segmento

Para trabajar en clase la mediatriz de un segmento normalmente se comienza dando la definición o bien presentando una colección adecuada de ejemplos y contraejemplos (concepto); se sigue con el procedimiento para dibujarla (construcción con regla y compás) y, por último, se justifica o demuestra que la recta que resulta de la construcción es la mediatriz.

El alumno que desarrolla esta secuencia de actividades con el Cabri-géomètre enriquece su esquema con la conexión entre el concepto «cuadrado» y el concepto «construcción geométrica»

Las actividades que siguen son un ejemplo de propuesta diferente para trabajar la mediatriz, basada en la suposición de que este concepto se integra en un esquema. Esta propuesta consiste en:

A) Suponer, a partir de la observación del alumno en tareas anteriores, que el alumno ya tiene un esquema del cual forman parte los conceptos de recta, segmento, punto medio de un segmento, recta perpendicular por un punto, etcétera.

B) Proponer las actividades con el Cabri-géomètre descritas a continuación.

1) Elige la opción *punto* del menú *creación* para crear un punto.
2) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar A al punto anterior.
3) Elige la opción *punto* del menú *creación* para crear otro punto.
4) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar B al punto anterior.
5) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento AB.
6) Elige la opción *punto medio* del menú *construcción* para crear el punto medio del segmento anterior.
7) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar C al punto anterior.
8) Elige la opción *recta perpendicular* del menú *construcción* para crear la recta perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio C.
9) Elige la opción *punto sobre objeto* del menú *construcción* para crear un punto sobre la recta perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio C.
10) Elige la opción *dar nombre* del menú *edición* para nombrar D al punto anterior.
11) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento AD.
12) Elige la opción *segmento* del menú *creación* para crear el segmento BD.

13) Elige la opción *medir* del menú *varios* para medir los dos segmentos anteriores.

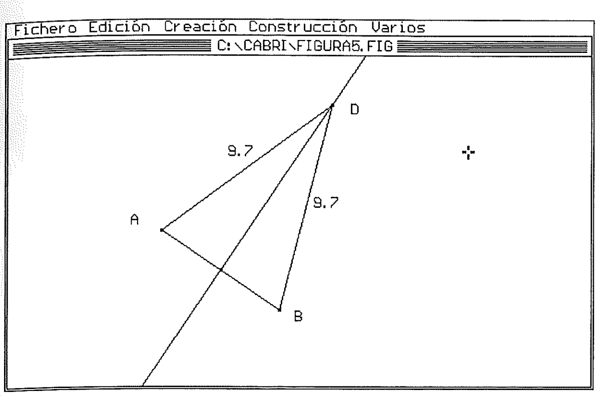


Figura 4

Una vez realizada con el ordenador la construcción anterior (figura 4), el punto D se puede convertir en un objeto variable, es decir, en un objeto particular dinámico. Basta situar el puntero del ratón en el punto D y moverlo. El invariante que obtiene el alumno al mover el punto D es que este punto siempre cumple la condición de estar a igual distancia de los extremos A y B del segmento. Por tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos. Estos dos resultados se integran dentro del esquema inicial.

Si después el alumno realiza una secuencia de actividades con el Cabri-géomètre que da como resultado la construcción típica de la mediatriz con regla y compás (figura 5), entiende que los puntos X y Y están a igual distancia de los extremos del segmento y que, por tanto, la recta que pasa por estos dos puntos es la misma que salía en la construcción anterior, es decir: la mediatriz. Así pues, esta nueva construcción queda incorporada al esquema como un procedimiento nuevo para dibujar con regla y compás el punto medio y la perpendicular que pasa por el punto medio (la mediatriz). Esta manera de presentar el tema a los alumnos permite que entiendan, al mismo tiempo, el concepto de mediatriz, la construcción que permite obtener la mediatriz y por qué la construcción de la figura 5 da como resultado la mediatriz.

Vicenç Font
Departamento de Didáctica de las CCEE y de la Matemática.
Universidad de Barcelona

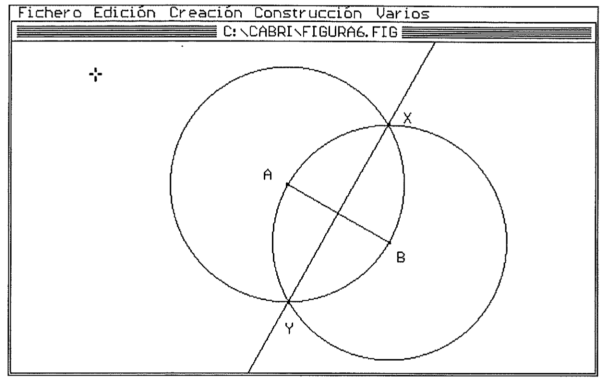


Figura 5

Bibliografía

COLL, C. (1989): *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*, Departament d'Ensenyament de la Generalitat, Barcelona.

DÖRFLER, W. (1991): «Forms and Means of Generalization in Mathematics», en A. J. BISHOP y otros (edit.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

GARCÍA, A., A. MARTÍNEZ y R. MIÑANO (1995): *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, Síntesis, Madrid.

NORMAN, D. A. (1985): *El aprendizaje y la memoria*, Alianza, Madrid.

POZO, J. I. (1993): *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Morata, Madrid.

RESNICK, L. B. y W. W. FORD (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Paidós/MEC, Barcelona.

SERVICIO DE PUBLICACIONES

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

V OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Recopilación de los problemas propuestos en las distintas fases provinciales, autonómicas y estatal de la «V Olimpiada Matemática Nacional», organizada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Precio

Socios .... 1.250 pta
No socios .... 1.750 pta

OTRAS PUBLICACIONES

- **IV Olimpiada Matemática Nacional**
  Socios: 1.000 pta
  No socios: 1.500 pta
- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría y sentido espacial
  Socios: 900 pta
  No socios: 1.200 pta
- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría en el ciclo medio
  Socios: 1.100 pta
  No socios: 1.500 pta
- **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (ADDENDA SERIES)**
  * Geometría desde múltiples perspectivas
  Socios: 1.100 pta
  No socios: 1.500 pta

Solicitud de pedidos

(El envío se servirá contrarreembolso a los precios indicados más gastos)

Servicio de Publicaciones. FESPM. Apartado de Correos 1009. 03080 ALICANTE

SUMA 22
junio 1996, pp. 59-62

La calculadora gráfica en análisis

Enrique Salinas Butrón

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se pretende hacer ver a los alumnos que el uso de una calculadora gráfica ayuda a comprender el rápido crecimiento de la función exponencial.
Por otra parte, en la actividad del cálculo de un límite indeterminado, podemos observar cómo el uso de la calculadora nos permite justificar la necesidad de la descomposición factorial de polinomios para obtener este tipo de límites, ya que la calculadora, debido a que utiliza un número finito de cifras decimales, puede llegar a introducir errores de bulto.

La experiencia se llevó a cabo con alumnos de 1.° del nuevo Bachillerato de Ciencias, y dado que la amplitud del bloque de Análisis (que abarca en este curso desde el concepto de función hasta el concepto de derivada y su interpretación geométrica, así como su relación con el crecimiento de una función), no permite incluir actividades que abarquen todo el desarrollo del mismo, paso a exponer dos de ellas que me han parecido más interesantes.

Actividades

Comparando crecimientos

¿Qué crece más rápidamente, la función $f(x)=2^{x/2,5}$ o la parábola $y=100x^2$?

Esta pregunta que parece un poco hecha al azar, surgió en clase después de estudiar la función exponencial.

Los ejemplos elegidos en el enunciado, lo fueron por los alumnos y surgieron de manera natural. La función exponencial apareció al intentar resolver la siguiente actividad:

Cierta clase de algas, llamada Clorella, se reproduce doblando su número en dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su número y, así, sucesivamente. De este modo, si la cantidad inicial de clorella es de 1 kg, ¿cuántos habrá dentro de 5 horas? ¿y de 10 horas? ¿y de 100 horas? ¿Con qué velocidad se reproducen las algas?

Al resolver esta actividad, la función obtenida fue $y=2^{x/2,5}$ y, además, los alumnos se dieron cuenta de que la función exponencial crece rápidamente. Pero, ¿cómo de rápidamente? ¿Más rápido que una recta? ¿Más rápido que una parábola? Estas preguntas dieron lugar al siguiente debate de clase:

Alumnos: Seguro que crece más rápido que una recta

Profesor: ¿Que cualquier recta?

Alumnos: ...Sí, porque las rectas siempre crecen lo mismo al tener la pendiente constante y, por muy grande que sea ésta, la exponencial llegará un momento que la sobrepasará.

Profesor: ¿Y más rápido que una parábola?

Alumnos: Dependerá de la parábola.

Profesor: ¿Por ejemplo?

Entonces los alumnos eligieron el ejemplo de la exponencial que acababan de estudiar y buscaron una parábola que a ellos les dio la impresión que crecía muy rápidamente: $y = 100x^2$.

El hecho de que dispusiéramos de calculadora gráfica en la clase de matemáticas, nos permitió abordar el problema de la siguiente manera: comenzamos introduciendo en el editor de funciones de la calculadora ambas gráficas, eligiendo la escala de la forma en que se ve a continuación.

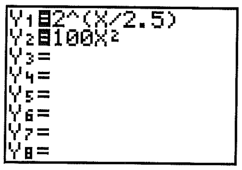


Figura 1a

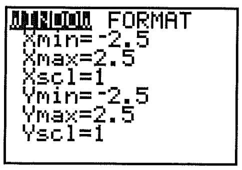


Figura 1b

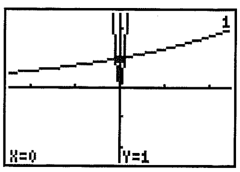


Figura 1c

Se observa que la parábola aparenta crecer mucho más rápidamente. Así que los alumnos pensaron que ellos tenían razón. Sin embargo, en este momento se hizo necesario explicar qué pretendíamos decir al preguntar *¿qué función crece más rápidamente?*

Hecha la pregunta de esa forma, ¿bastaría con mirar la gráfica en el intervalo en que la hemos representado [-2'5, 2'5], o deberíamos ver qué ocurre para valores más grandes de x?

En este momento recurrimos a un símil deportivo:

Profesor: Imaginemos que cada una de las funciones es un corredor de fondo. ¿Qué pretendemos?:

a) Saber cuál de los dos es más rápido en un tramo del recorrido.

b) Saber cuál de los dos es más rápido en todo el recorrido.

...los alumnos eligieron el ejemplo de la exponencial que acababan de estudiar y buscaron una parábola que a ellos les dio la impresión que crecía muy rápidamente...

Acordamos entonces que la respuesta a la primera pregunta es la que ellos habían dado: en el intervalo [-2'5, 2'5] crece más rápidamente la parábola que la función exponencial.

La pregunta del profesor era casi obvia :

Profesor: Pero, ¿«pillará» la gráfica de la función exponencial a la de la parábola más adelante, es decir, para valores de x más grandes?

Alumnos Si vemos la gráfica, parece que no será así, porque la función exponencial está muy por debajo y además su crecimiento es más lento.

Profesor: ¿Y cómo podríamos asegurarnos de que verdaderamente es así?

Alumnos: Obteniendo valores de cada función para valores cada vez más grandes de x. Es decir... obteniendo una tabla de cada función. Eso resulta fácil hacerlo con la calculadora.

Definimos en la calculadora las funciones $y_1=2^{x/2,5}$ e $y_2=100x^2$, y algunos alumnos comenzaron a dar valores grandes a x. De pronto un alumno vio que si a x le daba el valor 1.000 en la tabla de la función exponencial se obtenía como resultado ERROR, mientras que la otra función valía 10^8. La pregunta por parte del profesor era casi obligada:

Profesor: ¿A qué creéis que es debido que la calculadora nos dé un mensaje de ERROR para la función exponencial?

Alumnos: ¿...? Porque no se podrá calcular ese valor.

Profesor: ¿A qué será debido? Acaso x=1000 no pertenece al dominio de la función? ¿No se podrá calcular $2^{1000/2,5}=2^{400}$?

Alumnos: ¿...?

Profesor: ¿Qué hemos de hacer para calcular 2^{400}? ¿De qué orden de magnitud será el número que resulte? ¿Será grande, muy grande,...?

Alumnos: ¡Ya sé qué está pasando!, dijo uno de ellos. Lo que ocurre es que el número es tan grande que «no le cabe a la calculadora».

Esto nos dio pie para que pensaran en la magnitud de los números que se iban obteniendo con una y otra función, y utilizamos la calculadora gráfica para buscar un intervalo de valores de x en el que la función exponencial pase de tener valores menores que la parábola a tener valores mayores. Obtuvimos entonces estas tablas de valores:

X	Y1	Y2
0	1	0
1	1.3195	100
2	1.7411	400
3	2.2974	900
4	3.0314	1600
5	4	2500
6	5.278	3600

X=0

Figura 2a

X	Y1	Y2
0	1	0
10	16	10000
20	256	40000
30	4096	90000
40	65536	160000
50	1.05E6	250000
60	1.68E7	360000

X=0

Figura 2b

Una vez localizado un intervalo en el que el valor de la función exponencial está por encima del valor de la parábola, podemos afinar un poco más, obteniendo la tabla de forma manual en la calculadora, por ejemplo, dando los valores que se indican a continuación:

X	Y1	Y2
40	65536	160000
45	262144	202500

X=45

Figura 3

Queda entonces claro, sobre la tabla, que la función exponencial pasa a tomar valores mayores que la parábola. Pero podemos verlo gráficamente si modificamos la escala elegida al principio (ver figuras 1 y 2) de la siguiente forma:

```
WINDOW FORMAT
 Xmin=40
 Xmax=45
 Xscl=1
 Ymin=60000
 Ymax=260000
 Yscl=10000
```

Figura 4

...y utilizamos la calculadora gráfica para buscar un intervalo de valores de x en el que la función exponencial pase de tener valores menores que la parábola a tener valores mayores.

Vemos entonces que ambas gráficas se cortan en dicho intervalo:

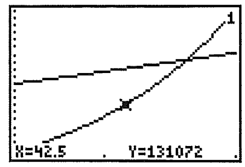


Figura 5

Si además queremos calcular el punto en que ambas curvas se cortan, la calculadora nos permitiría hacerlo fácilmente. Podemos verlo en la siguiente figura:

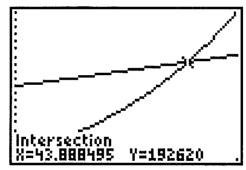


Figura 6

En esta actividad, el uso de la calculadora gráfica resulta tremendamente eficaz, porque en un principio resulta engañoso, y la conclusión que se obtiene al final es tremendamente clara para todos los alumnos, ya que ven que lo que les parecía tan claro al principio, no era así en modo alguno.

Un límite indeterminado

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Podemos utilizar la calculadora gráfica para obtener este límite, y para ello, definimos la función

$$y_1 = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

y de forma manual, obtenemos su tabla para aquellos valores cercanos a x=1, tanto por la derecha como por la izquierda. Son las tablas 7a y 7b que aparecen a continuación:

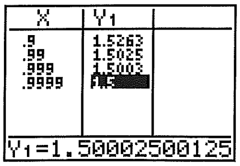


Figura 7a

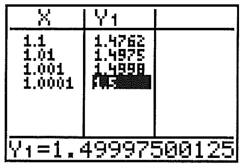


Figura 7b

Observando las tablas, parece claro que dicho límite será 1,5.

Al intentar obtener dicho límite con la calculadora gráfica, en principio todo parecía normal, pero se dieron dos situaciones curiosas, por parte de dos alumnos (un alumno y una alumna para ser más exactos):

- La alumna dio directamente a x el valor 0,9999999, con lo cual, la calculadora da como valor de la función $Y_1 = 0$, como puede verse en la tabla siguiente:

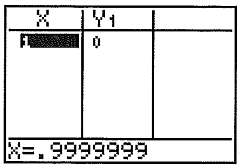


Figura 8

- El alumno intentó obtener dicho límite a partir de la gráfica de la función, desplazándose con el cursor en la zona de la gráfica próxima al valor de x=1, para lo cual utilizó la opción ZOOM tantas veces como creyó necesario, obteniendo unas gráficas tan raras como las que representadas en las figuras 9a-9d, a las que también adjuntamos las escalas utilizadas.

Como podemos observar, esta gráfica es totalmente irregular y no se corresponde con la realidad.

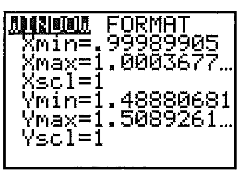


Figura 9a

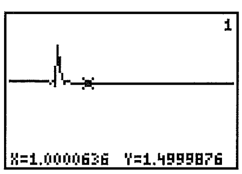


Figura 9b

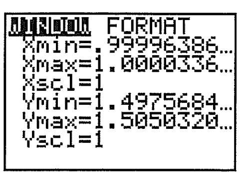


Figura 9c

Figura 9d

...en algunos casos se hace necesario utilizar la descomposición factorial y simplificar todo lo posible, para evitar errores, ya que los problemas que se observan se deben a las aproximaciones que utiliza la calculadora...

Las preguntas no se hicieron esperar:

¿A qué se debe este comportamiento?

¿Falla la calculadora, o es que el límite no es 1,5?

Gracias a esto, vimos que en algunos casos se hace necesario utilizar la descomposición factorial y simplificar todo lo posible, para evitar errores, ya que los problemas que se observan se deben a las aproximaciones que utiliza la calculadora, para valores de x cercanos a 1.

Para comprobar esto último, definimos tres funciones: $y_1 = x^3\text{-}3x+2$ (que corresponde al numerador), $y_2 = x^3\text{-}x^2\text{-}x\text{-}1$ (denominador) e $y_3 = y_1/y_2$. Podemos observar entonces que la calculadora da para x = 0.9999999 el valor de $y_1 = 0$ y de $y_2 \neq 0$. Estas aproximaciones son las que hacen necesaria la descomposición factorial y la posterior simplificación para poder calcular el límite pedido. (Ver figuras 10a y 10b).

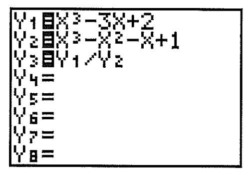


Figura 10a

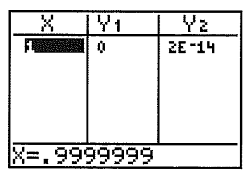


Figura 10b

Esta actividad resultó interesante, porque también les hizo ver que en ocasiones pueden superar a la calculadora que, por tratarse de una máquina, sólo puede operar con un número finito de cifras decimales y eso, en ocasiones como ésta, produce errores que pueden dar lugar a conclusiones equivocadas, por lo que se hace necesario utilizar el álgebra de polinomios (su descomposición factorial).

Enrique Salinas
IB Figueras Pacheco
Alicante.
Sociedad de Matemáticas
Al-Khwarizmi

SUMA 22
junio 1996, pp. 63-69

El álgebra lineal y la calculadora gráfica. Una experiencia en bachillerato

Luis Millán García

IDEAS Y RECURSOS

La unidad didáctica referida a álgebra lineal suele ser tratada en la mayoría de los libros de texto con un enfoque fundamentalmente referido a destrezas, dejando un poco de lado su aspecto más investigador e innovador. Con esta experiencia pretendemos mostrar cómo es posible compaginar ambos aspectos, utilizando como instrumento de apoyo la calculadora gráfica. Los resultados han sido francamente interesantes y nos permiten albergar esperanzas de que en un futuro cercano, el estudio de matrices pueda ser enfocado hacia un punto de vista más relacionado con su aplicación práctica.

La experiencia que se llevó a cabo, tuvo lugar en el curso 1994/95 con los alumnos de 2.° curso del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Para poder desarrollarla, los alumnos dispusieron durante todo el curso de una calculadora gráfica Texas Instruments, modelo TI-82.

El objetivo de la experiencia era comprobar que el trabajo con álgebra lineal, que habitualmente quedaba hipotecado en su aspecto más investigador por la necesidad de cálculos farragosos y por la dificultad de trabajar con matrices de orden mayor que 4, podía desarrollarse con una mayor ambición sin, por ello, quedar desprovisto de su aspecto «mecánico».

En coherencia con el Diseño Curricular de Bachillerato, todo el enfoque del bloque de álgebra lineal se hizo a través de la resolución de problemas, que pusieran de manifiesto la ventaja que la utilización de la calculadora tiene en su resolución. No significa en absoluto que las destrezas necesarias para el trabajo con matrices y sistemas de ecuaciones se dejen de lado sino que, una vez dominados los conceptos y las estrategias, la calculadora gráfica nos da pie a trabajar en una línea más acorde con los objetivos planteados para el bachillerato.

El trabajo del alumno no es sólo calcular la multiplicación de las matrices, sino traducir un texto en un modelo matemático e interpretar los resultados.

Desarrollo de la experiencia

Mediante unos problemas de introducción, que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales, se llega a la definición de matriz. Con la calculadora gráfica no hay ningún problema en editar matrices, así como las operaciones con ellas: suma, multiplicación por un escalar, multiplicación, potenciación y cálculo de la matriz inversa. Los menús relativos al álgebra lineal son pocos y, por tanto, en este aspecto no hubo grandes dificultades de aprendizaje.

Lo curioso es que hechos como la necesidad de que en la multiplicación de matrices se cumpla una determinada condición o el de que sólo existan determinantes para matrices cuadradas fueran descubiertos por ellos, mediante la utilización de la calculadora.

La calculadora gráfica nos permite realizar cualquier tipo de operaciones con matrices, pero también nos permite operar con filas, calcular determinantes, trasponer, etc. En este artículo se presentan unas actividades representativas del trabajo realizado en el curso mencionado.

Matrices-límites-inducción

Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a) *¿Es una matriz de probabilidad?*

b) *Calcula las potencias M^2, M^3.*

Basta con editar (introducir) la matriz y operar con ella. Es conveniente tener la precaución de trabajar en modo fracción para que los resultados sean significativos.

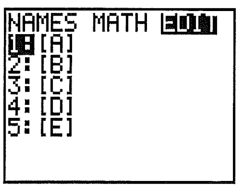


Figura 1

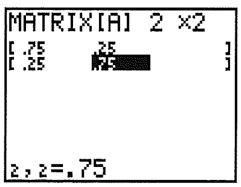


Figura 2

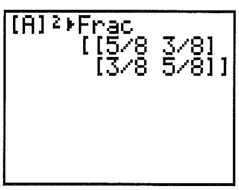


Figura 3

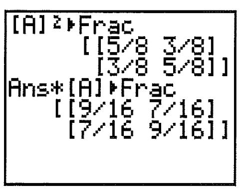


Figura 4

c) *Completa la matriz y generaliza el resultado para la potencia n-ésima de la matriz M.*

(Utilizando la calculadora y después de varias potencias más, se llegó a dos resultados distintos).

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \qquad M^n = \begin{pmatrix} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} \\ \frac{2^n-1}{2^{n+1}} & \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

...donde el valor de la calculadora gráfica se muestra más potente es en todo el proceso relativo al estudio del rango de una matriz y a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

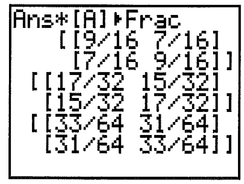


Figura 5

d) *Calcula lim M^n cuando n tiende a infinito.*

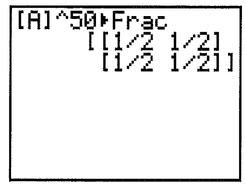


Figura 6

Pero donde el valor de la calculadora gráfica se muestra más potente es en todo el proceso relativo al estudio del rango de una matriz y a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Sería un tanto pesado mencionar todo el proceso que la calculadora desarrolla para aplicar el método de Gauss o la regla de Cramer (mucho más rápido, sin embargo, que el modo manual). Sin embargo, una estrategia para la resolución que muy a menudo no se utiliza por la complejidad del proceso operativo es la siguiente:

Si en $AX = B$, despejamos X, nos queda

$$X = A^{-1} \cdot B$$

La actividad propuesta fue la referida a continuación, en el siguiente apartado.

Ecuaciones matriciales

Para las ecuaciones matriciales siguientes, determina si hay solución y calcúlala cuando sea posible:

a) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Proceso de resolución:

a) Como sabemos que X = $A^{-1} \cdot B$, editamos A y B.

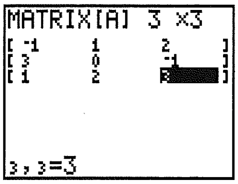


Figura 7

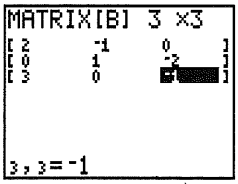


Figura 8

Efectuamos el producto $A^{-1} \cdot B$.

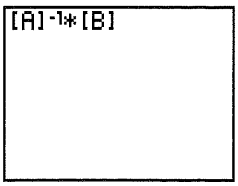


Figura 9

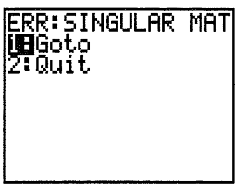


Figura 10

La sorpresa fue mayúscula, ya que no habíamos hablado de determinante de una matriz. La conclusión obtenida por los alumnos en ese momento era:

«Si no existe la matriz inversa de A, el sistema no tiene solución»

b) Si repetimos el proceso:

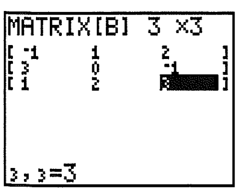


Figura 11

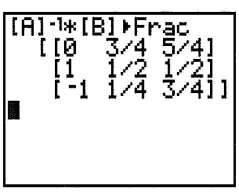


Figura 12

La sorpresa fue mayúscula, ya que no habíamos hablado de determinante de una matriz. La conclusión obtenida por los alumnos en ese momento...

Actividades de investigación con matrices

Para poder ver el interés que el trabajo con matrices puede suponer en su relación con otros campos de la realidad científico-social, las actividades que tratamos fueron las siguientes:

Vectores-matrices-probabilidad

Un vector fila de n componentes p = (p_1, p_2,..., p_n) se denomina un *vector de probabilidad* si todas sus componentes son no negativas y además la suma de sus componentes es igual a 1.

a) *Al lanzar una moneda, podemos considerar el vector de probabilidad p = (1/2, 1/2). Al lanzar un dado el vector de probabilidad asociado es ....*

b) *Si p= (1/4, 1/3, x) es un vector de probabilidad. calcula x.*

Una matriz cuadrada n x n es una *matriz de probabilidad* si cada una de sus filas es un vector de probabilidad.

c) *¿Cuáles de las siguientes matrices son matrices de probabilidad?*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 & -0,1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

d) *Si colocamos un ratón en una caja con tres compartimentos como la de la figura. y no disponemos de más información, podemos suponer que el ratón escoge cualquier puerta al azar y con la misma probabilidad.*

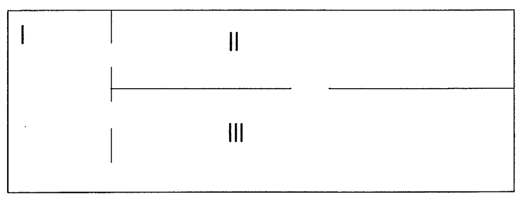


Figura 13

El paso del compartimento I al II tiene una probabilidad de 1/3, lo escribiremos p_{12}=1/3, ¿cuánto vale p_{21}? Podremos escribir en forma de matriz 3x3 todas estas posibles transiciones (cambios de estado en este ejemplo cambio de compartimento).

(A partir de este momento, la calculadora gráfica apoya muchísimo el trabajo investigador)

e) *Hay una propiedad que relaciona los vectores y las matrices de probabilidad.*

«Si p es un vector de probabilidad con n componentes y P es una matriz de probabilidad nxn, entonces p.P es un vector de probabilidad».

Pon algún ejemplo y comprueba esta propiedad. ¿Sabrías demostrar este resultado?

f) *Escribe dos ejemplos de matrices de probabilidad ¿Será cierto que su producto es una matriz de probabilidad? Investígalo.*

g) *¿Será cierta la siguiente propiedad:*

«Si M es una matriz de probabilidad, entonces M^2, M^3,... son matrices de probabilidad»

Movimientos migratorios

En la urbe de Megápolis los estudios realizados acerca de los movimientos de la población indican que el 15% de los habitantes de la ciudad se muda cada año a los suburbios y que el 10% de los habitantes de los suburbios se muda cada año a la ciudad. Si la población de Megápolis estaba repartida en 1989 de forma que el 60% vivía en la ciudad y el resto en los suburbios se pide:

a) *¿Cuál será la proporción de los habitantes en la ciudad en 1990?*

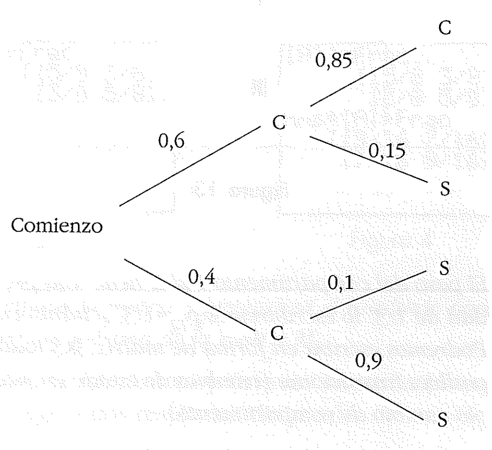
b) *Calcula la probabilidad de vivir en los suburbios en 1990.*

c) *Calcula la probabilidad de vivir en la ciudad en 1991 y la probabilidad de vivir en los suburbios en 1991.*

Comentarios:

Como los alumnos ya habían trabajado anteriormente con diagramas en árbol y con probabilidad, la mayoría enfocaron el problema en esa línea de trabajo.

En efecto, si consideramos el diagrama de árbol:



P(habitar en la ciudad en 1990) = 0,6x0,85 + 0,4x0,1 =

P(habitar en los suburbios en 1990) = 0,6x0,15 + 0,4x0,9 =

Como los alumnos ya habían trabajado anteriormente con diagramas en árbol y con probabilidad, la mayoría enfocaron el problema en esa línea de trabajo.

En estos momentos varios alumnos se dieron cuenta de que podía ser interesante trabajar con una matriz (matriz de transición) y disponer los cálculos utilizando el estado inicial E_1 y la matriz de transición T. Así al efectuar el producto de matrices $E_1 \cdot T$ obtendremos un vector con las probabilidades de vivir en la ciudad en 1990 y de vivir en los suburbios en 1990. Esto es el estado de proporciones de 1990.

	Ciudad	Suburbios
Ciudad	0,85	0,15
Suburbios	0,10	0,90

Surgió el problema del estado inicial, pero muy pronto se planteó que bastaba con considerar una matriz o vector fila, (0'6, 0'4).

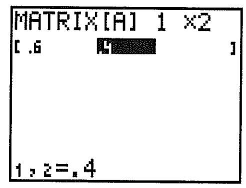


Figura 14

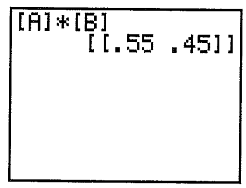


Figura 15

Hasta este punto, la utilización de la calculadora gráfica, parece un poco superfluo, ya que los productos que surgen son sencillos, pero ¿y si vamos generalizando?

Nota: Para que los resultados sean significativos, merece la pena dar los resultados con tres decimales.

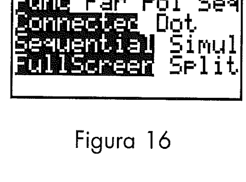


Figura 16

d) *Calcula la probabilidad de habitar en la ciudad en 1999.*

(Basta con ir generalizando el proceso)

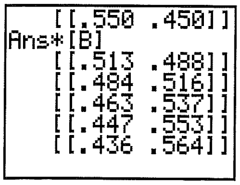


Figura 17

Puede ser un buen momento para hablarles de las *cadenas de Markov.* Así para el año 2000, las probabilidades correspondientes a vivir en la ciudad y a vivir en los suburbios se podrá calcular efectuando el producto de matrices

$$E_1 \cdot T^{2000\text{-}1989}$$

(¿Por qué?)

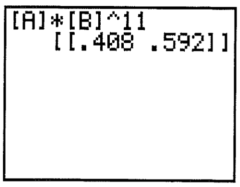


Figura 18

e) *¿Se alcanzará alguna proporción estacionaria o estable en el transcurrir de los años?*

Si hacemos transcurrir, por ejemplo, 50 años:

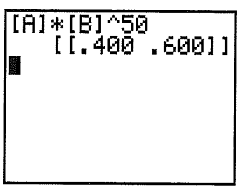


Figura 19

Supongamos que las proporciones estacionarias fueran (x, y), con x + y = 1, entonces se verificará (x, y) T = (x, y). T la matriz de transición. (¿Por qué?).

Calcula x,y e interpreta el resultado.

La teoría de las cadenas de Markov demuestra que se alcanza un estado estacionario independientemente del estado inicial de partida. En nuestro caso era el de la proporción en 1989, (0'6, 0'4), pero la proporción estacionaria sería la misma si el estado inicial hubiese sido (0'2, 0'8), por ejemplo. Compruébalo.

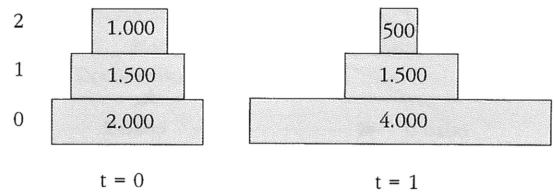
La teoría de las cadenas de Markov demuestra que se alcanza un estado estacionario independientemente del estado inicial de partida.

e) *La matriz de transición T, ¿es una matriz de probabilidad?*

Pirámide de población

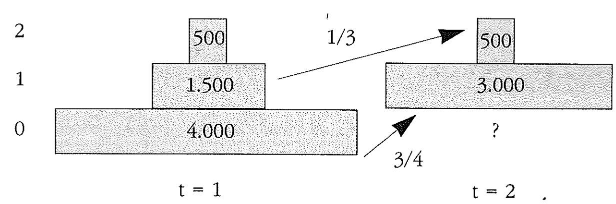
Al cabo del tiempo la distribución de la edad de los habitantes de un país varía. Es conocido el fenómeno de envejecimiento de la población. Las pirámides de población pueden representar los cambios de forma clara. ¿Qué ocurrirá en el año 2050? ¿Es posible hacer predicciones sobre el futuro a partir de pirámides conocidas?

Una estrategia importante consiste en estudiar en primer lugar un ejemplo bastante más sencillo, pero no absurdo. Supongo que dentro de un área del trópico vive una especie de insectos. La distribución de la población es fluctuante. Para los dos años siguientes se tiene:

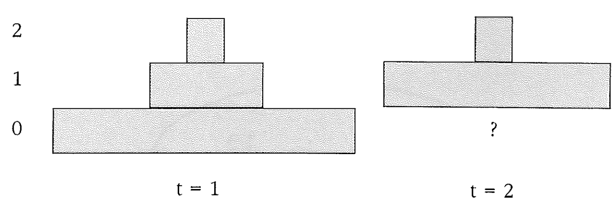


¿Es posible construir la pirámide para el año t = 2?

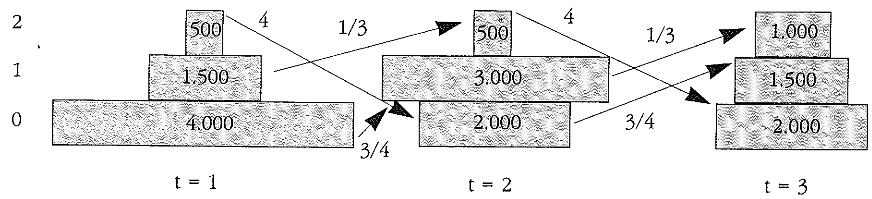
Es una pregunta muy abierta y, sin duda, dará lugar a una discusión. Es necesario suponer algo sobre la mortalidad y la natalidad. Imaginemos que los porcentajes de muerte de los grupos de edad no varían. Entonces todos los ancianos (edad 2) mueren; para el grupo de mediana edad la probabilidad de muerte es 2/3; para los jóvenes es 1/4.



La última pirámide ya necesita una base y la pregunta es: ¿qué generaciones producen los jóvenes? ¿qué sabemos sobre la reproducción?

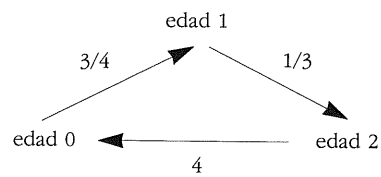


Podemos hacer otra suposición: sólo los ancianos producen insectos nuevos. Podemos concluir que una pareja de insectos tiene una media de 8 hijos, pues el factor de reproducción por anciano es de 4. Ahora podemos hacer predicciones:



Es sorprendente que la pirámide original vuelve a repetirse.

Partiendo de otra pirámide y suponiendo que los porcentajes de mortalidad y natalidad no varían, se puede esperar un movimiento periódico también. Observa el grafo de transición:



La matriz de transición para un año es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para dos años es:

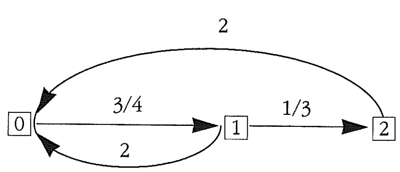
$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para tres años es:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propiedad $T^3 = I$ causa la periodicidad. Si los insectos son menos fértiles, por ejemplo, el factor de reproducción es 2, tendremos $T^3 = (1/2) \cdot I$ y la consecuencia sería la extinción.

Si cambiamos el grafo, por ejemplo:



Usando la calculadora, los alumnos pueden investigar si una población se extinguirá o crecerá explosivamente.

La matriz es ahora:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Y es en estos momentos cuando la calculadora gráfica o el ordenador nos pueden ayudar tremendamente. En clase, no se llegó más que a analizar algunos años.

Usando la calculadora, los alumnos pueden investigar si una población se extinguirá o crecerá explosivamente.

La matriz de transición es ahora:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Les resultó curioso el cambio de criterio al dar la matriz de transición).

Y si partimos de una población de 6.000 insectos en cada edad, los resultados que vamos obteniendo realizando la multiplicación iterativa: BTT..., donde B es la matriz 1x3 que en cada momento nos da la población, nos encontraríamos:

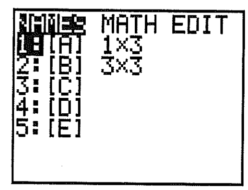


Figura 20

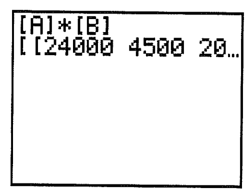


Figura 21

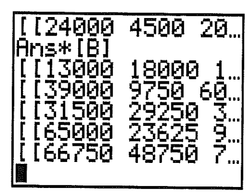


Figura 22

De lo que deducimos la siguiente tabla:

t = 0	t = 1	t = 2
6.000	6.000	6.000
24.000	4.500	2.000
13.000	18.000	1.500
39.000	9.750	6.000
31.500	29.250	3.250
65.000	23.625	9.750

Si continuamos el proceso (cosa sencilla de hacer con la calculadora gráfica), nos encontramos además con la sorpresa de que la proporción entre los grupos de edad no cambia; la distribución de la edad es estable.

Aproximadamente los porcentajes finales son 59,42; 32,62 y 7,96.

Luis Millán
IB Figueras Pacheco
Alicante.
Sociedad de Matemáticas
Al-Khwarizmi

Conclusiones

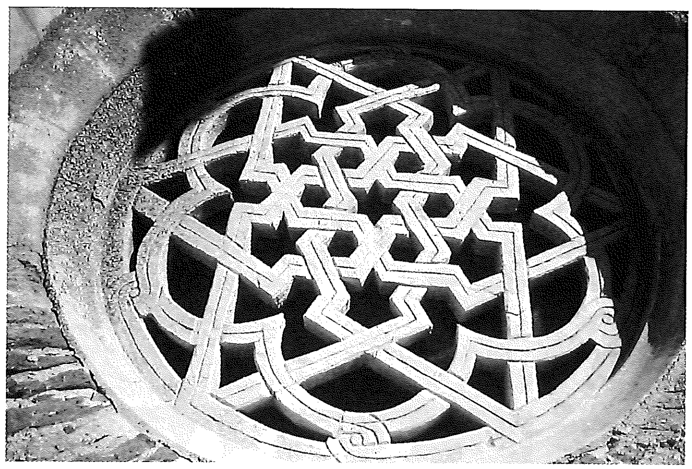
La experiencia resultó muy positiva, tanto desde el punto de vista técnico, ya que la posibilidad de que cada alumno dispusiese de su propia calculadora hizo que se familiarizaran con el uso de menús, teclado, etc., como desde el punto de vista del desarrollo de la unidad didáctica, ya que permitió trabajar unas actividades que en condiciones normales hubiera sido muy difícil llegar a plantear.

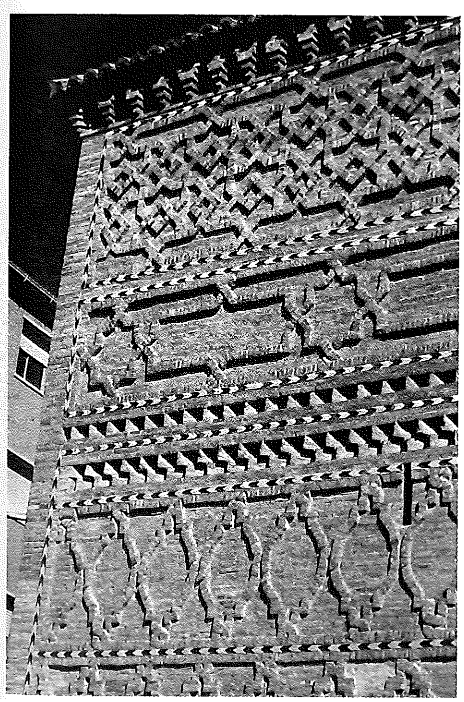
Por otra parte, hubo un aspecto que merece destacarse. Es el cambio que supone la utilización de la calculadora gráfica en lo referente a las actividades propuestas para el proceso evaluador de los alumnos. El tiempo utilizado en cálculos puede dedicarse a hacer más hincapié en las situaciones que pueden dar lugar al trabajo con matrices.

Bibliografía

KINDT, M. (1993): «Matemática discreta como preparación a las Ciencias Sociales», en *Aspectos didácticos de Matemáticas,* 4, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 123-154.

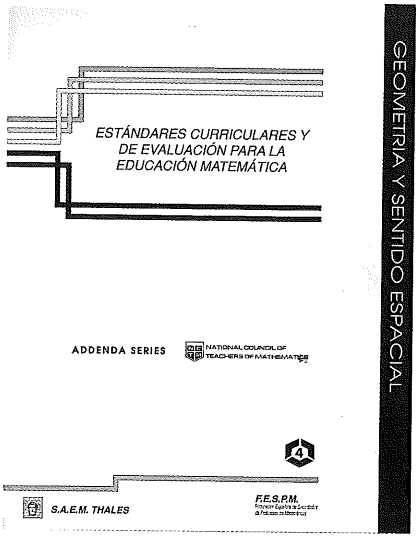
SAVALL, J. V.: *Matrices, operaciones, aplicaciones e interpretación,* Documento CEP Alicante.





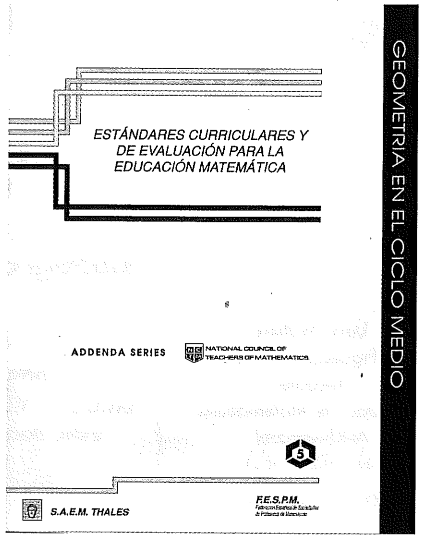
Geometría mudéjar
Iglesia de Tobed (Zaragoza).
Siglo XIV
(Fotos: F. Villarroya)

Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática
ADDENDA SERIES



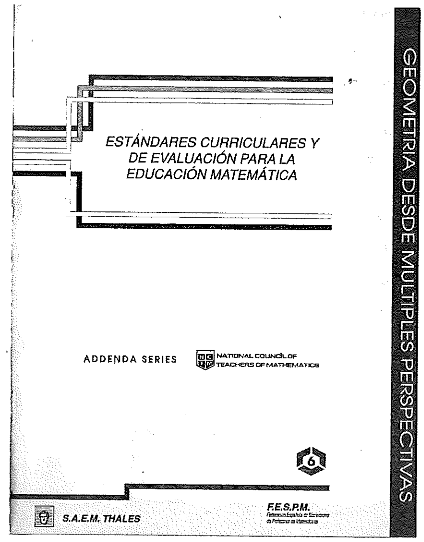
Geometría y sentido espacial

Socios 900 pta
No socios 1.200 pta



Geometría en el ciclo medio

Socios 1.100 pta
No socios 1.500 pta



Geometría desde múltiples perspectivas

Socios 1.100 pta
No socios 1.500 pta

SAEM THALES

Pedidos: SAEM THALES. Facultad de Matemáticas. Apartado de Correos 1160. 41080 SEVILLA.

SUMA 22
junio 1996, pp. 71-78

La calculadora gráfica en correlación y regresión

Luis M. Botella López

IDEAS Y RECURSOS

Este bloque temático nos brinda la ocasión de desarrollar y relacionar entre sí una gran cantidad de los conceptos y procedimientos constitutivos del currículum de los nuevos bachilleratos, tanto en la modalidad de Ciencias Sociales como en la de Ciencias de la Naturaleza y en la de Tecnología, al interrelacionar modelos funcionales teóricos con estudios experimentales, análisis con estadística. Disponer en la actualidad de una herramienta como la calculadora gráfica enriquece sobremanera su desarrollo, al permitir abordar el estudio de regresiones no lineales y obviar el farragoso trabajo de realización de cálculos repetitivos; en definitiva, permite dar prioridad al razonamiento sobre el cálculo.

Se pretende en el presente artículo mostrar el desarrollo del bloque temático de «Correlación y regresión» tal y como se ha llevado a cabo en un grupo de 1.° del nuevo bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales, mediante la presentación de algunas de las actividades tratadas. Podemos destacar dos principios básicos de la metodología empleada:

- Las clases se basan de una forma sistemática en la *Resolución de Problemas.*
- Se utiliza, de modo habitual, la calculadora gráfica (en nuestro caso la TI-82) como herramienta de trabajo.

Tras un primer trimestre dedicado a tratar problemas conducentes a asimilar el concepto de relación funcional entre dos magnitudes, y a modelizar las relaciones encontradas, supongo que alumnos y alumnas son capaces de reconocer a partir de una gráfica los tipos de funciones estudiados:

- Lineales, haciendo hincapié en la proporcionalidad directa.
- Proporcionalidad inversa.
- Polinómicas.

Es presciso mencionar que los modelos de función inversa, exponencial y logarítmica fueron estudiados cuando surgió una regresión de uno de estos tipos (en concreto exponencial) durante la resolución de una de las actividades propuestas en este bloque.

El bloque temático se dividió en tres partes (a efecto de proponer actividades con una cierta afinidad):

- Reconocer funciones.
- Relación funcional experimental.
- Relación estadística.

Reconocer funciones

Identificar gráficas

Se trata de reconocer una gráfica proyectada a partir de la calculadora gráfica, e intentar dar su ecuación con el mínimo número de preguntas. Se proyecta:

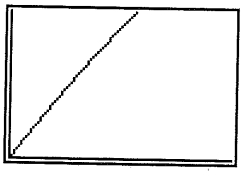


Figura 1

$y = x\,(x-10)^2$, con escala definida por los parámetros:

$X_{min} = 0$ $X_{max} = 1$ $X_{scl} = 0$

$Y_{min} = 0$ $Y_{max} = 50$ $Y_{scl} = 0$

Creen identificar la gráfica con una recta y piden un valor (x = 1, y = 81), dando como ecuación y = 81x. La representamos gráficamente sobre la anterior[1] con la consiguiente sorpresa (figura 2a). El diálogo que sigue es algo así:

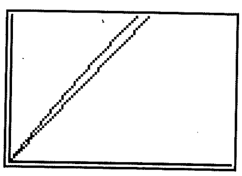


Figura 2a

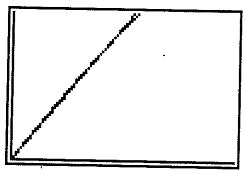


Figura 2b

Alumnos: O sea, que no era una recta

Profesor: Bueno, a lo mejor os habéis confundido con la ecuación.

A: No, porque al pasar por el origen la imagen de 1 nos daría la pendiente.

P: ¿Qué se puede hacer para asegurarse?

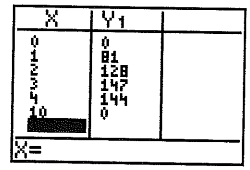
A: Veamos en la tabla las imágenes de 0 y 2. (x = 0, y = 0 ; x = 2, y = 128). *Seguro que no lo es, porque las diferencias no son constantes.*

P: De todos modos, ¿por qué no probáis a cambiar la ecuación de la recta?

A: Por ejemplo y = 92x (se dibuja y prácticamente coincide con la gráfica inicial; figura 2b). *Pero no es. Nos hace falta otro valor* (x = 3, y = 147). *Las segundas diferencias tampoco son constantes, no es de segundo grado. Otro valor* (x = 4, y = 144); *¡ya está!, las terceras diferencias sí son constantes. Es de tercer grado... Para tener una idea de la ecuación nos haría falta encontrar las otras raíces... siguiendo con las diferencias terceras, creo que es 10. A ver la imagen* (x = 10, y = 0).

Se trata de reconocer una gráfica proyectada a partir de la calculadora gráfica, e intentar dar su ecuación con el mínimo número de preguntas.

1 Para ello, se apaga el retroproyector, con el fin de mostrar tan sólo las gráficas y que no vean la ecuación buscada hasta que no se considere oportuno.



X	Y1	
0	0	
1	81	
2	128	
3	147	
4	144	
10	0	

X=

Figura 3

A: Vamos a cambiar la escala para ver la gráfica hasta x = 10.

(Se apaga el retroproyector para hacer X_{max} = 10). Ver figura 4a.

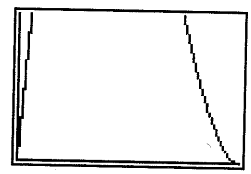


Figura 4a

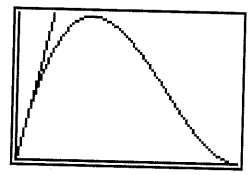


Figura 4b

¡La raíz es doble! Hay que asegurarse; cambio de escala con X_{max} = 15, Y_{max} = ...150 (tras revisar los valores de la tabla en sus notas, ver figura 3, se obtiene la gráfica de la figura 4b). *¡Sí, es doble! Ya tenemos la ecuación,*

$$y = x(x-10)^2.$$

Se aprovecha para mostrar el parecido de ambas gráficas (cúbica y recta) en el intervalo [0, 1] y comentar que si deseáramos estudiar la función sólo en ese intervalo, quizá sería más útil tomar una recta a pesar del error cometido. Sobre todo si se tratase de datos que ya tienen algún error. También tenemos ocasión para hablar de los términos «interpolar» y «extrapolar», y del riesgo de hacer predicciones a partir de una tabla de datos para valores muy alejados de los conocidos.

Buscar gráficas

I. Se visualizan los puntos (40, 60), (60, 100), (65, 110)

A: ¿Cómo quieres que digamos algo con eso?

P: Ahora se trata de que digáis cuál sería la función cuya gráfica pasa por esos puntos.

A: Como tenemos tantos datos... Es una recta, eso sí. ¿Cuáles son los puntos?

P: ¿Cuánta información necesitáis?

A: Las coordenadas de dos puntos.

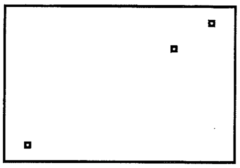


Figura 5

Se mueve el cursor (figura 6a) por dos de los puntos: (x = 40, y = 60), (x = 60, y = 100). Calculan...

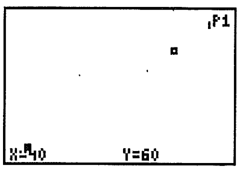


Figura 6a

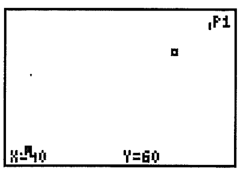


Figura 6b

La y aumenta 40 unidades cuando la x aumenta 20. Así que la pendiente es 2; tenemos x = 40, para ir hasta 0 hay que retroceder 40 unidades, luego la y tiene que disminuir 2·40 = 80, y valía 60. Así que la imagen de 0 es –20. La ecuación es y = 2x – 20.

Se dibuja y, claro, pasa por los puntos.

II. Se visualiza, del mismo modo, la tabla de valores:

50	48	47	44	41	36	35	31	28	26	25	24
49	50	54	57	61	64	59	63	63	61	64	70

Se propone una serie de actividades en que hay que encontrar «la mejor» aproximación a la relación funcional existente entre dos variables, para lo que conocemos una tabla de valores obtenida experimentalmente.

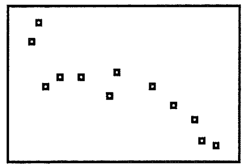


Figura 7a

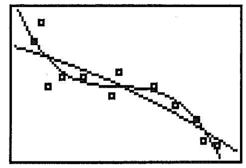


Figura 7b

A: ¡Hala! ¡Cualquiera encuentra una función que pase por esos puntos!

P: ¿De qué tiene eso aspecto?

Diversidad de opiniones.

Pues una recta no.

Puede que de una función de tercer grado.

Yo dibujaría una parábola hacia abajo...

Se puede dar pie a discutir, utilizar las posibilidades de la calculadora para dibujar las mejores aproximaciones para cada una de las ideas (figura 7b), etc. En cualquier caso, se deja el campo abierto para el estudio que viene después.

Relación funcional experimental

Se propone una serie de actividades en que hay que encontrar «la mejor[2]» aproximación a la relación funcional existente entre dos variables, para lo que conocemos una tabla de valores obtenida experimentalmente.

Se trata de que identifiquen la función buscada a partir de la nube de puntos. Una vez hecho, que cada uno construya la función que mejor se adapte a los puntos, para luego discutir los criterios seguidos y concluir cuál parece «la mejor aproximación».

Se utiliza la calculadora para corroborar o refutar hipótesis de forma intuitiva, representando gráficamente la nube de puntos y superponiendo las gráficas de las funciones propuestas.

Aleaciones

El punto de fusión de una aleación depende de las proporciones en que intervienen cada uno de sus componentes. Para dos componentes A y B, se obtienen los siguientes datos:

Proporción de A	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
Temperatura de fusión (°C)	720	580	425	485	555

¿Cuál estimas que es la temperatura de fusión si el componente A aparece al 55%? ¿Cuál crees que será la temperatura de fusión del componente A?

2 Término evidentemente subjetivo en estos momentos.

De entrada, identifican los puntos con una parábola. (Caras de desánimo al pensar en el sistema de ecuaciones que les espera; ¡y no pasa por el origen!).

Alguien sugiere un modo de responder a las preguntas: 0,55 es «la mitad de la mitad de la distancia entre 0,5 y 0,7». ¿Por qué no calcular el valor que está a la cuarta parte de 425 a 485? Eso digo yo ¿por qué no? Han hecho una interpolación lineal; a continuación inventan algo parecido para el 1 a partir de los dos últimos datos (extrapolación lineal).

En cualquier caso, es el momento de mostrar cómo la calculadora se hace cargo de lo rutinario y farragoso:

Tras introducir los datos, se define el gráfico deseado, y los vemos en pantalla.

La máquina se hace cargo de los cálculos. Primero definiremos las listas que hacen el papel de variables independiente y dependiente y, a partir de ahí, tenemos todo un repertorio de curvas de regresión. En nuestro caso, elegimos una regresión cuadrática. Ya tenemos calculados los parámetros de «la mejor» aproximación de segundo grado.

Podemos superponer la función así obtenida a la nube de puntos y pasando a la tabla de valores asociada a dicha función damos con los valores deseados.

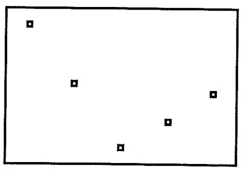


Figura 8a

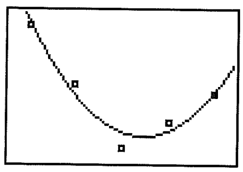


Figura 8b

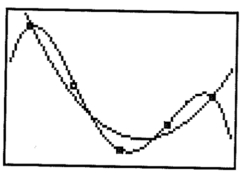


Figura 8c

Después, al haber 5 puntos (condiciones), alguien habla de un polinomio de 4.° grado. Se obtiene con la calculadora y se superpone la gráfica.

Conclusión: No siempre la mejor solución (matemáticamente hablando lo es, puesto que esta gráfica pasa por los cinco puntos) es la más adecuada.

Neumáticos

La profundidad de la huella de la banda de rodadura de un neumático tiene una importante influencia en la conducción. Y no sólo en la evacuación del agua cuando llueve, sino también en la distancia de frenado. La tabla nos da información al respecto:

Profundidad del perfil en mm	8	4	3	2	1
Distancia de frenado en m (a 100 km/h)	70	82	87	97	118

¿Cuál estimas que sería la distancia de frenado para una profundidad de 6 mm?

El límite mínimo legal para la profundidad del dibujo es de 1,6 mm. ¿Cuál será la distancia de frenado?

Hay quien asocia la nube de puntos al modelo de función hiperbólica, con lo que tenemos la ocasión de escuchar razonamientos del siguiente tipo mientras trabajan en grupos con sus calculadoras :

La función es del tipo

$$y = \frac{a}{x} + b$$

La asíntota horizontal debe estar por el 68, así que debe ser b = 68 ; voy a probar con a = 1 y b = 68.

¡Qué va! La a es mucho más grande. Prueba con a=50.

Eso está mejor, pero b es menor; vamos a probar con b = 65.

Pues b más pequeña y a más grande; a = 65 y b = 60.

Todavía no; mira a ver si a = 70.

No, mejor a = 75.

Finalmente obtenemos algo similar a la figura 9. Merece la pena destacar los conocimientos que se ponen en juego en tales discusiones y que, al permitir la utilización de la calculadora una comprobación inmediata de conjeturas, permiten en algunos minutos toda una serie de reflexiones sobre la influencia de los parámetros en un modelo funcional.

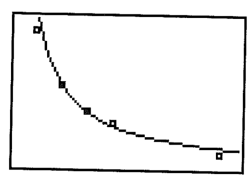


Figura 9

...al permitir la utilización de la calculadora una comprobación inmediata de conjeturas, permiten en algunos minutos toda una serie de reflexiones sobre la influencia de los parámetros en un modelo funcional.

En otros casos, se utiliza la calculadora para ensayar cada una de las opciones disponibles hasta encontrar la gráfica que más se ajusta a los puntos para, a partir de la tabla de valores que corresponda a la función, responder a las preguntas planteadas.

Vemos las gráficas que se obtiene para cada tipo de línea de regresión: tenemos la nube de puntos y las regresiones lineal, cuadrática, cúbica, cuártica y potencial (figura 10).

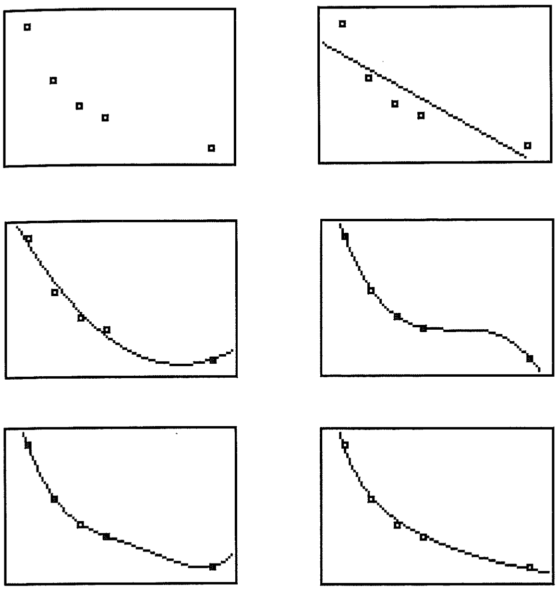


Figura 10

Se plantea la discusión acerca de la idoneidad o no de cada una de las aproximaciones. Ahora se puede responder a las cuestiones planteadas en el enunciado a partir de la tabla de valores:

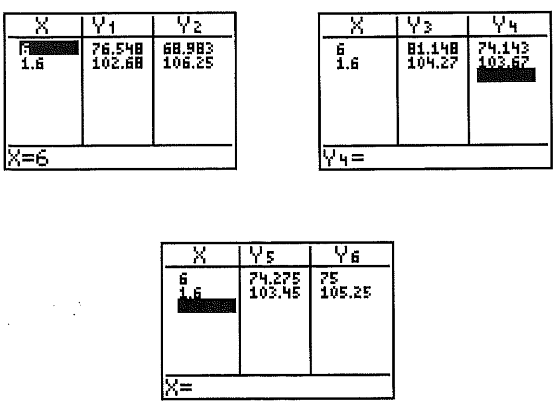


Figura 11

Planetas

El siguiente cuadro da para cada planeta del sistema solar su distancia media al Sol, considerando como 10 la distancia de la Tierra al Sol, así como la duración de un giro completo alrededor del mismo.

Planeta	Número (n)	Distancia (d_n)	Tiempo de revolución (T_n)
Mercurio	1	3,87	88 días
Venus	2	7,23	224,7 días
Tierra	3	10	1 año
Marte	4	15,24	1,88 años
Asteroides	5	29,09	
Júpiter	6	52,03	11,9 años
Saturno	7	95,46	29,5 años
Urano	8	192	84 años
Neptuno	9	300,9	164,8 años
Plutón	10	395	247,7 años

a) Representa gráficamente la relación entre el número del planeta y su distancia al Sol (n y d_n).

b) ¿Qué tipo de relación te parece que puede existir entre ambas variables? Busca un modelo funcional apropiado.

c) ¿A qué distancia sería de esperar que se encontrase un eventual 11.° planeta?

d) Representa gráficamente la relación entre la distancia al Sol y el período de rotación (d_n y T_n).

e) ¿Qué relación funcional encuentras entre ambas? Si lo consigues, acabarás de deducir la tercera ley de Kepler. Búscala en alguna enciclopedia y compara lo que allí pone con lo que tú has encontrado.

Al ensayar, resulta que el mejor ajuste se obtiene con una regresión exponencial para la relación $n \leftrightarrow d_n$. Ello supone un primer contacto con el modelo de función exponencial.

Se explora la gráfica con el cursor o bien se utiliza la tabla de valores para responder a la cuestión b).

Para la relación $d_n \leftrightarrow T_n$ se obtiene, aproximadamente, $y = 0{,}32x^{1,5}$, que se deberá relacionar con la tercera ley de Kepler tras recordar o introducir la idea de exponente fraccionario. Las gráficas son:

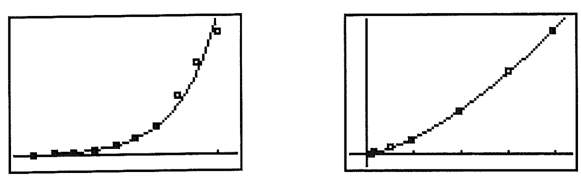


Figura 12

Elementos radiactivos

Los elementos radiactivos emiten partículas de distintos tipos y van perdiendo masa con una rapidez que varía de unos a otros. Un experimentador observa uno de estos elementos en días sucesivos y anotando su masa obtiene la siguiente tabla:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Masa (gramos)	1	0,95	0,90	0,86	0,82	0,78	0,74	0,68	...

Busca un modelo de función que se ajuste a esta tabla.

El periodo de semidesintegración de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda una determinada masa del mismo en reducirse a la mitad. ¿Cuál es el periodo de semidesintegración del elemento estudiado?

Teniendo en cuenta esto, quizá el modelo de función que has dado anteriormente deba ser reconsiderado. Hay que tener presente que el período de semidesintegración es fijo; es decir, que cuando vuelva a transcurrir otra vez el mismo tiempo, la masa se volverá a convertir en la mitad y, desde luego, la masa nunca llegará a ser negativa (¿ocurría esto con el modelo que diste antes?).

Busca otro modelo funcional que se ajuste mejor a la situación. ¿Cuándo será la masa menor que 0,1 miligramos? ¿Llegará alguna vez a desaparecer por completo el elemento?

Quizá sea interesante no dar toda la información con el enunciado, sino en dos partes. Al utilizar la calculadora para obtener una línea de regresión adecuada a la nube de puntos, y si se ensaya siguiendo el orden que aparece en la calculadora, es probable que los alumnos y alumnas se conformen con una regresión lineal que, realmente, da una muy buena aproximación (figura 13a).

Se puede ahora preguntar si parece lógico este modelo, que inevitablemente conducirá a una masa negativa tras transcurrir un cierto tiempo (se puede sugerir que recorran la gráfica con el cursor o que visualicen una tabla de valores). Luego han de buscar otro modelo.

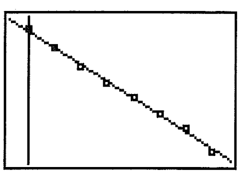


Figura 13a

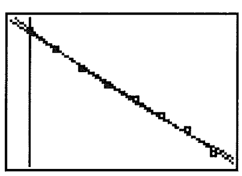


Figura 13b

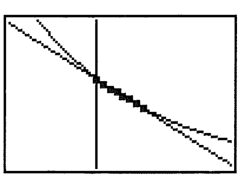


Figura 13c

Al utilizar la calculadora para obtener una línea de regresión adecuada a la nube de puntos, y si se ensaya siguiendo el orden que aparece en la calculadora, es probable que los alumnos y alumnas se conformen con una regresión lineal que, realmente, da una muy buena aproximación.

Al dar la siguiente información sobre el período de semidesintegración se sugiere el modelo de función exponencial (segundo contacto con este modelo), que se ajusta mejor al problema: realizamos un ajuste exponencial y la superponemos a las anteriores. Con un zoom vemos el comportamiento distinto de ambos modelos con el paso del tiempo (figuras 13b y 13c).

Con un zoom o modificando los parámetros de la ventana gráfica podemos dar respuesta al resto de cuestiones planteadas (figura 14), aunque también es posible utilizar las tablas de valores.

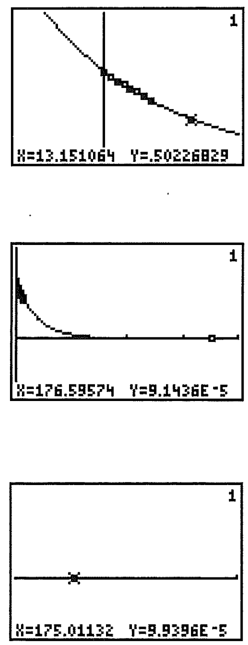


Figura 14

Relación estadística

Equipos de fútbol

En la siguiente tabla tenemos la clasificación de la 1ª división de fútbol el día 10-5-95, junto con los goles marcados por cada equipo y el número de partidos empatados:

	Goles a favor	Partidos empatados
1. Real Madrid	69	9
2 Deportivo	50	10
3. Zaragoza	48	5
4. Betis	38	14
5. Barcelona	51	8
6 Sevilla	45	9
7. Español	41	12
8. At. Bilbao	33	10
9. Oviedo	38	13
10. Valencia	43	10
11. Tenerife	48	7
12. Celta	28	12
13. R. Sociedad	42	13
14. Compostela	35	11
15. At. Madrid	45	7
16. Rácing	35	7
17. Albacete	35	13
18. Sp. Gijón	37	12
19. Valladolid	20	9
20. Logroñés	13	9

a) *¿Qué equipos han marcado pocos goles? ¿Y muchos?*

b) *¿Podrías decir qué lugar debería ocupar en la clasificación un equipo que hubiera marcado 30 goles?*

c) *¿Y un equipo que hubiese empatado 16 partidos?*

Una vez introducidos los datos en tres listas, L_1 a L_3, la calculadora nos da directamente los valores necesarios. El apartado a) se refiere al intervalo

$$\left[\bar{y} - \sigma_y , \bar{y} + \sigma_y\right]$$

obteniendo los parámetros necesarios directamente a partir de los cálculos para dos variables:

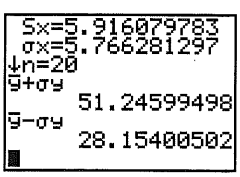


Figura 15

Se puede considerar como «normal» el haber marcado de 29 a 51 goles.

...una vez más la calculadora trabaja por nosotros: activando un gráfico estadístico, calcula la línea de regresión que se copia en la pantalla.

Para el apartado b), una vez más la calculadora trabaja por nosotros: activando un gráfico estadístico, calcula la línea de regresión que se copia en la pantalla. Obtenemos el gráfico adjunto; entramos en la tabla y probamos distintos valores de X hasta obtener el valor más aproximado a 30 para el número de goles (figura 16).

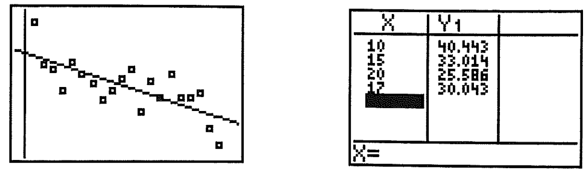


Figura 16

En lo que se refiere al apartado c), hemos de cambiar las definiciones de gráfico para estudiar ahora la relación entre L_1 y L_3.

Al ver el gráfico (figura 17) podemos deducir una débil relación entre las variables, lo que se confirma al calcular la línea de regresión, pues se obtiene como coeficiente de correlación r = 0,086, con lo que no merece la pena proseguir, pues la estimación no es fiable.

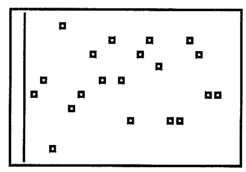


Figura 17

Vehículos y víctimas

El parque de vehículos y el número de víctimas mortales en carretera en España ha evolucionado en los últimos años de la siguiente forma (datos obtenidos de Anuario El País, 1995):

Año	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Miles de vehículos	12.284	13.068	13.881	14.870	15.696	16.528	17.347	17.809
Victimas mortales	4.065	5.041	5.419	6.095	5.936	5.744	5.088	4.735

a) *¿Podrías dar una estimación sobre el número de vehículos que se espera en 1994 y 1995?*

b) *¿Y sobre el número esperado de víctimas mortales en estos dos años?*

c) *Quizá se podría pensar que el aumento del número de vehículos debe traer consigo un aumento del número de víctimas mortales. Cita algunas causas por las que creas que no ha sido así en estos ocho años.*

La gráfica definida para responder a la primera cuestión (figura 18a) sugiere una relación de tipo lineal bastante fuerte, obteniendo la respuesta en la tabla de valores (figura 18b):

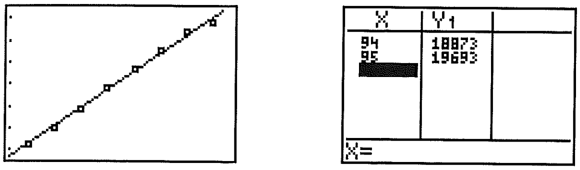


Figura 18

Para la segunda, la gráfica de la figura sugiere una relación no lineal, quizá cuadrática, de la que se obtienen las respuestas de la tabla de la figura 19:

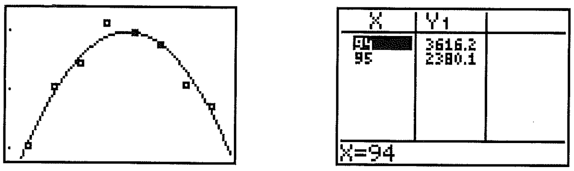


Figura 19

Una conclusión inesperada

Una vez finalizado el bloque, se propuso a alumnas y alumnos algunos problemas que tuvieran relación con todo lo estudiado a lo largo de los dos trimestres del curso. Uno de ellos decía así:

Un intermediario ha comprado el 30 de septiembre 200 kg de uva para venderlos en Navidad. Le han costado a 40 pta el kilo y sabe que cada día que pase, su precio aumentará en 1 pta/kg, pero pierde 1 kg de uva.

a) *Encuentra una función que proporcione el importe de la venta de las uvas (si el intermediario vendiese todos los kilos disponibles) cuando hayan transcurrido x días y represéntala gráficamente.*

b) *¿Cuándo le interesa vender? ¿Qué ganancia puede obtener como máximo?*

Uno de los grupos desarrolló el problema del siguiente modo:

1. Elaboración de una tabla de valores construida a partir del enunciado; introducen los datos en la calculadora y visualizan la nube de puntos

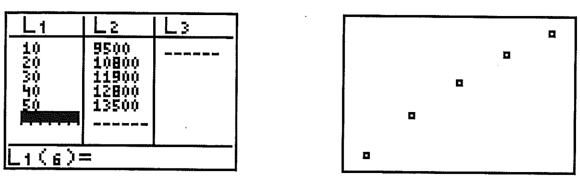


Figura 20

2. Intuyen que se trata de una función polinómica de 2.° grado (¿o quizá prueban antes un ajuste lineal y encuentran la coincidencia al segundo intento?), realizan el ajuste correspondiente y superponen la gráfica a la nube de puntos:

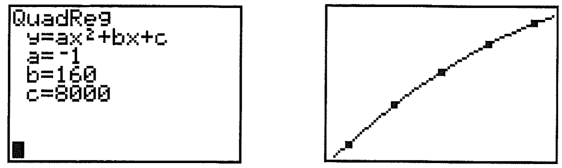


Figura 21

3. Para asegurarse, añaden un punto a la nube, separado de los otros, y dibujan el resultado:

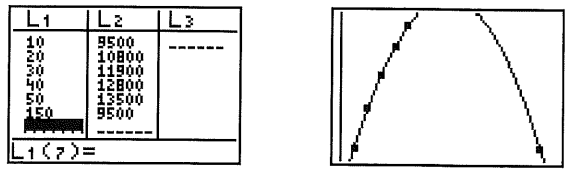


Figura 22

4. Cambian los valores que definen la ventana gráfica:

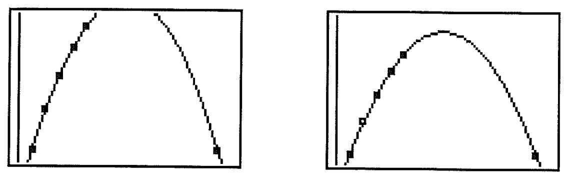


Figura 23

5. Ya seguros de lo que hacen, dan como expresión algebraica la así obtenida, y para el máximo exploran la gráfica con el cursor y ajustan con el zoom. Se aseguran a partir de la tabla de valores.

Luis M. Botella
IB Francisco Pacheco
Alicante
Societat d'Educació
Matemàtica
Al-Khwarizmi

Bibliografía

GUZMÁN, M. y J. COLERA (1989): *COU. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.

ENGEL, A. (1990): *Les certitudes du hasard*, Aleas Editeur, Lyon.

SUMA 22
junio 1996, pp. 79-82

Matemáticas con leche. Transversalidad nutricional

Ismael Roldán Castro

El artículo presenta una actividad lúdica en la que las matemáticas y el sentido del gusto constituyen lo esencial del experimento. Se investigan en el mismo algunas posibilidades sencillas de aplicación de la estadística descriptiva más elemental en un contexto de formación de consumidores críticos. Consiste, pues, en un relato pormenorizado de las vicisitudes, incidencias, técnicas y aportaciones diversas que sucedieron realmente durante el desarrollo de algunas clases de matemáticas.

IDEAS Y RECURSOS

Me encontraba inmerso en el mundo de los polinomios, describiendo las curiosas relaciones entre sus miembros más conspicuos, cuando, tras la lectura de la prensa, me informé de la celebración del «Día del Consumidor».

Y yo, con los polinomios.

Estaba claro que había que hacer un esfuerzo por salir de *Polinomilandia*, a buen seguro con la aquiescencia unánime de mis alumnos de primero, para conectar con tan singular fecha. Pregunté en la clase: ¿Os gustaría saborear las matemáticas? La respuesta no se hizo esperar: ¿Más aún, ...Maestro?

Así fue como nos dispusimos a preparar una jornada impredictible. De esas que no aparecen en los «ejercicios del tema» o en las páginas de «curiosidades». Queríamos saber si con alguno de nuestros sentidos más preciados, el gusto, y con la ayuda de las matemáticas, podíamos valorar críticamente algún producto alimenticio cuya publicidad nos afectase.

Propuse la leche y, en principio, se aceptó. No obstante, hubo quienes hubiesen preferido el jamón de pata negra e incluso bebidas con escaso aporte nutritivo.

La actividad se desarrolló durante dos clases. En la primera decidimos adquirir tres marcas distintas del mismo producto. Coincidimos en la conveniencia de efectuar la compra en el mismo establecimiento, ya que interesaba que el escalonamiento en los precios de las marcas elegidas fuese de algún modo similar al de otros establecimientos. Asimismo, había que procurar no elegir una marca que estuviese de oferta porque, obviamente, ello falsearía los resultados en los que interviniese el precio.

Muy bien, les planteé, pero: ¿qué cantidad de leche tendremos que comprar?, y alguien espetó: «Creo que, como somos muchos, con 12 tetrabriks de cada marca tendremos suficiente». Suficiente, desde luego. Más que suficiente. Con esa cantidad casi desayuna el Instituto completo cualquier mañana.

La investigación no había hecho más que comenzar. Una chica apuntó que ella se solía beber un vaso al día. Como en la clase había 35 alumnos, la cosa estaba clara: 35 vasos de leche de cada marca. O sea, que iríamos al supermercado y pediríamos al empleado el equivalente a 105 vasos de leche. Y no sabemos cuál podría ser la reacción del mismo. Es bien fácil, concluyó otro alumno: «Nos llevamos un vaso y lo llenamos 105 veces. El número de tetrabriks abiertos es la cantidad de litros que tenemos que comprar».

Y entonces pensé que, siguiendo por ese camino, más barato nos resultaría comprar una vaca, ordeñarla directamente en la clase y degustar la leche directamente salida de sus ubres.

Por fortuna, algunos pensaron que los métodos anteriores resultaban algo prosaicos y no dejarían en buen lugar al profesor. Gloriosa intervención ésta que atemperó mis constantes vitales. En efecto, una degustación en la que cada alumno ingiriese tres vasos de leche consecutivos, resultaría peligrosamente contraproducente. Un auténtico suplicio.

Por racional consenso establecimos que cada uno degustaría en total 150 ml. Es decir, 50 ml de cada marca de leche. Y como eran 35, ello significaba 1.750 ml que, a los efectos de adquisición, suponían aproximadamente 2 litros de leche de cada marca. En total: 6 l de leche, 35 vasos de un solo uso, un paquete de servilletas y algo fundamental: el azúcar. Algunos tomaban la leche con azúcar. Pensamos en comprar sobrecitos pero optamos por un paquete de 1 kg para utilizar con cucharillas. La clave de una rigurosa y edulcorada degustación consistía en diluir siempre la misma cantidad de azúcar, y esto resultaba más preciso con una cucharilla que con un sobrecito.

También se acordó que las tres marcas de leche fuesen del tipo UHT (entera) y que se sirviesen a la temperatura ambiente. La leche fría y la caliente podrían alterar los sabores, o hacer más dificultosa su evaluación.

Cada alumno preparó tres hojillas, una para cada marca de leche, como la que mostramos:

SABOR LECHE «X»					
0	1	2	3	4	5

Así, cuando terminasen de degustar la leche X, marcarían el valor del sabor según les dictaminasen sus paladares respectivos. El 0 correspondería a nefasto sabor o insipidez manifiesta y el 5 a sabor óptimo o placer absoluto.

Queríamos saber si con alguno de nuestros sentidos más preciados, el gusto, y con la ayuda de las matemáticas, podíamos valorar críticamente algún producto alimenticio cuya publicidad nos afectase.

Se formaron varios grupos de trabajo. Por un lado los camareros, es decir, aquellos cuya misión consistiría en verter en los vasos de sus compañeros los 50 ml de cada leche. Por otro, los calculistas. De este último, se formaron tres grupos de tres alumnos cada uno. Uno para la leche X, otro para la Y y el tercero, para la leche Z. Así, cuando la clase terminase de degustar la leche Y, por ejemplo, uno de los miembros de ese grupo recogería las 35 hojillas de valoración del sabor de la leche Y para cumplimentar la tabla siguiente:

VALOR	RECUENTO	FRECUENCIA
0		
1		
2		
3		
4		
5		

Con una calculadora, y una vez efectuado el recuento y contabilizados los totales para cada valor (frecuencias absolutas), calcularían la media aritmética y la desviación típica de la distribución. Se hizo especial hincapié en la comprobación de la suma de las frecuencias absolutas que tenía que coincidir con la totalidad del número de alumnos participantes. Algún grupo tendría que repetir el escrutinio por errores en el recuento.

Una vez que los grupos de calculistas X, Y y Z, tuviesen ultimados sus cálculos y, por tanto, cumplimentadas las tablas, pasarían los resultados a un cuarto grupo de calculistas definitivos que presentarían las conclusiones finales a toda la clase.

Y es que todos querían saber:
- La leche de mejor sabor.
- La leche de mayor calidad.
- La leche de óptima relación calidad-precio.

Lo primero quedaba resuelto sin más que presentar los resultados de las medias aritméticas y desviaciones típicas de cada marca. Bastaría comparar. Las desviaciones típicas servirían como parámetros orientativos del grado de representatividad de la media como «sabor» estándar de cada leche.

Pero, ¿y la calidad? El precio estaba claro. Sin embargo, la calidad, desde el punto de vista matemático, no.

Se discutió, a fin de establecer un criterio matemático razonable, a qué cosa llamaríamos calidad. Hubo de todo. Desde los que consideraban que todas las leches sabían más o menos igual y que lo único que había que considerar era el precio, hasta los que querían valorar detalles como la composición estética y el diseño publicitario de textos y logotipos presentes en el tetrabrik.

Finalmente triunfó la propuesta que consistía en tener en cuenta los valores nutricionales propios de la leche y que aparecen impresos en los respectivos recipientes:

Valor energético	Proteínas	Hidratos de carbono	Grasas

El profesor facilitó esos datos relativos a cada marca. Pero siempre bajo el disfraz de leche X, Y, Z. El único que conocía la equivalencia de cada leche incógnita con la marca comercial, era el profesor. En el último momento, tras la presentación de una tabla resumen final a cargo del último grupo de trabajo, se desvelarían las marcas.

Los datos que utilizaron correspondían a los valores medios por 100 ml de producto. La calidad se definió de la siguiente manera:

$$\textbf{Calidad} = \sum \textbf{valores nutricionales}$$

Sin embargo, dada la heterogeneidad de las magnitudes nutritivas inherentes, los valores numéricos se presentaban muy dispares: Las proteínas, hidratos de carbono y grasas (todas en gramos), con valores entre 0 y 5, mientras que el valor energético (en kJ) en torno a 200. La solución para ponderar la suma consistió en multiplicar por diez los valores

Las desviaciones típicas servirían como parámetros orientativos del grado de representatividad de la media como «sabor» estándar de cada leche.

de proteínas, hidratos de carbono y grasas. De la misma manera se procedió con los valores medios del sabor de cada leche. Y, consecuentemente, el valor energético se dividiría por 10. Con estos trucos, la fórmula que inventamos quedó como se muestra en el recuadro:

$$\textbf{CALIDAD} = 10(\textbf{P} + \textbf{HC} + \textbf{G} + \textbf{S}) + \frac{\textbf{VE}}{\textbf{10}}$$

Siendo:

P = Proteínas
HC = Hidratos de carbono
G = Grasas
S = Sabor
VE = Valor energético.

La relación Calidad/Precio, tras la definición anterior, no constituiría ningún problema. Estricta traducción al lenguaje matemático del término «relación» = cociente.

En la experiencia que narramos en el presente artículo, se utilizaron las marcas de leche: *Asturiana*, *Pascual* y *La Lechera* (que no se corresponden con X, Y, Z, necesariamente). El gran día, el día de la degustación, constituyó una auténtica fiesta. Para los que asistieron, desde luego. De un total de 35, se presentaron sólo 27. Con un fondo musical apropiado, los alumnos asumieron los roles previamente pactados y se divirtieron saludablemente. El profesor, también. En este contexto, se pudieron escuchar comentarios absolutamente coherentes con la situación: ¡Vaya leche!, ¡Prueba esta leche y verás!, etc.

Y los resultados que se obtuvieron fueron los que aparecen en la tabla que se adjunta:

Sabor	X	Y	Z
0	2	9	1
1	4	2	4
2	5	5	2
3	5	4	3
4	7	4	12
5	4	3	5
$\overline{X}$	2,68	2,04	3,33
σ_n	1,43	1,77	1,44

Los calculistas definitivos presentaron los resultados siguientes:

	VE	P	HC	G	S	Precio pta/l	Calidad	Calidad/ Precio
X	257	2,9	4,4	3,61	2,68	109	161,6	1,48
Y	249	2,8	4,2	3,50	2,04	95	150,3	1,58
Z	267	3,1	4,7	3,60	3,33	105	174,0	1,66

Con lo cual:

- Mejor sabor: Z
- Mayor calidad: Z
- Óptima relación calidad/precio: Z

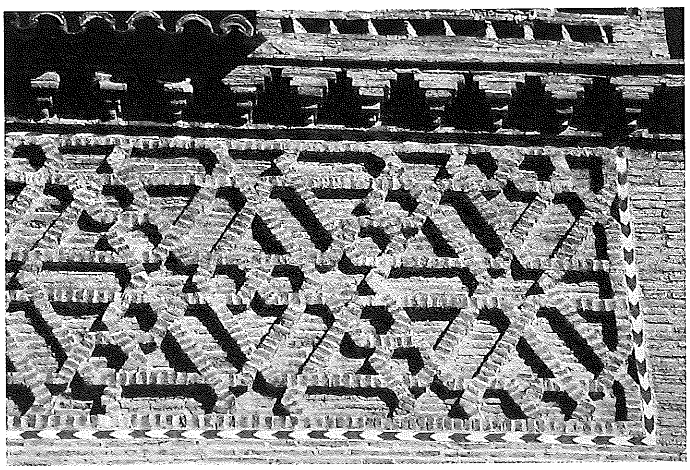
Obsérvese que la leche más cara no resultó ser precisamente ni la de mejor sabor, ni la de mayor calidad ni tan siquiera la de óptima relación calidad/precio.

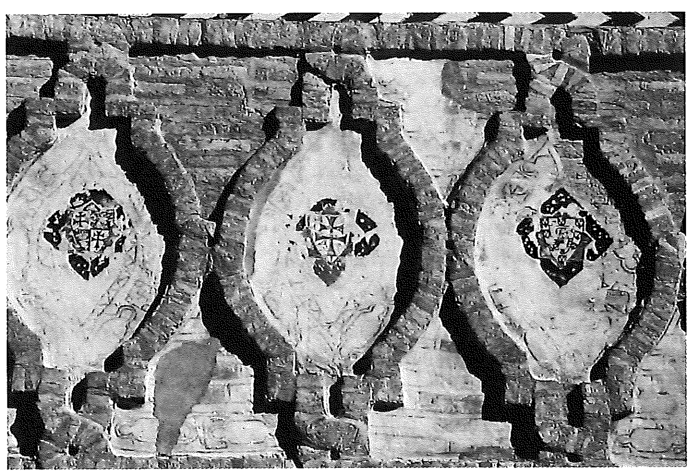
Ello nos permitió enunciar la siguiente moraleja: Lo más caro no siempre es lo mejor.

En ese punto, la música cesó. Los alumnos crearon su propio fondo musical de expectación a golpe de timbales y susurros. Y el profesor, «despejó» las tres incógnitas lácteas. Propongo, para próximas ediciones del experimento, el *Bolero* de Ravel. El lector interesado, al que supongo agudo y perspicaz, no encontrará dificultad para desvelar las marcas que se esconden tras nuestros ancestrales disfraces: X, Y, Z.

Las transversales de la nutrición, terminaron por atravesarnos. A partir de ahora, las matemáticas y la leche quedarán unidas a perpetuidad.

Ismael Roldán
IFP Virgen de los Reyes
Sevilla
SAEM Thales





Geometría mudéjar
Iglesia de Tobed (Zaragoza).
Siglo XIV
(Fotos: F. Villarroya)

SUMA 22
junio 1996, pp. 83-90

Historia del álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas «históricos»

Paloma Gavilán Bouzas

IDEAS Y RECURSOS

El trabajo ofrece un recorrido por la historia, recogiendo diversos problemas que sirven para conocer las aportaciones que distintas culturas han hecho en la construcción de las matemáticas.
Su objetivo es dar la oportunidad al alumnado de que se sitúe en Egipto, Grecia o la India y que afronte las cuestiones que allí se plantearon, pudiendo con ello ejercitarse en la resolución de problemas y el álgebra.

El objetivo que se pretende es trabajar al unísono en tres pilares fundamentales de las matemáticas de esta etapa:

- Historia de las matemáticas.
- Resolución de problemas.
- Algebra.

Despertar en el alumnado nuevas actitudes para que se acerque al mundo de las matemáticas desde otras perspectivas más reales y flexibles, a través de la presentación de una colección de problemas históricos, fundamentalmente de carácter algebraico: éste es el reto.

El *horizonte histórico* ofrece una visión viva de las matemáticas. Éstas, se construyen, se hacen, se descubren... Recorremos la historia y ello permite saber lo que conocían y se planteaban los egipcios hace 3600 años, o los griegos hace más de veinte siglos, o los indios en el siglo XII, o Newton, Euler, Gauss... en el XVIII y XIX.

Otro de los pilares sobre el que nos apoyamos es la *resolución de problemas*, ya que se trata de un centro de interés permanente a lo largo de la educación secundaria y nos ofrece la posibilidad de presentar problemas curiosos e interesantes que provoquen al alumnado y atraigan su atención.

La destreza para resolver problemas se mejora sustancialmente con la práctica y el entrenamiento sistemático, y ello no es una perogrullada, ya que gran parte del alumnado considera que no está capacitado para resolver problemas de matemáticas, ni lo estará por mucho que se esfuerce. Desarrollar esta capacidad es fundamental no sólo para aprender matemáticas, sino para aprender a vivir.

El alumnado debe romper sus habituales resistencias a enfrentarse a los problemas, lo que se consigue a medida que van acumulando éxitos y, por lo tanto, perdiendo miedo. Tendremos que convencerles o, mejor dicho deberán experimentar, que la capacidad de resolver problemas se mejora con la práctica.

Para romper esos bloqueos iniciales ante un problema es conveniente ofrecerles unas pautas a seguir. Bien podría ser el conocido modelo de Polya, o cualquier otro organigrama (ver figura adjunta), que les oriente en los momentos de confusión o indecisión, de modo que conozcan las fases más usuales en la resolución de un problema, así como distintas estrategias heurísticas que pueden emplear.

Asimismo hay que saber qué problemas plantear y a quién planteárselos. En esta colección aparecen problemas muy sencillos, y otros menos sencillos, problemas con solución única y con infinitas soluciones, de manera que es posible atender a la diversidad y conseguir que todas las personas de la clase obtengan logros a medida de sus capacidades. Lo importante es que comprueben que con su esfuerzo aprenden y ello hace que se sientan bien y aumenten su confianza en sí mismos y en sus capacidades y, consecuentemente, mejore su relación con las matemáticas.

La elección del *álgebra* se debe a que es uno de los pilares básicos sobre los que se construye el edificio matemático; es, además, su lenguaje, su modo de expresarse. Tanto la geometría como el análisis o la estadística hacen uso de este lenguaje y para acceder a otras ramas de las matemáticas es preciso interpretar y comprender el lenguaje algebraico, así como emplearlo para referirse a distintos mensajes matemáticos. No en vano en el siglo XIX, tanto Poncelet como Laplace, aventuraron que el avance del análisis y de la geometría dependía en aquellos momentos de que los matemáticos se decidieran a expresarlas en el lenguaje algebraico y que sólo así despegarían y lograrían espectaculares avances, como así ocurrió.

En la actual reforma se están rescatando importantes facetas de las matemáticas que estaban algo marginadas; pero ello no significa que se devalúe la importancia del álgebra o pase a desempeñar un papel secundario. Es evidente que, en el nivel a que se refiere este trabajo, el alumnado no va a necesitar emplear complicadas expresiones algebraicas, ya que sus incursiones en geometría, análisis o probabilidad no lo requieren. Pero sí es necesario que, a su nivel, logre un correcto uso e interpretación del lenguaje matemático.

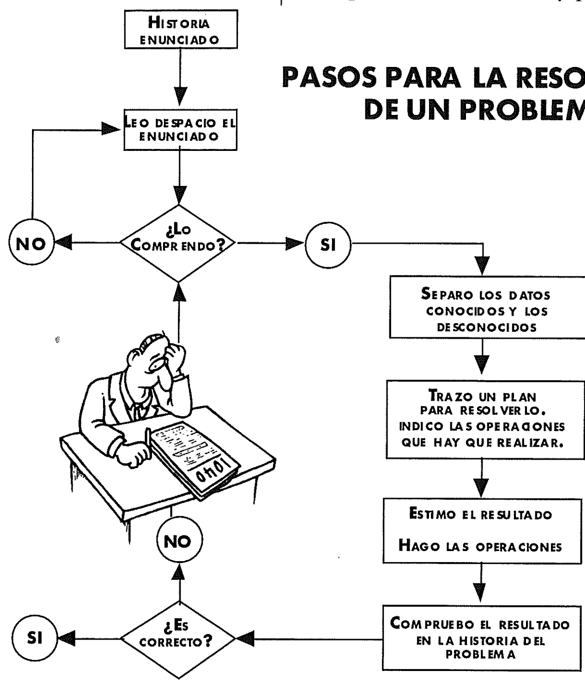
Metodología

La posibilidad de ofrecer distintas asignaturas optativas aparece en la LOGSE, y se concreta en los decretos posteriores. El *taller de matemáticas* es una de esas optativas que se puede elegir tanto en tercero como en cuarto curso de la ESO, siempre y cuando el centro la oferte. (En nuestro centro este es el tercer año consecutivo que impartimos el Taller de Matemáticas en 3.° y en 4.° de ESO).

En el taller, el alumnado adquiere una experiencia de las matemáticas desde un punto de vista diferente del que habitualmente tiene. Ofrece una vía distinta de acceso a los objetivos generales de la etapa, y no sólo del área.

La perspectiva histórica puede servir para elaborar la programación del taller. Con el telón de fondo de la historia de las matemáticas y siendo el objetivo fundamental «aprender a pensar» y, por tanto, «aprender a resolver problemas», el taller se puede estructurar en torno a los bloques de álgebra, geometría, estadística y probabilidad.

PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA



Esta colección de problemas cubre el bloque del álgebra. Son problemas que se han ido planteando y resolviendo a lo largo de la historia y que están al alcance del alumnado de este nivel. A partir de ellos y dependiendo del interés conseguido en el alumnado, se abren otras vías de trabajo e investigación que nos llevarán a profundizar más en la historia de las matemáticas.

Muchos de estos problemas pueden tratarse en 3.° y 4.° de ESO al estudiar los temas de álgebra. Evidentemente no con la misma profundidad, ya que el tiempo disponible no es el mismo al estar presente la presión del programa que es preciso cubrir. No obstante, es interesante para el alumnado asomarse a esa ventana de la historia y dedicar algún tiempo a conocer cómo se ha ido avanzando en matemáticas y quiénes han sido las personas que han aportado más en este campo de la ciencia.

La metodología que se propone es la propia del trabajo cooperativo: ofrece al mismo tiempo oportunidades para trabajar las matemáticas y para aprender a trabajar en grupo y a relacionarse. Potencia la autoestima del alumnado y favorece una actitud positiva hacia las matemáticas.

Los equipos son formados por los propios alumnos y alumnas siguiendo las directrices que marquemos entre todos. Por ejemplo, que en todos los grupos haya alumnas y alumnos, que los equipos sean homogéneos entre sí, integrando personas de distintas capacidades e intereses, etc. Este es un punto importante ya que influirá en todo el proceso.

Una vez formados los equipos se distribuye la tarea. Cada equipo tiene que tratar de resolver problemas fáciles, de dificultad media y difíciles, siendo necesario que cada integrante del equipo trabaje junto con los demás, pero presente al final su propio trabajo.

Evaluación

Evidentemente, la evaluación tiene que estar en consonancia con la metodología empleada. Debe abarcar tres aspectos:

- *Aspectos generales de la clase*: ambiente de trabajo, interés y motivación general del alumnado, distribución de las tareas, formación de los equipos...
- *Aspectos de cada equipo*: iniciativa e interés por el trabajo, cumplimiento de las tareas previstas, colaboración, confrontación de opiniones, disciplina del equipo...
- *Aspectos individuales*: integración y participación en el grupo, flexibilidad para admitir ideas distintas de las propias, capacidad y disposición para enseñar a los demás y aprender de ellos, interés por el trabajo, relaciones con sus compañeros, intervenciones en debates y discusiones, capacidad de trabajar en equipo, respeto a las demás personas, respeto a las normas del grupo, hábitos de trabajo como la finalización y presentación en el tiempo previsto, cumplimiento de las tareas encomendadas, limpieza y orden en el trabajo, sistematicidad...

La colección de problemas que viene a continuación sigue un orden cronológico [...] para observar la evolución de las distintas cuestiones que han ido planteando y resolviendo los matemáticos a lo largo de la historia

Paloma Gavilán
IES Luis de Lucena
Guadalajara

Y de cara a desarrollar en el alumnado una actitud crítica frente a su trabajo y el de sus compañeros es conveniente incorporar al proceso de evaluación la opinión propia del alumnado. Con ello conseguimos:

- Contrastar nuestra opinión con la suya.
- Implicarles en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Desarrollar el hábito de juzgar críticamente su propio trabajo y el de sus compañeros.

El alumnado rellenará la ficha de autoevaluación que elaboremos, valorando tanto el trabajo en equipo como el individual. En ella pediremos su opinión sobre las actividades realizadas, los fallos que han encontrado, lo que más y lo que menos les ha gustado, las posibilidades de mejora, etc., para obtener información que nos permita evaluar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Algunos comentarios a los problemas

La colección de problemas que viene a continuación sigue un orden cronológico en su presentación –salvo el caso de la India, cuyos resultados son contemporáneos e incluso anteriores a los egipcios– que no es necesario respetar a la hora de llevarlos al aula; sí parece oportuno seguirlo para observar la evolución de las distintas cuestiones que han ido planteando y resolviendo los matemáticos a lo largo de la historia.

Hasta la Alta Edad Media los problemas van agrupados en varios bloques: Egipto, Grecia, China y la India, indicando, en caso de que se sepa, el autor del mismo y la época en que vivió. A partir de la Alta Edad Media cada problema va encabezado por el nombre del matemático que lo trató, su lugar y fecha de nacimiento.

Los asteriscos que aparecen entre paréntesis, gradúan la dificultad del problema en orden creciente. En algunos casos la dificultad estriba en el enunciado del problema; en otros, en la necesidad de concluir el problema, introduciendo algún concepto nuevo para esta etapa, como el de las progresiones para el famoso problema indio del ajedrez. Algunos de ellos no son meros enunciados, sino que explican cómo fueron resueltos en su época, como el problema 25 del papiro de Ahmes, la multiplicación india, o la manera en que Descartes calculó geométricamente la raíz cuadrada de AB.

Aparecen enunciados muy conocidos como el del epitafio de Diofanto, los cuadrados mágicos chinos, el del barquero, el lobo, la cabra y las coles, o el modo en que Gauss, siendo un colegial, sumó los 100 primeros números naturales; junto a otros menos conocidos aunque no por ello menos atractivos: el problema indio de las perlas y las princesas, los poéticos enunciados que Baskara dedica a su hija Lilavati, o los que se plantea Diofanto en su obra Aritmética.

Egipto

Así multiplicaban los egipcios 412 x 7:

	1	2
7	2	824
	4	1648
TOTAL		2884

Multiplica empleando este método 2801 x 7

El papiro de Ahmes: problema 25 (s. XVII a.C.) (*)

«Una cantidad y la mitad de esa cantidad es igual a 16».

Los egipcios resolvían estas cuestiones mediante el *método de la falsa posición*: Supongamos que el valor de la cantidad es $x = 2$.

$$2+\frac{1}{2}\cdot 2=3 \qquad\qquad 3\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)=16$$

Multiplicando por $(5 + 1/3)$ en ambos miembros de la igualdad anterior tenemos:

$$2\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)+1\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)$$

La solución correcta por lo tanto es: $2\cdot\left(5+\frac{1}{3}\right)$

¿Cómo lo resolverías tú?

El papiro de Ahmes: problema 24 (s. XVII a.C.) (*)

«Calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19».

Intenta resolverlo por el método de la «falsa posición» y contrasta la solución resolviendo el problema de otro modo.

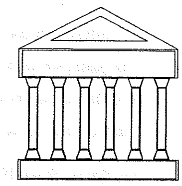
El papiro de Rhind: problema 79 (s. XVII a.C.) (*)

«Había una propiedad compuesta por siete casas; cada casa tenía siete gatos; cada gato se comía siete ratones; cada ratón se comía siete granos de cebada; cada grano había producido siete medidas. ¿Cuánto sumaba todo esto?»

El papiro de Ahmes: problema 40 (s. XVII a.C.) (***)

«Repártanse diez hogazas de pan entre cinco hombres de tal manera que las partes correspondientes estén en progresión aritmética y que además un séptimo de la suma de las tres partes más grandes sea igual a la suma de las dos más pequeñas.»

Grecia



Pitágoras de Samos (s. VI a.C.)(**)

Pitágoras de Samos, s. VI a.C., llamó *número perfecto* a aquel que es igual a la suma de todos sus divisores, excepto él mismo. El 6 es un número perfecto ya que $6 = 1+2+3$.

Así mismo, llamó *número deficiente* si es mayor que la suma de sus divisores propios. Por ejemplo, 8 es deficiente: $8 > 1+2+4$.

Por último, un *número* es *abundante* si es menor que la suma de sus divisores propios. El 12 es un número abundante, puesto que $12< 1+2+3+4+6$.

¿Cuál es el siguiente número perfecto?

¿Y el siguiente número deficiente?

¿Y el siguiente número abundante?

Los griegos resuelven ecuaciones (s. IV a.C.) (***)

Así resolvieron los griegos la ecuación que hoy escribimos como $x^2 + ax = b^2$, en el siglo IV a.C.:

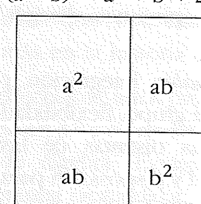
«Encontrar un segmento x tal que si al cuadrado construido sobre él se le suma un rectángulo construido sobre el mismo segmento y sobre un segmento dado a, obtengamos un rectángulo de área igual a la de un cuadrado dado.»

Aplica ese método de resolución y resuelve geométricamente la ecuación: $x^2 + 5x = 50$

Euclides (s. III a.C.) (***)

La proposición 4 del libro II de los «Elementos» de Euclides, ofrece la siguiente demostración geométrica del cuadrado de una suma:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



Trata de demostrar tú del mismo modo que:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Algoritmo de Euclides (s. III a.C.) (*)

Euclides ingenió el siguiente método para calcular el máximo común divisor de dos números:

Divide el mayor entre el menor. Si la división es exacta, el divisor es el M.C.D. En caso contrario, divide el divisor anterior entre el resto obtenido, continuando de igual modo hasta que el resto sea cero. El último divisor empleado es el M.C.D.

Por ejemplo, para calcular el M.C.D. de 1728 y 842

COCIENTES	2	19	7	3
1728	842	44	6	**2**
044	402 06	2	0	

Por tanto, el M.C.D. de 1728 y 842 es 2.

Emplea este método para calcular el M.C.D. de 824 y 36.

Criba de Eratóstenes (s. III a.C) (*)

Para obtener los 100 primeros números primos, en la siguiente tabla, a partir del 2, tacha todos los números saltando de dos en dos. A continuación, a partir del 3, tacha todos los números de tres en tres, y así sucesivamente. Los números que queden sin tachar son los números primos. Compruébalo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
92	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Epitafio de Diofanto (s. III d.C) (**)

«¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto, y los números pueden mostrar, ¡oh milagro!, cuán larga fue su vida cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además, una duodécima parte de su vida cuando de vello cubrióse su barbilla.

La séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre.

Y con profunda pena, descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años a la muerte de su hijo».

¿A qué edad murió Diofanto?

¿Con qué edad se casó?

¿A qué edad tuvo su hijo?

¿A qué edad murió su hijo?

Diofanto de Alejandría (s. III d.C.)
Aritmética, problema 19

Diofanto en su obra *Aritmética* presenta 189 problemas resueltos.

«Encontrar cuatro números de manera que la suma de tres de ellos exceda al cuarto en un número dado. Condición necesaria: la mitad de la suma de las cuatro diferencias dadas debe ser mayor que cada una de ellas. Sean las diferencias 20, 30, 40 y 50.»

¿Cuáles son los números?

Aritmética, problema 39 (***)

«Dados dos números, encontrar otro tal que las sumas de los distintos pares, multiplicadas por el tercer número, proporcionen tres números en progresión aritmética.

Números dados: 3 y 5».

Aritmética, problema 20 (**)

«Encontrar dos números de manera que el cuadrado de uno sumado al otro dé un cuadrado».

Aritmética, problema 9, libro II (***)

«Dado un número, encontrar otros tres de manera que la suma de dos cualesquiera de ellos menos el número dado sea un cuadrado, y que sea también un cuadrado la suma de los tres menos el número dado.

Sea 3 el número dado».

Aritmética, problema 11, libro IV (***)

«Encontrar dos cubos de manera que su diferencia sea igual a la diferencia de sus lados».

Aritmética, problema 20, libro V (***)

«Dividir una fracción dada en tres partes de manera que una cualquiera de ellas menos el cubo de su suma sea un cuadrado.

Sea la fracción dada 1/4».

Aritmética, problema 1, libro VI (***)

«Encontrar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa menos cada uno de los lados sea un cubo. Formemos el triángulo con x y 3».

China

Cuadrados mágicos (**)

El primer cuadrado mágico data del año 2200 a.C., y según cuenta la leyenda, fue hallado por el emperador de esa época en el caparazón de una tortuga divina que pasaba por el río Amarillo. Los cuadrados mágicos eran usados como amuletos, ya que se suponía que preservaban de muchas enfermedades.

Ordena de forma conveniente los números de este cuadrado para que sea mágico.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Pista: su suma es 34.

Los ladrones (*)

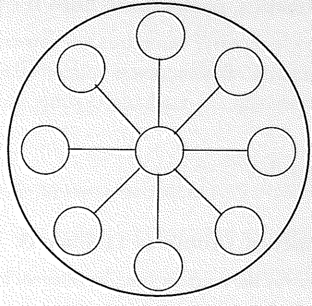
Una vez unos ladrones robaron varios rollos de tela. Alguien que pasaba por el bosque oyó hablar:

– Si nos quedamos con seis cada uno, sobran cinco rollos; pero si nos quedamos con siete cada uno, faltarán ocho.

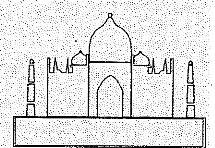
La cuestión es la siguiente: ¿Cuántos rollos de tela y ladrones hay?

La rueda mágica

Coloca los números del 1 al 9 de modo que las diagonales sumen 15.



India



Baskara (s. XII) (***)

Baskara, en el siglo XII, escribió un libro al que llamó *Lilavati*, nombre de su hija a quien iba dedicado. En él planteó cuestiones como la siguiente:

«Bella muchacha de ojos relucientes, dime tú, si conoces el arte del invertir, cuál es el número que multiplicado por tres, aumentado en tres cuartos del producto, dividido por siete, disminuido en un tercio del cociente, multiplicado por sí mismo, disminuido en cincuenta y dos, mediante extracción de la raíz cuadrada, adición de ocho y división por diez, da por último el número dos».

¿Te atreves a ayudar a Lilavati?

De nuevo Lilavati... (s. XII) (**)

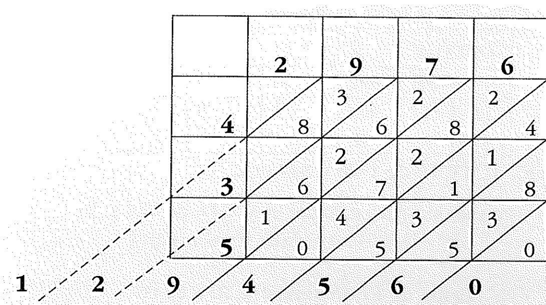
«Un quinto de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de kadamba; un tercio, sobre una flor de silindha. Tres veces la diferencia entre los dos números voló a las flores de un kutuja, y quedó una sola abeja que se alzó por el aire, igualmente atraída por el grato perfume de un jazmín y de un pandamus. Dime tú ahora, mujer fascinante, cuál era el número de abejas».

Otro problema para Lilavati... (s. XII) (*)

«Amable y querida Lilavati, de dulces ojos como los de la delicada y tierna gacela, dime cuál es el número que resulta de multiplicar 135 por 12».

Los indios inventaron para multiplicar la «regla fulmínea».

Para multiplicar 435 por 2976 disponían así los números:



Emplea tú el mismo «método fulminante» para ayudar a Lilavati.

Otro problema indio (**)

«Un pavo real estaba posado sobre un poste de nueve codos de altura. En la base del poste había un agujero de culebra. El pavo se lanza por la culebra, que está a una distancia del poste igual a tres veces su altura. Cuando la atrapa, los dos han recorrido la misma distancia. ¿A qué distancia del poste cogió el pavo a la culebra?»

El precio del ajedrez (***)

El ajedrez fue inventado por el indio Lahur Sessa, y va unido a una curiosa leyenda:

«Al rey Sirham de la India, le gustó tanto el juego que le dijo a Lahur: pídeme lo que quieras.

Lahur le pidió el trigo que resultara de, comenzando por la primera casilla del ajedrez con un grano de trigo, colocar en cada casilla el doble del número de granos que hubiera en la anterior.

Los contables del rey le dijeron que, a pesar de la riqueza de su reino, no podía cumplir el deseo de Lahur».

¿Cuánto trigo pedía Lahur?

El problema de las «catils» (***)

«Un navío que volvía de Serendibe, trayendo gran cantidad de especias, fue alcanzado por violento temporal. La embarcación habría sido destruida por las olas, si no fuera por el valor y el esfuerzo de tres marineros que, en medio de la tormenta, manejaban las velas con extremada pericia.

El capitán, queriendo recompensar a los denodados marineros, les dio cierto número de «catils». Los «catils» eran más de 200 y menos de 300. Las monedas fueron colocadas en una caja para que al día siguiente, al desembarcar el almojarife las repartiese entre los tres valientes. Sucedió, sin embargo, que durante la noche, uno de los tres marineros se despertó y penso:

– «Sería mejor que retirase mi parte. Así no tendré oportunidad de discutir con mis amigos».

Y, sin decir nada a los compañeros, fue, en puntas de pie, hasta donde se hallaba guardado el dinero, lo dividió en tres partes iguales y notó que la división no era exacta, ya que sobraba un «catil».

– «Por causa de esta mísera monedita, es probable que mañana haya riña y discusión. Será mejor sacarla».

Y el marinero la tiró al mar, retirándose cauteloso. Llevaba su parte y dejaba las que correspondía a sus compañeros en el mismo lugar.

Horas después el segundo marinero tuvo la misma idea. Fue al arca en que se depositara el premio colectivo y lo dividió en tres partes iguales. Sobraba una moneda. El marinero optó por tirarla al mar, para evitar posibles discusiones. Y salió de allí llevándose la parte que creía le correspondía.

El tercer marinero, ignorando por completo que sus compañeros se le habían anticipado tuvo el mismo pensamiento. Levantóse de madrugada y fue a la caja de los «catils». Dividió las monedas que en ella encontró, y la división tampoco resultó exacta; sobró un «catil». No queriendo complicar el reparto, el marinero la tiró al mar y regresó satisfecho a su litera.

Al día siguiente, al desembarcar, el almojarife encontró un puñado de «catils» en la caja. Sabiendo que esas monedas pertenecían a los marineros, las dividió en tres porciones, que repartió entre sus dueños. Tampoco fue exacta la división. Sobraba una moneda, que el almojarife se guardó como retribución de su trabajo y habilidad.

Es claro que ninguno de los marineros reclamó, pues cada uno estaba convencido de haber retirado su parte. Ahora bien:

¿Cuántas eran las monedas?

¿Cuántas recibió cada marinero?»

Los indios jugaban con el cuatro (*)

Con cuatro cuatros y empleando las operaciones aritméticas puedes escribir muchos números. Por ejemplo:

$$0 = 44 - 44;$$

$$1 = 44/44;$$

...

¿Hasta que número puedes llegar?

Las perlas y las princesas (**)

«Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y ordenó que el reparto se hiciese del siguiente modo: a la hija mayor correspondería una perla más un séptimo de las que quedasen; la segunda tomaría dos perlas y un séptimo de las restantes; la tercera recibiría tres perlas y un séptimo de las que quedasen: Y así sucesivamente, para las restantes hijas.

Las hijas más jóvenes del rajá presentaron su queja a un juez, alegando que por ese sistema complicado ellas serían fatalmente perjudicadas.

El juez, que era hábil en la resolución de problemas, respondió rápidamente que las demandantes estaban equivocadas, y que la división propuesta por el rajá era justa y perfecta.

EL juez tenía razón. Hecha la división, cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas».

¿Cuántas hijas tenía el rajá?

¿Cuántas perlas se llevó cada una?

Otros problemas

Leonardo de Pisa «Fibonacci» (Italia 1170-1240) (***)

El origen de la conocida serie que lleva el nombre de *serie de Fibonacci* fue el siguiente problema de los conejos:

«Una pareja de conejos al cabo del segundo mes de vida producen una nueva pareja, que a su vez, al cabo de un mes de vida produce otra nueva pareja que hace lo mismo, y así sucesivamente».

¿Cuántas parejas de conejos se obtendrán al año?

Niccolo Tartaglia (Italia 1499 - 1557) (**)

El barquero, el lobo, la cabra y las coles

«Un barquero quiere pasar de una orilla a otra del río a su lobo, su cabra y su saco de coles, y en la barca sólo caben él y una de las tres cosas...

El barquero sabe que si deja solos al lobo y a la cabra, el lobo se comerá a la cabra... Si deja a la cabra junto con el saco de coles, la cabra se comerá a las coles.

¿Qué puede hacer para pasar el río con todas sus posesiones?

Robert Recorde (País de Gales 1510 - 1558)

Problema de mezcla (***)

«Hay cuatro clases de vino de precios diferentes, uno de seis peniques el galón, otro de ocho, el tercero de once, y el cuarto de quince peniques el galón. De estos vinos, deseo una mezcla de 50 galones, de manera que cada galón valga nueve peniques. ¿Cuál será la proporción de cada vino en esta mezcla?»

Problema del caballo (**)

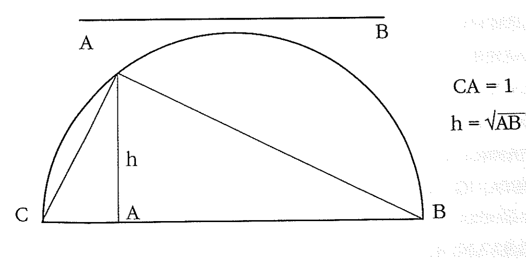
«Vendo un caballo con 4 cascos, y cada casco lleva 6 clavos, a condición de que me paguen por el primer clavo un «ob», por el segundo dos «ob», por el tercero cuatro «ob», y así sucesivamente, doblando cada vez el precio.

Ahora pregunto: ¿Cuál será el precio del caballo?»

René Descartes (Francia 1596 - 1650) (**)

Descartes contribuyó notablemente al desarrollo de las matemáticas con la geometría analítica, es decir, la relación de la geometría con el álgebra. Un ejemplo de esta aportación es el siguiente cálculo geométrico de la raíz cuadrada de la longitud AB:

¿Puedes explicarlo?



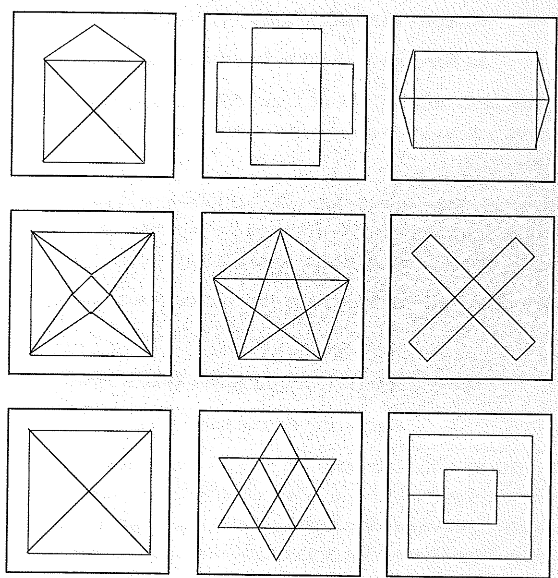
Isaac Newton (Inglaterra 1642 - 1727) (**)

«Un negociante separa al principio de cada año 100 escudos para los gastos de ese año. Todos los años aumenta su capital en un tercio y al cabo de tres años ha duplicado su dinero.

¿Qué capital tenía al inicio de los tres años?»

Leonhard Euler (Suiza 1707 - 1783)

Intenta dibujar las siguientes figuras sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por el mismo sitio. Para ello, ten en cuenta que un *vértice* es *par* si de él salen un número par de caminos, y es *impar* si de él salen un número impar de caminos.



¿Qué vértices son pares y cuáles impares? Elabora una tabla con los resultados y saca las conclusiones que te parezcan oportunas.

Leonhard Euler (Suiza 1707 - 1783)

«Un padre deja una herencia de 8600 libras a sus cuatro hijos. Según el testamento, la parte del mayor debe ser inferior en 100 libras al doble de la parte del segundo. La parte del segundo, inferior en 200 libras al triple de la parte del tercero. Y la parte del tercero inferior en 300 libras al cuádruple de la parte del más joven.

¿Cuál es la parte de cada uno?»

Karl Friedrich Gauss (Alemania 1777 - 1855) (*)

Siendo Gauss un colegial, su maestro pidió a los alumnos de la clase que calcularan la suma de los números del 1 al 100, pensando que les tendría entretenidos haciendo sumas durante un buen rato.

Apenas propuesto el ejercicio, Gauss se levantó y entregó al maestro su pizarra: ¡5050 era la solución correcta!

Intenta hacerlo tú del modo más rápido posible.

Albert Einstein (Alemania 1879 - 1955) (***)

Este problema le fue planteado a Einstein por un alumno:

«Dos profesores pasean, charlando de sus respectivas familias.

– Por cierto -pregunta uno- ¿de qué edades son tus tres hijas?
– El producto de sus edades es 36 -contesta su colega-, y su suma, casualmente es igual al número de tu casa.

Tras pensar un poco, el que ha formulado la pregunta acota:

– Me falta un dato.
– Es verdad -concede le otro-. Me había olvidado de aclararte que la mayor toca el piano».

¿Qué edades tienen las tres hijas del profesor?

Bertrand Rusell (País de Gales 1872 - 1970)
Paradoja del barbero

«En una isla el barbero afeita a todos aquellos que no se afeitan a sí mismos.

¿Quién puede afeitar al barbero?».

Bibliografía

Resolución de problemas

ALEM, J. P.: *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático*, Gedisa, Barcelona.

ALEM, J. P.: *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*, Gedisa, Barcelona.

GAIRÍN, J. y F. CORBALÁN (1987): *Problemas a mí*, Edinumen, Madrid.

GARDNER, M. (1975): *Paradojas ¡ajá!*, Labor, Barcelona.

GARDNER, M.: *Inspiración ¡ajá!*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1991): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1984): *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona.

LANDER, I. (1985): *Magia matemática*, Labor, Barcelona.

MASON, J. y otros (1988): *Pensar matemáticamente* Labor, Barcelona.

PERELMAN, Y. (1968): *Matemáticas recreativas*, Martínez Roca,

PIZARRO, F. y otros: *Aprender a razonar*, Ed. Alhambra.

POLYA, G. (1945): *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México.

SMULYAN, R.: *¿Cómo se llama este libro?*, Ed. Cátedra, Madrid.

VIVES, P.: *Juegos de ingenio*, Ed.Martínez Roca,

Historia de las matemáticas

ALEKSANDROV, y otros (1973): *La matemática: su contenido, método y significado*, Alianza, Madrid.

BOYER, C. (1968): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.

BOURBAKI, N. (1969): *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza, Madrid.

CARLAVILLA, J. L. y G. FERNÁNDEZ (1988): *Historia de las matemáticas*, Ed. Consejería de Educación de Castilla La Mancha.

COLERUS, E. (1973): *Breve historia de las matemáticas*, Doncel, Madrid.

COLLETTE, J. P. (1973): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.

IFRAH, G. (1985): *Las cifras*, Alianza, Madrid.

MEAVILLA, V. y J. A. CANTERAS (1984): *Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas*, ICE, Zaragoza.

PARADIS, J. y otros: *Historia de las ideas algebraicas*, PPU.

RADICE, L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia. Barcelona.

SUMA 22
junio 1996, pp. 91-95

Algunas seducciones entre poesía y matemáticas

Emilio Pedro Gómez

MISCELÁNEA

Poesía y matemática comparten, en cierto modo, historias paralelas. Matemáticos como Hardy, Poincaré,... reclaman un lugar al subconsciente en la creación matemática. Para Penrose, además, la guía en la elección, entre las muchas posibilidades imaginadas, es la belleza de las ideas producidas, como en la poesía. Del lado de los poetas, encontramos también una referencia a las matemáticas, basada en el paralelismo entre ambas áreas, para describir el objeto de la actividad poética.

A uno siempre le extraña su sorpresa. Cuando alguien se entera repentinamente de que escribo poemas, sabiendo que soy profesor de matemáticas, (o a la inversa), suele brotar un gesto ineludible: «¡Imposible!». La naturalidad metodológica con que puede transitarse de determinada fase de la resolución de un problema, al afrontamiento del arranque de un verso (o a la inversa), parece inconcebible para mentes anacrónicamente escindidoras del saber en dos categorías disjuntas de «Ciencias» y «Letras».

Uno ha percibido siempre cierto entrecruce disonante (pero enriquecedor) de venas conceptuales; una imaginería que, como un libro de espejos que se cierra o una gaviota en pos de su reflejo sobre el mar, tiende en ocasiones a fundirse; materiales lingüísticos y signos comunes, dirigidos a campos de batalla imaginativa diferentes; afinidades no siempre posibles de explicar... Poco a poco la propia experiencia, y la lectura de matemáticos y poetas que explican sus respectivos procesos de investigación y creación, van confirmando y precisando las iniciales –y persistentes– sensaciones.

Dos universos autónomos

Tal vez, uno de los paradójicos puntos de encuentro entre Poesía y Matemática, radique en la potencia de sus autonomías. Si las matemáticas laboran con entes abstractos, levantando estructuras conceptuales y lógicas despreocupadas de «su realidad», también la poesía se distancia de la prosa, en su intrínseca intención de indagar el «más allá» de las normas del lenguaje, sin ataduras, sin ninguna obligación de ser traducción de nada real. Cantor afirmaba: «La esencia de las matemáticas es su libertad»; otro tanto podría decirse de lo que representa la poesía, en el amplio espacio de la literatura. Matemáticas y Poesía constituyen dos colectivos de pensamiento dotados de sentido propio, y capaces de alcanzar la plenitud (¿científica-estética?) en sí mismos. Esta potencia para definir ámbitos exclusivos, amiga a matemáticos y poetas más de lo aparentemente convenido.

Algunos paralelismos históricos

Una observación integradora y atenta de la historia puede resultarnos clarificadora. La evolución de las dos «disciplina» presenta coincidencias tan inesperadas como deslumbrantes. Detengámonos a considerar algunos ejemplos: la exclusión del V postulado de los *Elementos* de Euclides («Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una sola recta que pasa por este punto y es paralela a la recta dada»), por parte del matemático ruso N. J. Lobachevsky, supuso una ruptura de 2.000 años de «imperialismo» de la geometría euclídea. Las nuevas estructuras lógico geométricas, abrieron desconocidos ámbitos en la investigación científica, y vinieron a dar frutos tan saludables como la teoría de la relatividad.

Aproximadamente por la misma época (principios del siglo XIX), se produce una revolución artística, de evidentes similitudes. El romanticismo rompe con el racionalismo del siglo anterior, declara la primacía de lo subjetivo frente al objetivismo reinante, supera el clasicismo procedimental de la escritura poética, adentrándose por primera vez en los dominios subterráneos del sueño y del pensamiento inconsciente, abriendo así el cerrado sistema occidental de creencias, a unos submundos desconocidos y recónditos de la propia conciencia.

Unas décadas después, la aparición de la geometría «esférica» de B. Riemann, que excluye el primer postulado de Euclides («Por dos puntos sólo se puede hacer pasar una recta»), se ve «contestado» en el ámbito literario por la aparición de dos poetas, Lautréamont y Rimbaud, que, llegando más allá de los postulados del romanticismo, levantan un nuevo lenguaje poético, poblado de imágenes oníricas, transgresor de la sintaxis convencional, empeñado en describir «lo inaudito e innombrable», que iría a desembocar hacia 1920 en el nacimiento del dadaísmo, umbral del movimiento surrealista del que el arte poético actual es tan deudor.

Tal vez los protagonistas, matemáticos y poetas, de estas paralelas revoluciones, nunca llegaron a conocerse, ni siquiera a saber de sus escritos. Pero ambos, hijos de un tiempo histórico común, mostraron sensibilidades muy afines; «actuaban bajo la misma consigna: inquietar sin tregua a la razón».*

...quienes opinan que la ciencia en general, y las matemáticas en especial, operan con unas coordenadas y trayectoria mentales que se encuentran en las antípodas de la creación y el pensamiento artísticos, se quedarán sorprendidos ante el testimonio de importantes matemáticos como Poincaré, Hadamard, Einstein, Hardy, Littlewood...

* La cita, así como buena parte de los paralelismos históricos analizados, están extraídos de un texto del profesor del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México, José Luis Aragón.

Presencia del inconsciente

A pesar de lo expuesto, podría parecer, en una visión superficial o apresurada, que matemáticos y poetas trabajan ámbitos de intersección nula. Sería misión de la Matemática el estudio racional de lo consciente, reservándose la libre indagación en los dominios del subconsciente a la Poesía. A quienes opinan que la ciencia en general, y las matemáticas en especial, operan con unas coordenadas y trayectoria mentales que se encuentran en las antípodas de la creación y el pensamiento artísticos, se quedarán sorprendidos ante el testimonio de importantes matemáticos como Poincaré, Hadamard, Einstein, G. H. Hardy, J. E. Littlewood... Todos coinciden en señalar el uso de la intuición y el protagonismo del inconsciente en la investigación matemática:

La actividad inconsciente juega a menudo un papel decisivo en el descubrimiento matemático; periodos de esfuerzo inefectivo son a menudo seguidos, después de intervalos de descanso o distracción, por momentos de súbita iluminación... (G. H. Hardy)

La incubación es el trabajo del subconsciente durante el tiempo de espera... La iluminación puede ocurrir en una fracción de segundo... (J. E. Littlewood)

Cualquier poeta podría trasladar estas afirmaciones a la descripción de su propio proceso de trabajo creativo. Como se ve, estos matemáticos no sólo no desprecian la atención y estímulo de la actividad del inconsciente, sino que alguno de ellos, llega a confrontarla con el pensamiento consciente, sin que el primero, parezca salir muy desfavorecido del embite:

El yo subliminal no es en forma alguna inferior al yo consciente. No es puramente automático, es capaz de discernimiento, posee tacto, delicadeza; sabe escoger, adivinar. ¿Cómo diría? Adivina mejor que el yo consciente, puesto que logra llegar allí donde éste fracasó. En una palabra, ¿no es superior al yo consciente? (Poincaré)

Los testimonios de estos matemáticos, no se limitan a poner de manifiesto la intervención del subconsciente en sus actividades de investigación, ni a valorar como decisiva esa intervención, sino que intentan indagar los procesos mentales subyacentes:

> *Que esas iluminaciones súbitas, que pueden ser llamadas inspiraciones, no pueden producirse meramente por azar es ya evidente...* (Hadamard)

Intentan explorar en sus propias experiencias de trabajo, diferenciando los avances «incrementales», de los progresos creativos:

> *La investigación matemática no trata solamente de aplicar reglas y de elaborar el mayor número de combinaciones con unas leyes fijas. Las combinaciones obtenidas de este modo serian extremadamente numerosas, inútiles y embarazosas. El verdadero trabajo del creador consiste en escoger entre estas combinaciones...* (Poincaré)

¿Cómo elige el subconsciente de estos matemáticos? ¿Qué criterios le orientan? ¿Qué señales de tráfico dirigen la intuición? Sus respuestas no parecen dejar lugar a ninguna duda:

> *La invención es elección; esta elección se halla gobernada de forma imperativa por el sentido de la belleza científica* (Hadamard)

> *Podría argüirse que en la matemática y en las ciencias, los criterios estéticos son meramente incidentales, dominándolo todo el criterio de la «verdad». Sin embargo, parece imposible separar uno del otro... Mi impresión es que la fuerte convicción de la validez de un relámpago de inspiración... está conectada muy fuertemente con sus cualidades estéticas. Una idea bella tiene una probabilidad mucho mayor de ser una idea correcta que una idea fea...* (Roger Penrose)

Así que era eso. La persecución de la belleza, aun inconscientemente, se filtra en la más exacta de las ciencias, polarizando los criterios de selección y asociación de ideas. En sus procedimientos creativos, arte y ciencia, parecen compartir ciertas aceras. Al escuchar las narraciones de estos adentramientos en subterráneos no evidentes de la actividad matemática, uno comprende mejor las cercanías de lo aparentemente lejano, el mutuo arte de adivinar y transmitir lo nunca expresado, afines a matemáticos y poetas. No es extraño entonces que alguien se haya atrevido a definir las matemáticas como «el arte reducido al esqueleto puro», o que Herbert Read afirme tan escueta como tajantemente: «El matemático es un artista abstracto». Resulta fácil encontrar argumentos próximos a los aquí expuestos, entre autores que han reflexionado sobre la filosofía de las matemáticas. Tomamos prestadas unas palabras de Carmina Cañón, que pueden servir como representación y síntesis de los mismos:

La persecución de la belleza, aun inconscientemente, se filtra en la más exacta de las ciencias, polarizando los criterios de selección y asociación de ideas.

> *La creación de los símbolos formales de la matemática ha sido un proceso artístico de creación que tiene su origen en lo intuitivo y es expresión de intuiciones matemáticas anteriores, de un modo semejante a como un cuadro de pintura es expresión de observaciones intuitivas de la realidad. Características de este arte son claridad, sencillez y armonía.*

En consecuencia, no debiera de extrañarnos que algunos matemáticos, partiendo de la indagación sobre el propio pensamiento, hayan alcanzado las costas de la poesía, y se hayan aventurado a indagar en ella sus instrumentos potenciadores de la originalidad. El matemático Stanislaw Ulam afirma que «sólo se es consciente de algo que en el cerebro actúa a modo de compendiador o globalizador de los procesos en desarrollo... Sólo puede comunicarse, de viva voz o por escrito, la cadena unidimensional de silogismos que constituye el pensamiento... Pero si quiero hacer algo nuevo u original, de nada valen entonces las cadenas de silogismos». Sus reflexiones se extienden entonces al utillaje poético, en búsqueda de mecanismos potenciadores de la creatividad, de utilidad trasladable a su propia actividad matemática: «De muchacho pensaba que la rima de un poema tenia por misión descubrir lo velado, por la propia necesidad de hallar la palabra que rimase. Esta tarea fuerza a hacer nuevas asociaciones y garantiza el liberarse de los encadenamientos rutinarios y de las inercias mentales. Llega a ser, valga la paradoja, una especia de mecanismo productor de originalidad automático...». Puede resultar extraño que estas reflexiones provengan de un matemático, y no de un poeta, pero sólo nos pone de manifiesto, una vez más, esa cierta comunidad de intenciones entre ambos (en este caso referida a la búsqueda de generadores de originalidad que los dos necesitan).

Coincidencia de objetos

Evidentemente Poesía y Matemática, constituyen lenguajes propios y diferenciados, que dinamizan un armamento de conceptos muy distintos. Sin embargo, es posible detectar determinados puntos de confluencia. Uno de ellos es el asunto del infinito. Una especie simultánea de patata caliente y estrella polar en ambas disciplinas. Con diferentes métodos y objetivos, desde al antes y el después de lo cuantificable, se procuran aproximaciones, se provocan trasiegos de ideas y sensaciones que, en cualquier caso, como habitantes de riberas opuestas de un mismo río, producen familiaridad y, a veces, provechosas vecindades. Algunos moradores de la literatura y de la matemática, de vez en cuando, se aventuran a tomar una barca que, aunque no alcance la otra orilla, aporta nuevas percepciones, cuando no el simple goce del viaje. Un simple ejemplo: ¿qué mejor manera de introducir en una clase de bachillerato los números transfinitos, que la lectura de un par de páginas de *El Aleph* de Borges?

Otro importante campo de encuentro se produce en el papel de la «imagery» o «imaginabilidad», esto es, en lo referente a la construcción, representación y transformación de imágenes, tan inherente a las matemáticas y, en concreto, a la geometría. Estudios recientes detectan una estrecha y complementaria relación entre el razonamiento analítico y el espacial, e insisten en la utilidad de la «imagery» en la Resolución de Problemas. El aprendizaje de las matemáticas, y muy singularmente el de la geometría, se encuentra íntimamente ligado con la capacidad de crear imágenes mentales. Y ¿no es esa precisamente la capacidad esencial para la creación de metáforas? Hay quien considera que la poesía es mucho más imagen que discurso. Si bien existen diversas concepciones de lo que es y no es poesía, todas coinciden en el uso de la imagen, de la analogía visual, de la metáfora, como uno de sus elementos constituyentes y definidores.

Después de lo expuesto, no debiera extrañarnos la aseveración de G. H. Hardy:

El matemático, como el pintor o el poeta, es un maestro de la forma, del diseño.

Poetas imantados por las matemáticas

Hasta ahora, hemos presentado con profusión, citas de matemáticos; nos hemos posicionado preferentemente en su mundo, hemos detectado y transmitido amores de matemáticos por objetos o procedimientos más aparentemente poéticos. Pero ¿qué ocurre con los poetas? ¿Se aproximan con qué recelo o interés a la más abstracta de las ciencias? Uno, ha usado –y tal vez abusado– de incursiones en lo matemático, para justificar su actividad poética. Por ejemplo, con la intención de diferenciar la poesía de la prosa, e insistiendo en la específica misión poética de expresar lo inefable, ha llegado a exponer que si

¿qué mejor manera de introducir en una clase de bachillerato los números transfinitos, que la lectura de un par de páginas de El Aleph *de Borges?*

lo narrativo puede expresar de 1 a n, el campo expresivo de la poesía podría alcanzar de 0 a ∞ ¿Es extensible este tipo de «familiaridades» al resto de poetas?

Observando el reciente panorama poético español, podemos encontrar ciertas respuestas. Autores y críticos se hallan divididos en dos grandes, inexactos, interseccionados, no excluyentes ni dicotómicos, grupos. En un bando están los que apuestan por una poesía abstracta, no figurativa, con frecuentes elementos herméticos, dotadas de *un máximo de* ambigüedad –dicen– y *un mínimo de automatismo*. Una poesía que fue más o menos hegemónica en los años setenta (a esta concepción de la poesía resultan más directamente aplicables, los argumentos presentados en este artículo). Sin duda alguna, el poeta y crítico Juan Carlos Suñén representa uno de los miembros más significados de esta tendencia. Al leer sus artículos literarios, no resulta extraño encontrar en la bibliografía citada, el texto de algún matemático. E incluso sugiere:

...imaginar el poema como algo parecido a eso que los matemáticos llaman un número irracional, esto es: una raíz algebraica que no puede expresarse en término finitos, sino sólo en forma de ecuación. Se encuentra pues fuera de lo decible-conmensurable, pero a menudo contiene más exactitud y verdad que cualquier número entero y, desde luego, sirve para resolver ecuaciones, arrojando sobre ellas la luz que los cálculos precisaban.

Puede resultar curioso, y ser considerado como excepcional, este aventuramiento en lo matemático para definir lo poético. Comprensible si acaso, entre los autores pertenecientes a este grupo, que consideran a la poesía como una construcción lingüística autónoma que no significa, sino que es.

Claro que si nos pasamos al otro bando, la sorpresa no cesa. Es el de la poesía «de la experiencia», más realista, más comúnmente comprensible, no necesariamente autobiográfica aunque suela describir una situación –real o imaginada– en un momento más o menos preciso, más clara y comunicativa. Una poesía que algunos consideran que fue hegemónica en los años ochenta. Juan Bonilla, incisivo, ingenioso y lúcido poeta, pertenece a este grupo. También él, desde una diferente perspectiva, se apoya en las matemáticas, para describir su poética:

Yo tenia un profesor de matemáticas que nos obligaba a jugar con las ecuaciones. Nos ofrecía los resultados y a partir de éstos nosotros teníamos que presentarle las ecuaciones de las cuales aquéllos acabarían derivándose

X igual a 7

Y igual a -3

Z igual a 6,5.

Con tales datos había que conseguir una ecuación. Llamábamos a ese ejercicio «construcción de ecuaciones», todos le temíamos porque francamente nos ponía a prueba como ningún otro... El profesor dejó claro que valoraría, más que cualquier otra cosa, la imaginación. Claro que nosotros no podíamos comprender cómo en una disciplina tan poco dada al malabarismo como las matemáticas, se nos iba a exigir que derrocháramos imaginación...

Cada vez que escribo un poema tengo la sensación de estar construyendo como entonces ecuaciones a partir de unos resultados que me ha ofrecido la realidad...

Creo que las matemáticas y la poesía tienen bastante que ver (y no sólo porque Felipe Mellizo haya dejado escrito que el poema que más le ha emocionado en su vida haya sido el desarrollo de la ecuación de Einstein....). Tanto las matemáticas como la poesía pretenden expresar lo que existe mediante lo que no existe, o sea, mediante esos elementos que proceden de la imaginación.

El fantástico base por altura partido por dos no pasa de ser un producto de la imaginación, es cierto, pero no lo es menos que para calcular el área de nuestro jardín triangular lo más económico será operar con esa fórmula. De la misma manera puede ser cierto que el verso «la noche es interminable cuando se apoya en los enfermos» no pase de ser una abstracción si la analizamos con el bisturí de la razón, pero en sus nervios ese verso guarda –para mi al menos– la expresión exacta de lo que en noches de insomnio me sucede...

Resulta evidente que su concepto de poesía referida a un concreto existente, como una búsqueda de preguntas a las múltiples respuestas que la realidad ofrece, difiere de la de Juan Carlos Suñén. Y sin embargo, su meridiana descripción coincide con la suya en el establecimiento de paralelismos entre dos áreas del saber y del arte, tan aparentemente ajenas.

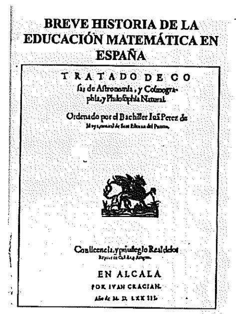
Existen pues aproximaciones y seducciones mutuas entre poetas y orfebres de las ideas matemáticas. Después de esta larga exposición, espero que os resulte más difícil sorprenderos, si os encontráis, como a mí me ha sucedido, ante un matemático integrado en el jurado de un premio de poesía (Alejandro Ratia, narrador y crítico de arte en un periódico de Aragón). O descubráis que uno de vuestros poetas preferidos, Jorge Riechmann (a cuya lectura os invito a acercaros), resulta ser un matemático emboscado en unos versos tan sociales como inteligentes. Sirva como despedida uno de ellos, que puede recoger ese hálito común, constatado tal vez en este artículo, a quien investiga en matemáticas y a quien escribe poemas:

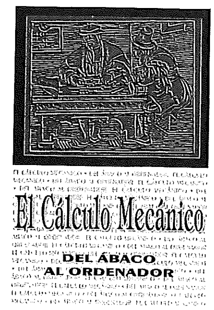
Lento latido, más en el pecho sueña un sol.

Emilio Pedro Gómez
IES Pilar Lorengar
Zaragoza
Autor de los libros de poemas
Solamar
Meridiano
Álbum de votos
La nieve horizontal de los vilanos

PUBLICACIONES
VII JAEM

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»





- *Actas 7.as Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* (1.500 pts.).
- *Fotografía y matemáticas.* (400 pts.).
- *Breve historia de la educación matemática en España.* (400 pts.).
- *El Cálculo Mecánico. Del ábaco al ordenador.* (250 pts.).
- *Rutas matemáticas por Madrid.* (600 pts.).
- *Medidas tradicionales y de oficios.* (500 pts.).
- *Las Matemáticas en los sellos de correos.* (250 pts.).
- Vídeo: *Rutas matemáticas por Madrid.* (1.000 pts.).

Solicitud de pedidos contra reembolso (500 pts. de gastos de envío):

SMPM «Emma Castelnuovo»
Apartado de Correos 14.610
28080-MADRID

SUMA 22
junio 1996, pp. 97-102

¿Pueden las matemáticas rimar?

Jose Muñoz Santonja
Carmen Castro Rodríguez
María Victoria Ponza

MISCELÁNEA

Un matemático no es digno de ese nombre, si no es un poco poeta.

Weierstrass en carta a Sonya Kovaleski

Las matemáticas y la poesía han estado a menudo mucho más unidas de lo que a simple vista pudiera parecer. No solamente matemáticos ilustres han expresado en poemas sus sentimientos, sino que grandes poetas han hecho referencia a las matemáticas en sus versos. En este artículo recogemos ejemplos de matemáticas en poesías realizadas por poetas, matemáticos, profesores y alumnos.

Todas aquellas personas que a lo largo de sus estudios escolares han «sufrido» con las matemáticas, suelen tener horrendas pesadillas en las que son perseguidos por raíces cuadradas, intersecciones de conjuntos, tablas de logaritmos y absurdos problemas en los que unas veces hay un conjunto de grifos que, bien juntos o por separado, derrochan agua sin motivo aparente y otras veces una persona, en lugar de reconocer públicamente su edad (aunque se quite algún añito), plantea un esperpéntico enunciado, con saltos adelante y atrás en el tiempo y que, al resolverlo, siempre resulta que un padre tuvo a un hijo en una edad fisiológicamente imposible.

Las matemáticas siempre han aparecido para muchos estudiantes como algo completamente incomprensible y alejado de la realidad, por eso, cuando por fin dejan de estudiar matemáticas, experimentan tal alivio que procuran olvidarse, cuanto antes mejor, de lo que a duras penas aprendieron. Quedan así, las matemáticas relegadas a un mundo aparte, donde sólo tienen cabida unos pocos elegidos sin nada mejor que hacer que dedicarse a cosas tan abstractas e irreales. Por eso no es de extrañar que cuando se pregunta sobre la relación que puede haber entre las matemáticas y otros elementos como la prensa, el teatro, la televisión o la poesía, obtengamos como respuesta un asombro inmenso. No parece posible casar las matemáticas con otras formas de expresión humana. En general, se considera que la «aridez» de esta materia está reñida con la sensibilidad necesaria, por ejemplo, para escribir una composición literaria. Desgraciadamente esta opinión no es exclusiva de gente con poca formación pues, al comentar con compañeros educadores que estábamos preparando este trabajo, muchos profesores (incluso de matemáticas) nos miraban de mala manera, cuando no soltaban directamente una carcajada como dando a entender que éramos víctimas de una enajenación mental transitoria.

Sin embargo, no es difícil encontrar ejemplos en los que las matemáticas y la literatura conviven en franca armonía en la misma persona. Un ejemplo evidente es el profesor de matemáticas del siglo XIX Charles L. Dodgson, que más que por sus libros de lógica, es universalmente conocido como autor de *Alicia en el País de las Maravillas* bajo su seudónimo de Lewis Carroll. O, por ejemplo, la matemática rusa Sonya Kovalevsky que, aparte de enseñar matemáticas, escribió en periódicos y también publicó una novela. Incluso por poner un ejemplo más cercano a nosotros, comentar que el más olvidado de nuestros premios Nobel de literatura, José de Echegaray, aparte de eminente político también fue matemático y economista.

Con los tres ejemplos anteriores (de muchos que se podrían citar) se comprueba que hay matemáticos que se han adentrado en la creación literaria; pero el recíproco de ese «teorema» también es válido. Muchos escritores reconocidos han utilizado en sus obras literarias ideas y conceptos meramente matemáticos. La lista de estos escritores es una sucesión no acotada superiormente pues, a poco que se rebusque en las obras literarias, se pueden encontrar estas referencias. Y no sólo en escritores poco conocidos, sino en figuras de primera fila como Bertrand Rusell o Jorge Luis Borges.

Como en este trabajo pretendemos hablar de la relación entre matemáticas y poesía, vamos a poner varios ejemplos de poetas reconocidos que han utilizado elementos matemáticos en sus poemas. Quizás el caso más citado en los artículos matemáticos sean las poesías de Rafael Alberti, tanto la relacionada con números en general (*El ángel de los números*) como la siguiente dedicada a la sección áurea.

A LA DIVINA PROPORCIÓN
A tí, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A tí, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí, divina proporción de oro.

En su libro *Poemas amorosos árabes* el poeta Nizar Kabbani tiene un poema titulado «De las Cien cartas de amor» del cual hemos extraído el siguiente trozo:

No tienes tiempo real fuera de mi ansiedad,
yo soy todo tu tiempo.
No posees dimensiones precisas
mas allá de mis brazos extendidos.
Yo soy tus dimensiones por entero:
tus círculos, tus ángulos,
tus curvas
y tus rectas.
El día en que te adentraste en los bosques de mi pecho
fuiste a la libertad.
Cuando saliste de ellos,
fuiste esclava.
Pudo comprarte el jeque de la tribu

Por su parte el poeta Pedro Salinas tiene también varias poesías con referencias matemáticas. Como ejemplo, de su colección de poemas *Segundo azar* hemos extraído éste.

NÚMEROS
Tenías abecedario
innumerables de estrellas;
clara
ibas poniendo la letra,
noche de agosto.
Pero yo, sin entenderla,
misterio, no la quería.
Aquí en la mesa de al lado
dos hombres echaban cuentas.
Más bellas que los luceros
fúlgidas, cifras y cifras,
cruzaban por el silencio,
puras estrellas errantes,
señales de suerte buena
con largas caudas de ceros.
Y yo me quedé mirándolas:
–¡qué constelación perfecta
tres por tres nueve!– olvidado
de Ariadna, desnuda allí
en islas del horizonte.

Por último citar del poema «Canto el cuadrado divino» incluido en la obra *Hojas de hierba* de Walt Whitman sólo los primeros versos que dicen:

Canto el cuadrado divino, avanzo desde el Único, desde los lados,
Desde lo viejo y lo nuevo, desde el cuadrado enteramente divino,
Sólido, de cuatro lados (todos los lados necesarios), desde este lado soy Jehová,
Soy el viejo Brahma y soy Saturno;

Claro que no siempre que los literatos y poetas hacen referencia a las matemáticas, es en tono laudatorio. En su artículo «Mathematics and poetry», John Fauvel hace referencia a unos versos que escribió en 1846 Victor Hugo recordando sus experiencias infantiles y juveniles con las matemáticas y que dicen:

Vivía sacrificado a los números, negros ejecutores;
Era alimentado a la fuerza con álgebra,
Me ataron a un potro de tortura
Me torturaron desde las alas al pico
Con el terrible tormento de X e Y:...

Vamos ahora a tratar el tema desde el lado matemático. Si atendemos al poeta León Felipe que nos dice:

Sistema, poeta, sistema.
Empieza por contar las piedras,
luego contarás las estrellas.

ha habido a lo largo de la historia varios autores que han realizado un análisis matemático de la poesía. Fauvel en su artículo anterior cita, entre otros, a Sylvester, Birkhoff o Markov.

Nosotros queremos hacer referencia aquí al caso de Matila C. Ghyka, gran amigo del poeta Paul Valéry (que le prologó alguno de sus libros) y que en el volumen I de su obra *El número de oro*, dedica casi por completo su quinto capítulo «Del ritmo al encantamiento» al estudio de la prosodia francesa. Durante todo el capítulo y usando versos de poesía francesa (entre otros de Verlain, Victor Hugo, Paul Valéry, Rousseau) estudia el ritmo tónico y las medidas de las sílabas o pies en prosodia llegando a definir (tomándolo de Pius Servien) el *número representativo* en el que se dan: «Todas las propiedades rítmicas del texto (desde el punto de vista tónico y aritmético)». Partiendo de que la inspiración poética se distingue por los dones de la imagen y del número, después de hacer el estudio aritmético anterior, termina el capítulo trabajando sobre la metáfora usando versos en inglés (de varias obras de Shakespeare) y en italiano (de la *Divina Comedia* de Dante).

Como dice Puig Adam «...no es posible la existencia de un verdadero matemático, de un matemático creador, sin imaginación, sin fantasía».

Por citar otro ejemplo más reciente, el profesor Arístides Camargos publicó en 1989 en el boletín de la Universidad de Blumenau (Brasil) un estudio titulado: «Modelos matemáticos de letras de música» en el que usando letras de músicas populares (incluyendo el *Imagine* de John Lennon) busca conseguir una figura o un gráfico, que represente las estructuras desarrolladas en las letras que analiza.

Pero pasemos a continuación a aspectos más poéticos.

A lo largo de la historia, los matemáticos han utilizado los poemas de muy diversa forma. Como dice Puig Adam en el artículo donde cita la frase que abre este artículo, «...no es posible la existencia de un verdadero matemático, de un matemático creador, sin imaginación, sin fantasía». Así, hay veces que los matemáticos han puesto sus descubrimientos en verso para recordarlos más tarde, como indica Tartaglia a Nicolas Cardano en 1539 cuando, hablando de la solución de la ecuación cúbica, dice: «para poder acordarme del resultado en cualquier circunstancia imprevista lo he puesto como verso con rima, porque si no hubiera tomado esta precaución, frecuentemente lo habría olvidado». Hubo autores que eligieron la poesía creyendo que así perdurarían mejor sus versos, como ejemplo de 1600, la poesía de Thomas Hylles siguiente:

Addition of fractions and likewise substraction
Requireth that first they all have like bases
Which by reduction is brought to perfection
And being once done as ought in like cases,
Then add or substract their tops and no more
Subscribing the base made common before.

Cuya traducción sería:

La suma de fracciones y así mismo la resta
requiere que primero todos tengan las mismas bases
que por reducción se lleva a la perfección,
y una vez hecho como se debe en casos semejantes,
entonces suma o resta sus partes de arriba y ya no más
que subscribir la base común hallada antes.

Son especialmente curiosos los poemas que, aunque no hacen referencia a las matemáticas, tienen «sentimientos» matemáticos ocultos...

Son especialmente curiosos los poemas que, aunque no hacen referencia a las matemáticas, tienen «sentimientos» matemáticos ocultos, por ejemplo, es posible encontrar poemas en los que contando las letras que forman cada palabra, se obtienen las primeras cifras del número π. Conocemos varios casos en inglés o en español. Por poner un ejemplo, en el periódico *Diario 16* de 20-09-89 se hacía referencia al colombiano R. Nieto que en su libro

Los números incluía el siguiente poema (donde debemos tomarnos la licencia de incluir la primera coma en el cómputo de los números):

Soy , lema y razón ingeniosa
De hombre sabio que serie preciosa
Valorando enunció magistral.
Con mi ley singular bien medido
El grande orbe por fin reducido
Fue al sistema ordinario cabal.

Otra forma de usar poesía en matemáticas es la de expresar problemas matemáticos a través de los versos. En muchos libros de texto se pueden encontrar variados ejemplos. Quizás los más conocidos son el clásico epitafio de la tumba de Diofanto o los también extendidos problemas sacados del *Lilavati*, libro hindú del siglo XII. Hasta en nuestros días suele ser corriente encontrar problemas propuestos mediante versos, como por ejemplo los que solemos incluir dentro de los problemas de ingenio, muy usados en olimpiadas, pasatiempos o semanas culturales de los centros. Como el siguiente, donde se juega hábilmente con el singular y el plural de la palabra cereza:

A un cerezo yo subí
donde cerezas había
y cerezas no cogí,
y cerezas no dejé.
¿Cuántas cerezas hallé?

O este otro ejemplo más «ripioso»:

Un bosquecillo habéis de plantar, mi señor
si queréis demostrar que soy vuestro amor.
Esta arboleda, aunque pequeña, ha de estar compuesta
por 25 arbolitos en 12 filas bien dispuestas
y en cada fila cinco arbolitos plantaréis
o mi linda carita nunca más veréis.

Pero los poemas pueden hacer referencia a las matemáticas de una forma más «poética». Conocemos algún caso escrito por poetas no matemáticos, aunque también en el campo de los matemáticos podemos encontrar ejemplos. Para que veamos que los hay recientes y cercanos y así mismo demostrar nuestra admiración por su autor, al que tenemos el placer de conocer hace años, hemos seleccionado un poema del profesor canario Luis Balbuena Castellano incluido en su artículo «Yo soy el cero» aparecido en el número 2 de la revista *Números* de la Sociedad Canaria «Isaac Newton».

Otra forma de usar poesía en matemáticas es la de expresar problemas matemáticos a través de los versos.

EL CERO, EL UNO Y EL DOS
Graves autores contaron
que en el país de los ceros
el uno y el dos entraron
y desde luego trataron,
de medrar y hacer dinero.
Pronto el uno hizo cosecha,
pues a los ceros honraba
con amistad muy estrecha,
y, dándoles a derecha,
así el valor aumentaba.
Pero el dos tiene otra cuerda:
¡Todo es orgullo maldito!
y con táctica tan lerda
los ceros pone a la izquierda
y así no medraba un pito.
En suma: el humilde uno
llegó a hacerse millonario
mientras el dos importuno,
por su orgullo cual ninguno
no pasó de perdulario.

Hasta el momento hemos puesto ejemplos de poesías realizadas por poetas o por matemáticos, pero pensamos que la capacidad de tratar esta materia en unos versos está al alcance de cualquiera y muy especialmente nos referiremos a nuestros alumnos.

Desde hace años, en la Escuela Mariano Moreno de Rio Ceballos, en la provincia de Córdoba (Argentina) en las clases de matemáticas están englobadas diversas artes escénicas (danza, teatro, etc.) como hilo motivador y conductor de su didáctica. Los alumnos descubren que existe matemática en todo cuanto les rodea y en particular que es posible realizar poesía matemática. Esos poemas a veces suelen plantear enunciados de problemas a resolver, pero otras veces expresan sentimientos relacionados con la matemática en sí. A continuación presentamos algunos ejemplos de la labor de los alumnos.

Cuando el príncipe se pasea
en su radiante caballo
2/8 de caritas
tras los visillos se asoman,
3/8 de doncellas
por las esquinas rondan,
1/8 de princesas
a la conquista se lanzan,
y 2/8 de mujeres cultas
que pasean por la plaza
lo saludan muy amablemente
con sonrisas falsas.
¿Cuántas son las admiradoras del príncipe?
2/8 + 3/8 + 1/8 + 2/8 = 8/8 TODAS
María Pía Michelli

EL RIO

El río se duerme y sueña
sueña, sí, esto le encanta,
un gran cielo con 500 estrellas
muy brillantes y haraganas.
¿Qué hará el río con ellas,
acaso pensará regalarlas?
No, 3/20 de ellas
adornan una hermosa barca
y con 1/10 de las mismas
alumbra toda la comarca.
Las restantes se las vende
a un precioso ángel que pasa,
se las vende a
doscientos mil sin rebaja
¿Cuánto obtuvo por la venta
este río soñador
que siempre cuenta estrellas
sin lograr ser su amo y señor?

Natalia Varela
Alejandra Vega
Mariela Zalazar

LOS NUMEROS

Esos símbolos secretos.
Nos proponen sensaciones,
que en frías definiciones,
nos proyectan a lo eterno.

No sabemos cuando empiezan,
ni tampoco donde acaban.
Pero, en mágico espejismo,
el cero se hace concreto...
Y entonces desde la nada
empezamos a contar.

¡De pronto!, las unidades
se disfrazaron de cifras
y en carnaval de ecuaciones
nos esconden sus verdades
Entonces nuestros cerebros
comienzan a trabajar,
con ingenuidad y afán
intentando conseguir
el resultado perfecto,
y en esa extraña experiencia
nos ha hechizado el misterio
de atrapar las dimensiones
y alcanzar el infinito, en cósmicas
relaciones de armonía universal.

Martín Ceballos.

Cuando todo quería poner en práctica
siempre debía recurrir a la matemática.
Quería solamente dedicarme al dibujo, a la pintura
pero debía sacar proporciones y medir la altura.
Quería también dedicarme a cantar
pero debía medir el tiempo entre el canto y la música por tocar.
Creí encontrar en el baile una solución
pero si no contaba los pasos era mi perdición.
A la composición de poesías me quise dedicar,
pero debía medir los versos para una buena poesía lograr.
Geografía, historia, música, todas con la matemática se relacionaban
y en mi mente números y números se cruzaban.
Para olvidarme caminé y caminé
y al mirar un letrero que decía 5 km encontré.
Miré mi reloj y una hora había demorado
y en mi mente una pregunta había pasado.
Si en una hora 5 km había caminado
en 4 horas ¿cuántos km habría avanzado?
Dije entonces 1 es 4 como 5 es a x, sin pensar
que con una regla de tres simple me había yo de encontrar.
Multipliqué 5 por el 4 y 20 me dio, despejé la x y el 1 dividiendo pasó
la x igual a 20 me quedó y 20 km habría de recorrer yo.
Luego pensando me dí cuenta que con la matemática me había de nuevo encontrado,
y me dí cuenta que ni siquiera caminar podía hacerlo, sin ella a mi lado.
Fue en ese momento cuando su importancia descubrí
y aunque a veces me cansaba, las tablas aprendí.
Pero me dí cuenta que aunque de ella escaparme quiera,
hasta en las cosas más sencillas la matemática espera.

Gabriela Noriega

LA VEREDA

Por el frente de mi casa
la gente veloz pasa
tratando de no pisar
lo que acabo de pintar.

De mi vereda un cuarto
la he pintado de blanco
un octavo de color durazno
fresco y claro como el verano.

Con un quinto de rosado
la pintura se me ha acabado
si me ayudan a sumar
quizás pueda averiguar
cuánto hube de pintar.

Carolina Bettini
Vanina López

Ya sólo nos queda una poesía para acabar este artículo y como es normal hemos dejado la «guinda del pastel» para el final. Todos aquellos que conozcan al primer presidente, y actualmente presidente honorario de la FESPM, Gonzalo Sánchez Vázquez, saben que es un matemático con alma de poeta (o quizás un poeta que sabe muchas matemáticas). Al comentar con él que estábamos preparando este artículo, enseguida nos proporcionó la cita del comienzo, y, abusando de su amistad, le pedimos que nos escribiera un poema sobre matemáticas. Rápidamente puso manos a la obra y nos obsequió con los versos siguientes, inéditos hasta el momento. Vaya desde aquí, con todo nuestro cariño, el agradecimiento impreso a don Gonzalo por su gentileza.

MATEMÁTICA Y POESÍA

Esos números que crecen y crecen sin descanso,
0'9, 0'99, 0'999, 0'9999, 0'99999, ...
acercándose cada vez más a la unidad divina,
acariciándola sin llegar a tocarla todavía:
esa sucesión numérica es también poesía.
Es como una rima inacabable y sostenida,
como una esperanza siempre insatisfecha,
como un deseo que nunca se detiene,
como un cercano horizonte inalcanzable....
Triángulos, círculos, polígonos,
elipses, hipérbolas, parábolas,
suenan en nuestros oídos desde Euclides
como formas geométricas abstractas,
figuras ideales que viven con nosotros,
porque también en el amor hay triángulos
y en el cielo se dibuja sin compás el arco iris.
Vais paralelos siempre lenguaje y geometría,
pues en el habla se esconde las elipses,
en los libros sagrados se habla por parábolas
y en los poemas épicos se disparan las hipérbolas.
Números y formas, imágenes y ritmos
orden y luz en versos y en teoremas,
con un toque supremo de armonía,
estáis juntas en la memoria de los tiempos,
juntas estáis matemática y poesía.

Gonzalo Sánchez Vázquez

José Muñoz
IB Macarena. Sevilla
Carmen Castro
IB San Pablo. Sevilla
María Victoria Ponza
Escuela Mariano Moreno
Río Ceballos (Argentina)

Bibliografía

ALBERTI, R. (1986): *Antología poética*, Alianza, Madrid.

BALBUENA CASTELLANO, L. (1982): «Yo soy el Cero», *Números*, n.° 2, 59-65.

CAMARGOS BARRETO, A. (1989): «Modelos matemáticos de letras de musica», *Boletim informativo do departamento de matematica*, n.° 17, Universidade regional de Blumenau (Brasil).

FAUVEL, J. (1994): «Mathematics and poetry», en GRATTANN-GUINNESS, *Companion Encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, Routledge, Londres, 1644-1649.

FELIPE, L. (1968): *Antología rota*, Losada, Buenos Aires.

GHYKA, Matila C. 91978): *El número de oro. Vol. I: Los ritmos*, Poseidon, Barcelona.

KABBANI, N. (1975): *Poemas amorosos árabes*, Instituto Hispano-Árabe de Cultura, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1960): *Las matemáticas y su enseñanza actual*, Publicaciones de la Revista de Enseñanzas Medias, Madrid.

RUIZ, G. (1992): «Ciertos aspectos lingüísticos y poéticos de las matemáticas», *Epsilon*, n.° 24, 79-87.

SALINAS, P. (1980): *Aventura poética*, Cátedra, Madrid.

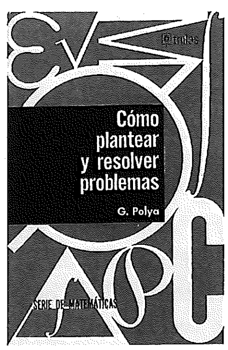
WHITMAN, W. (1980): *Hojas de Hierba*, Mayol Pujol, Barcelona.

SUMA 22
junio 1996

Polya, un clásico en resolución de problemas

COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS
G. Polya
Ed. Trillas, México.
Título original. 'How to solve it'. 1ªedición inglesa, 1945
Primera edición en español, 1965.

El libro que comentamos es de apariencia sencilla, sin visos de trascendencia. Y no sólo porque no es muy extenso (215 páginas), sino por su tono coloquial, cercano y directo, y porque en ningún momento hace referencia a ningún resultado matemático que no sea conocido por cualquier profesor de matemáticas de los niveles primario y medio. A pesar de todo ello, su importancia ha sido impresionante en la enseñanza de las matemáticas desde su publicación, hace ya más de cincuenta años, en todo el mundo. Y a pesar de su 'edad' ya no muy juvenil es un libro que sigue vivo, no sólo desde el punto de vista de su influencia actual, sino que lo es en el sentido editorial, es decir, que es un libro que se sigue vendiendo con regularidad, incluso en nuestro país, donde se puede encontrar en las librerías la reimpresión número 19, de mayo de 1995. Ello ha hecho de *How to solve it* uno de los 'best seller' matemáticos más relevantes, traducido a 17 lenguas, entre las que están todas las mayoritarias, y del que se han vendido más de un millón de ejemplares, cifra relevante para cualquier libro, y más para uno de didáctica de las matemáticas.



Para valorar la importancia del libro, nada mejor que ceder la palabra a Schoenfeld, una de las grandes autoridades actuales de la resolución de problemas (que, en aras de la brevedad, aparecerá como RP en lo sucesivo). En 1992, en un artículo sobre el estado actual de la cuestión en RP, decía: «planteándolo simplemente, *How to solve it* plantó las semillas del 'movimiento' de resolución de problemas que floreció en los ochenta. Abra el *1980 NCTM Yearbook* (*El libro del año 1980* de la Asociación Norteamericana de Profesores de Matemáticas), que supuso el aldabonazo a partir del cual se consideró a la RP como la tarea fundamental de los profesores de matemáticas] en cualquier página y probablemente encontrará a Polya invocado, bien directamente o por inferencia en la discusión de ejemplos de resolución de problemas».

A pesar de todo ello, y a pesar de su influencia, a través de la enseñanza de las matemáticas (que no hay que olvidar que es obligatoria durante varios cursos para todos los alumnos en todos

RECENSIONES

los países que tienen un sistema educativo organizado) en buena parte de los ciudadanos de casi todo el mundo, Georges Polya no ha logrado traspasar la barrera del conocimiento más allá de los círculos matemáticos. Por eso su nombre no aparece en ninguna de las enciclopedias que hemos consultado (las españolas más habituales, francesas y hasta la unánimemente reconocida como excelente *Enciclopedia Británica*, en que su nombre sí aparece, pero no como artículo independiente, sino sólo referido a un 'Teorema de Polya', relativo a asuntos combinatorios, pero sin citar en absoluto ni el libro que comentamos ni su influencia en la RP). Y por comparar, en todas ellas, en el lugar que debería estar, nos encontramos con Pollock, un pintor contemporáneo norteamericano.

George Polya nació en Budapest en 1887. Durante su infancia no encontró las matemáticas especialmente interesantes; comenzó en la Universidad de Budapest estudios universitarios de leyes, y se cambió después a lenguajes y literatura, durante los cuales, como parte de un curso de filosofía, escogió matemáticas, y ahí comienza su relación con las mismas, que ya no abandonaría. Se doctoró en Matemáticas en 1912 en Budapest, con una tesis sobre probabilidad. Hizo trabajos posdoctorales en Göttingen y París y encontró un trabajo como profesor en 1914 en el Instituto de Tecnología de Zurich (Suiza), donde continuó hasta 1940, en que emigró como otros cientos de intelectuales europeos a Estados Unidos. Trabajó primero en la Universidad de Palo Alto y a partir de 1942 en la de Stanford. Murió en 1985. Escribió 11 libros (entre los que está, además de los de didáctica, *Theorems and Problems in Analisis*, escrito con Szegö en 1925, y que es uno de los clásicos del siglo XX) y unos 250 artículos (recogidos en cuatro volúmenes), en distintas áreas de las matemáticas.

Por situar la edición en castellano, hay que destacar que su traducción es en México, no en nuestro país, y que deben pasar 20 años desde la primera edición, para que se publique. Y se hace cuando ya ha aparecido la segunda edición inglesa de la obra, y otro libro de Polya que profundiza y desarrolla los contenidos del primero. Nos referimos a *Matemáticas y razonamiento plausible* (1954), que sí que fue traducida en España con algo más de rapidez (la edición de Tecnos es de 1966), aunque por los avatares de la industria editorial hoy es inencontrable (y bueno sería poder disponer de nuevo de una edición del misma). Como muestra del avance de la relación con otros países y de la propia situación general en el contexto internacional, no parece plausible, por utilizar un término del ramo, que una obra de esta trascendencia tardara 20 años en la actualidad en traducirse al castellano.

El contenido

El libro constituye el primer intento de la puesta a punto de la 'heurística moderna', que según su propia definición «trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular 'las operaciones típicamente útiles' en este proceso». [...] Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como sicológico; no deben descuidarse las aportaciones hechas al tema por autores tales como Pappus, Descartes, Leibnitz y Bolzano, pero debe apegarse más a la experiencia objetiva. Una experiencia que resulta a la vez de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo, constituye la base sobre la cual se construye la heurística. En este estudio buscaremos, sin descuidar ningún tipo de problema, los puntos comunes de las diversas formas de tratar cada uno de ellos y después trataremos de determinar las características generales independientes del tema del problema. Un tal estudio tiene objetivos 'prácticos'; una mejor comprensión de las operaciones mentales típicamente útiles en la solución de un problema puede en efecto influir favorablemente en los métodos de enseñanza, en particular en lo que se refiere a las matemáticas». Sirva esta larga cita para situar el ámbito del estudio y los objetivos, tendentes sobre todo a la enseñanza, que, por una vez, se han cumplido, puesto que, como recordábamos antes en la cita de Schoenfeld, este libro sentó las bases sobre las que se impulsó el cambio en la enseñanza de las matemáticas.

El libro constituye el primer intento de la puesta a punto de la 'heurística moderna', que según su propia definición «trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular 'las operaciones típicamente útiles' en este proceso.

El libro trata, en esencia, de un largo comentario con cuatro partes (que luego explicitaremos) del, ahora, conocido plan de Polya. Según él, para resolver un problema se necesita:

I Comprender el problema.
II Concebir un plan.
III Ejecución del plan.
IV Examinar la solución obtenida.

Y además, cada una de estas fases tienen subdivisiones y preguntas que hacerse para llevarlas a cabo.

La primera parte (pp. 23-48) se titula «En el salón de clases», y en ella, después de hablar del propósito del libro y de la enseñanza y de los roles del profesor y del alumno, pasa a explicitar su plan por medio de un problema, en apariencia no muy atractivo: 'Determinar la diagonal de un paralelepípedo rectangular dados su longitud, su ancho y su altura'. Sobre él estudia el proceso de las cuatro fases, las preguntas que hay que realizar, los comentarios que le sugieren,... Y después, de una forma más concisa, desarrolla el mismo método en otros tres problemas. Uno de construcción ('Inscribir un cuadrado en un triángulo dado tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo respectivamente'), otro de demostración ('Dos ángulos están situados en dos planos diferentes, pero cada uno de los lados de uno es paralelo al lado correspondiente del otro, y en la misma dirección. Demostrar que los dos ángulos son iguales') y el último de rapidez de variación ('Se vierte agua en un recipiente de forma cónica con una rapidez r. El recipiente de forma de cono de base horizontal tiene el vértice dirigido hacia abajo; el radio de la base del cono es a, su altura b. Determinar la velocidad a la que la superficie del agua se eleva cuando la profundidad del agua es y. Después obtener el valor numérico de la incógnita, suponiendo que $a = 4$ dm, $b = 3$ dm, $r = 2$ dm^3 por minuto e $y = 1$ dm').

Reproduciremos algunos comentarios que aparecen en esta primera parte. «El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como, por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. [...] Al tratar de resolver problemas, hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos. [...] El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica. [...] Además, cuando el maestro resuelve un problema ante la clase, debe 'dramatizar' un poco sus ideas y hacerse las mismas preguntas que emplea para ayudar a sus alumnos». Respecto a lo que son problemas, «el alumno debe comprender el problema. Pero no sólo debe comprenderlo, sino también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy difícil ni muy fácil, y debe dedicarse un cierto tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante». En cuanto a la concepción de un plan y la aparición de las 'ideas brillantes', Polya señala que «lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirle a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérsele». Y añade que «un simple esfuerzo de memoria no basta para provocar una buena idea, pero es imposible tener alguna sin recordar ciertos hechos pertinentes a la cuestión».

Por fin Polya advierte sobre las preguntas que hay que hacer a los alumnos en la aplicación de su método, que no debe aplicarse de forma rígida, sino más bien como si se le hubieran ocurrido de forma espontánea al propio alumno.

Una vez que ya se está ejecutando el plan, «el peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro». Y cuando se está en la fase de la visión retrospectiva, «una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico». Por fin Polya advierte sobre las preguntas que hay que hacer a los alumnos en la aplicación de su método, que no debe aplicarse de forma rígida, sino más bien como si se le hubieran ocurrido de forma espontánea al propio alumno. Y advierte contra algunas sugerencias que se plantean de «forma sorpresiva y poco natural, como el conejo que el prestidigitador saca del sombrero», que no son instructivas en absoluto.

La segunda parte, muy corta (pp. 49-52), es un diálogo sobre «Cómo resolver un problema», que reúne todas las fases para resolver un problema, así como las preguntas que hay que hacerse en cada una de ellas.

La heurística

El núcleo fundamental del libro lo forma la larga tercera parte (pp. 55-197), titulada «Breve diccionario de heurística». En ella, por orden alfabético, va tratando una serie de entradas, de distinta importancia y extensión, sobre la RP. Así hace un recorrido histórico por la 'heurística' o 'ars inveniendi', que «trata del comportamiento humano frente a los problemas; este estudio se remonta, al parecer, a los primeros tiempos de la sociedad». En cuanto a sus nombres propios comienza, en el tiempo, en Pappus (aprox. del año 300 antes de Cristo), sigue con Aristóteles (de quien da una sugestiva descripción de las 'ideas brillantes' como actos de sagacidad, y 'sagacidad es descubrir adivinando una relación esencial en un lapso de tiempo inapreciable'); Descartes (1596-1650), que se propuso encontrar un método universal para la RP, pero que dejó inconclusa; Leibnitz (1646-1716), que tuvo el proyecto de escribir un 'Arte de la invención', y que dijo que «no hay nada más importante que el considerar las fuentes de la invención que son, a mi criterio, más interesantes que las invenciones mismas»; Bolzano (1781-1848), que dedicó una buena parte de su obra de lógica al tema de la heurística; para acabar en los contemporáneos como Hadamard.

Iremos reproduciendo algunas citas de Polya a lo largo del capítulo, par intentar dar una idea del espíritu del mismo. En el largo artículo dedicado a 'analogía' dice que «el sentimiento de que un orden armonioso y simple no podía ser engañoso guía al investigador tanto en matemáticas como en las demás ciencias», y recuerda que «la inducción está naturalmente basada en la analogía». Recuerda también que un 'corolario', etimológicamente, es una 'propina', y asegura que «sería un error el creer que la solución de un problema es un 'asunto puramente intelectual'; la determinación, las emociones, juegan un papel importante»; y, en la misma línea, «la solución de problemas es una escuela de la voluntad. [...] Si el alumno no encuentra en la escuela la oportunidad de familiarizarse con las diversas emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática ha fallado en su objetivo más esencial».

Cuando se refiere a 'Examine su hipótesis' dice «su hipótesis puede ser correcta, pero sería absurdo el tomar una hipótesis por cierta simplemente porque se le ha ocurrido, como hacen la mayor parte de las veces las personas simplistas. Su hipótesis puede no ser correcta. Sería igualmente absurdo el no considerar una hipótesis plausible; este es el defecto en que incurren los pedantes. [...] No existen en realidad ideas francamente malas, a menos que no tengamos sentido crítico. Lo que realmente es malo es no tener idea alguna, por muy sencilla que sea». En cuanto al papel de la 'inducción', «las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva. En matemáticas, como en las ciencias físicas, podemos emplear la observación y la inducción para descubrir leyes generales; pero existe una diferencia. En las ciencias físicas, en efecto, no hay nada por encima de la observación y de la inducción, mientras que en matemáticas se tiene, además, la demostración rigurosa». Por eso, «todo conocimiento sólido se apoya sobre una base experimental reforzada por cada problema cuyo resultado ha sido cuidadosamente verificado». En cuanto al tipo habitual de presentación formal de las matemáticas, «la exposición euclideana es perfecta si se trata de subrayar cada punto particular, pero menos indicada si lo que se quiere es recalcar las articulaciones esenciales del razonamiento. [...] La exposición euclideana se desarrolla en un orden que es, la mayor parte de las veces, exactamente opuesto al orden natural de la invención». Todo este conjunto de reflexiones no dejan de ser pertinentes sobre la manera de llegar a resultados y de comunicarlos, sobre todo en la enseñanza.

En cuanto a la notación que se debe utilizar en la RP, «el empleo de símbolos matemáticos es análogo al de palabras. La notación matemática aparece como una especie de lenguaje, *une langue bien faite*, un lenguaje perfectamente adaptado a su propósito, conciso y preciso, con reglas que no sufren excepciones. [...] La elección de la notación constituye una etapa importante en la solución de un problema. Debe elegirse con cuidado. [...] Una notación apropiada podrá contribuir de modo primordial a la comprensión del problema».

En el camino hacia la resolución de un problema aparecen a veces ideas brillantes. «¿Qué es una idea brillante? Es una transformación brusca y esencial de nuestro punto de vista, una reorganización repentina de nuestro modo de concebir el problema, una previsión de la etapas que nos llevarán a la solución, previsión en la cual, pese a su aparición repentina, presentimos que nos podemos fiar». En cuanto a los tipos de problemas, «'los problemas por resolver' tienen mayor importancia en las matemáticas elementales, los 'problemas por demostrar' son más importantes en las superiores». «Los problemas de rutina, incluso empleados en gran número, pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Limitar la enseñanza de las matemáticas a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarla por debajo del nivel de un 'libro de cocina' ya que las recetas culinarias reservan una parte a la imaginación y al juicio del cocinero, mientras que las recetas matemáticas no permiten tal cosa». En cuanto a la relación con la vida fuera del aula, «podemos decir que las incógnitas, los datos, las condiciones, los conceptos, los conocimientos necesarios, en suma, todo en los problemas prácticos es más complejo y menos preciso que en los problemas puramente matemáticos. [...] Sin embargo, las razones y los métodos fundamentales que conducen a la solución son propiamente los mismos para los dos tipos de problemas».

También Polya da unas reglas, como casi todo el mundo, pero que en este caso están llenas de buen sentido.

También Polya da unas reglas, como casi todo el mundo, pero que en este caso están llenas de buen sentido. Reproducimos algunas partes de las mismas. 'Reglas de enseñanza': «La primera de estas reglas es conocer bien lo que se quiere enseñar. La segunda es saber un poco más. [...] No olvidemos que un profesor de matemáticas debe saber lo que enseña y que, si desea inculcar a sus alumnos la correcta actitud mental para abordar problemas, debe él mismo haber adquirido dicha actitud». 'Regla de estilo': «La primera regla de estilo consiste en tener algo que decir. La segunda es saberse controlar en caso de tener dos cosas por decir; exponer primero la una y después la otra, no ambas a la vez». 'Reglas de descubrimiento': «La primera de estas reglas es ser inteligente y tener suerte. La segunda es sentarse bien tieso y esperar la ocurrencia de una idea brillante. [...] Reglas infalibles que permitiesen resolver todo problema de matemáticas serían con toda seguridad preferibles a la piedra filosofal tan buscada en vano por los alquimistas. Tales reglas procederían de la magia y no hay tal magia. Encontrar reglas infalibles aplicables a todo tipo de problemas no es más que un viejo sueño filosófico sin ninguna posibilidad de realizarse».

Algunos problemas

La cuarta y última parte del libro (pp. 199-215), «Problemas, sugerencias, soluciones» da la oportunidad al lector de practicar el método descrito en las tres partes anteriores proponiendo, en el primer apartado, 20 problemas de tipos y contenidos muy diversos; para cada uno de los cuales da sugerencias más o menos largas para su solución en la línea del método, en el segundo apartado; y aporta, por fin, la solución de todos ellos.

Como muestra aportamos las tres fases en un problema, el número 4. «Para enumerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2.989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?». Sugerencias: «'He aquí un problema relacionado con el suyo'. Si el libro tiene exactamente nueve páginas numeradas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? (9 evidentemente). He aquí otro problema 'en relación con el suyo': si el libro tiene exactamente 99 páginas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? Solución: «Para un libro de 999 páginas se necesitan

$$9 + 2x90 + 3x900 = 2.889$$

dígitos. Si el libro en cuestión tiene x páginas,

$$2889 + 4(x - 999) = 2.989$$

$$x = 1.024$$

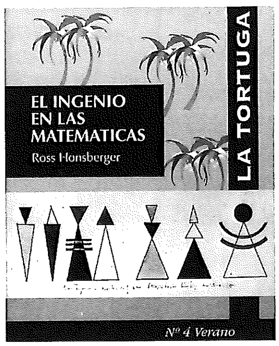
Este problema nos hace ver que una evaluación preliminar de la incógnita puede ser útil (e incluso necesaria, como en este caso)».

Para acabar

Sorprende la frescura de un libro como este, con más de cincuenta años a sus espaldas, que se puede leer con gusto y aprovechamiento, y no sólo una vez, sino tantas como se haga se siguen encontrando reflexiones, comentarios atractivos, y no siempre los mismos. Interesa, sobre todo, por propugnar la creación de un espíritu abierto, constructivo, experimental de la clase de matemáticas. Si hubiera de poner alguna pega (todo la tiene), habría que referirse (además de una traducción mejorable) a una presentación descarnada de los problemas, con poca historia por medio, y a un gusto por despojarles de su contexto, seguramente deseada, pero que nos gustaría que tuvieran un aire más vivo, menos académico. Algo que con el transcurso de los años, en los discípulos de Polya (que somos todos, conscientemente o no), se ha ido superado.

Fernando Corbalán

Jordi Deulofeu



EL INGENIO EN LAS MATEMÁTICAS
Ross Honsberger
DLS-Euler, Madrid 1994
ISBN: 85731-14-X
205 páginas

La reciente aparición editorial de dos nuevos números de la colección de libros «La Tortuga de Aquiles» es una gran noticia para aquellos que amamos las matemáticas. Desde estas líneas quiero animar y aplaudir este esfuerzo de la Editorial DLS-Euler que sigue publicando en español la «New Mathematical Library», bajo ese sugestivo nombre de La Tortuga de Aquiles.

Que grandes matemáticos dediquen parte de su tiempo a escribir sobre matemáticas, que no necesiten un excesivo aparato matemático, es muy de agradecer, quizá especialmente por todos aquellos que nos dedicamos a la docencia, pero sobre todo porque es una oportunidad de disfrutar y emocionarnos con algunos retazos de partes de las matemáticas que no han estado ni están en los planes de estudios que hemos conocido o conocemos. Parece ser que esto que tan brillantemente hace aquí Miguel de Guzmán es una práctica mucho más habitual en Estados Unidos, donde matemáticos de gran prestigio escriben sobre distintas cuestiones matemáticas que puedan ser leídas por alumnos con conocimientos equivalentes a los que se tienen en bachillerato o COU. Esta es la idea que parece animar a la editorial Euler con la publicación de esta colección de libros que el mismo Miguel de Guzmán elogia en la siguiente nota a la edición española que aparece en la contraportada de todos los libros que se han publicado hasta ahora:

«La colección New Mathematical Library (que aparece en España bajo el nombre de La Tortuga de Aquiles), de exposiciones matemáticas breves y de nivel asequible a los estudiantes de secundaria, comenzó a ser publicada con la intención de ofrecer un acceso fácil a los estudiantes hacia el área de la matemática generalmente no incluidas entre los contenidos de su enseñanza.

La elección de los autores y de las materias pronto hicieron de la serie un gran éxito, siendo sus libros utilizados no ya sólo por los estudiantes de secundaria, sino por los estudiantes universitarios y profesores de todos los niveles.

Por su estilo y acierto expositivo suponen una visión introductoria y llana a unos cuantos temas matemáticos que han ido adquiriendo, al transcurrir de los años, aún más relevancia.

La traducción al castellano de las principales obras de la serie constituirá sin duda una gran oportunidad de enriquecimiento de nuestros profesores y de todos los usuarios de la matemática en los países de habla española, que ejercerá una profunda influencia en la tarea de renovación de nuestro sistema educativo en este área.»

Los libros aparecidos hasta la fecha son los siguientes:

1. *Retorno a la geometría.* Coxeter y Creitzer.
2. *Olimpiadas matemáticas internacionales.* Creitzer (recopilador).
3. *Métodos matemáticos de la ciencia.* Polya.
4. *El ingenio en las matemáticas.* Honsberger.
5. *Las matemáticas de los juegos de apuestas.* Packel.
6. *Grafos y sus aplicaciones.* Ore.
7. *Usos del infinito.* Zippin.
8. *Concursos de matemáticas: geometría.* Mathematical Association of America.

Como podemos ver por los títulos, los temas tratados abarcan un campo muy amplio y variado. Desde el punto de vista del docente no todos tienen las mismas posibilidades de ser utilizados directamente en el aula: el libro *Olimpiadas matemáticas internacionales* puede ser estupendo para los alumnos muy brillantes, sobre todo por lo sutil de algunas soluciones; en cambio *Concursos de matemáticas: geometría* abarcaría un espectro muy amplio de alumnos puesto que contiene problemas de dificultad muy diversa. Indirectamente todos nos servirán porque siempre se encuentran ideas con las que poder jugar en un momento dado; pero sobre todo, lo que sí tienen todos, en mayor o menor medida, es la capacidad de hacernos sentir eso que las matemáticas tienen de distinto y emocionante a la vez.

El ingenio en las matemáticas de Ross Honsberger consta de diecinueve ensayos cortos (algunos de cuatro páginas) que son diecinueve muestras de otros tantos aspectos de las matemáticas que delatan tanto las preferencias de Honsberger como el peculiar hacer de matemáticos como Sylvester, Gauss o Steiner. Alguno de los ensayos son propuestas de problemas en cuya resolución han participado matemáticos de primera fila. Las soluciones más brillantes son las que Honsberger nos muestra y donde se aprecia el ingenio del trabajo matemático que da nombre al libro. Como colofón se proponen a veces ejercicios de parecido interés que están resueltos al final del libro. No siempre son problemas nuevos pero sí siempre son interesantes y en los que aparece el ingenio del autor. Las referencias que se dan al final de cada ensayo cumplen la doble función de dar a conocer las fuentes y de sugerir bibliografía para el lector que quiera profundizar en el tema tratado.

Alguno de los ensayos [de este libro de Honsberger] son propuestas de problemas en cuya resolución han participado matemáticos de primera fila.

Los ensayos son independientes entre sí y, por tanto, se puede elegir cualquier orden al abordar su lectura. En unos casos el ensayo es simplemente la resolución de un problema concreto que ha merecido el interés del autor, tanto por la curiosidad del planteamiento como por la brillantez de la resolución. Los ejercicios que a veces se proponen a continuación suelen ser simplemente un complemento al problema inicial. En otros casos la vocación de generalización es mucho mayor, y partiendo de soluciones de casos concretos o de casi curiosidades llega a importantes y sorprendentes generalizaciones.

Comienza el libro con *Probabilidad y* π, donde el autor nos transmite la emoción que le produjo la primera vez que leyó que la probabilidad de que dos enteros positivos elegidos al azar, sean primos entre sí es $6/\pi^2$. «Esto sencillamente me dejó asombrado. El que una elección al azar de un par de números enteros positivos tuviera algo que ver con π iba más allá de mi imaginación. La esperanza de determinar realmente π mediante un experimento de pruebas repetidas me parecía totalmente increíble». Como el problema anterior excede los conocimientos que supone puede tener el lector del libro nos propone algo más fácil pero que igualmente pone de manifiesto que el número π entra en este tipo de resultados. Cinco páginas son suficientes para que en otro ensayo, sobre el *álgebra de proposiciones*, nos muestre cómo aplicar técnicas algebraicas a problemas lógicos. *Números pares y números impares, cuadrando el cuadrado, el problema isoperimétrico, cinco curiosidades aritméticas, números abundantes, sucesiones complementarias, un problema de Regiomontano*, etc. son algunos de los títulos de los temas tratados que van desde la aritmética pitagórica al estudio de sucesiones, pasando por la geometría o la curiosa propiedad de algunos decimales periódicos.

Ross Honsberger nació en Toronto en 1929, estudió en dicha universidad de la que posteriormente fue profesor trasladándose más tarde a Waterloo. Su interés por la educación secundaria se ve reflejada en sus escritos así como en el diseño de cursos dirigidos especialmente a profesores. Su único libro traducido al castellano es este que comentamos, no obstante es recomendable la lectura de sus otros seis «best sellers»:

Mathematical gems (volúmenes I, II, III) son, sobre todo, libros diseñados para profesores de ciclo medio, donde destaca la claridad de exposición y la belleza de los temas elegidos. Estos tres libros tienen una estructura parecida al de *El Ingenio en las Matemáticas.*

Mathematical morsels y *New mathematical morsels* consisten, en esencia, en el estudio de problemas matemáticos especialmente interesantes para Honsberger, extraídos de la prestigiosa revista *Crux Mathematicorum*, y totalmente resueltos.

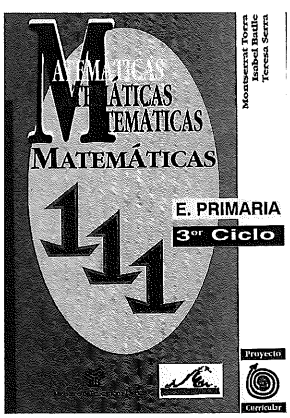
Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry es el número 37 de la colección «New Mathematical Library», del cual el profesor Bellot Rosado, en el número 41 de la revista de la sociedad de profesores de Matemáticas Puig Adam, elogia cómo se obtienen conclusiones con un mínimo bagaje de resultados previos y como «¡todavía hoy es posible descubrir algo en geometría euclídea!».

Solicitar estos libros u otros de la Mathematical Associatión of America es tan sencillo como escribir una carta, mandar un número de VISA y esperar un par de meses; como premio se obtiene una de estas joyas que puede leerse con mínimos conocimientos de inglés.

En el año 1993 la MAA (Mathematical Association of America) concedió a Ross Honsberger un Certificate of Merit por sus muchas contribuciones a las matemáticas.

Faustino Navarro

MATEMÁTICAS
ENSEÑANZA PRIMARIA
Montserrat Torra, Isabel Batlle y Teresa Serra
MEC y Mare Nostrum, Madrid,1994
3 volúmenes
(uno para cada ciclo)
ISBN: 84-87049-74-5
243, 338 y 343 páginas



La publicación de materiales y propuestas como ésta facilitan la tarea de los equipos de profesores que buscan un tratamiento de las matemáticas más adaptado y significativo para sus alumnos.

Al hacer la recensión de estos tres libros, me viene a la mente el Editorial del n.° 21 de SUMA. En este artículo se hace referencia a que, cuando comenzó a experimentarse la reforma, parecía que los libros de texto iban a desaparecer, que los equipos de profesores deberían elaborar sus propias propuestas didácticas, calificando de utópica esta pretensión; para que esto fuera posible, hubiera sido preciso que se publicaran una gran variedad de materiales con unas características determinadas: diferentes enfoques, facilidad de reproducción, etc.

El MEC y Mare Nostrum con la publicación de estos tres libros, uno para cada ciclo, han contribuido a que los equipos de profesores de Educación Primaria dispongan de unos materiales variados, coherentes, estructurados y fáciles de trasladar al aula. Materiales que favorecen que los maestros y maestras de un ciclo o etapa se puedan plantear la tarea, casi utópica, de elaborar su propia propuesta de currículo y así no limitarse a la utilización de un determinado libro de texto.

Todas las actividades que aparecen están pensadas para llevarlas a las aulas y de acuerdo con la línea que propone la reforma del área de matemáticas en primaria. Se le da más importancia a los procedimientos que a los conceptos, los conceptos que se tratan son introducidos de forma inductiva, se potencia por igual el cálculo escrito, mental y con calculadora; se favorece la reflexión, el análisis y la investigación; todos los bloques están tratados teniendo en cuenta que los alumnos y alumnas son los que construyen su propio conocimiento, etc.

Los tres libros tienen la misma estructura y presentación. En ésta las autoras dan una explicación de su contenido: actividades, secuencia de los contenidos de la etapa por ciclos, programación y evaluación. Centrándonos en la parte dedicada a las «Actividades» me parece importante destacar que están presentadas de forma progresivamente más compleja y agrupadas por bloques o temas de contenido, que coinciden con los bloques del currículo a excepción del de «Números y Operaciones», que las autoras han desglosado acertadamente en tres: numeración, cálculo y cálculo mental, justificado por su gran peso en esta etapa. Además, existe un bloque temático titulado «Problemas», en el que las actividades que se proponen están en forma de problemas o situaciones matemáticas que globalmente relacionan aspectos de más de un bloque.

En las actividades no se hace referencia de forma explícita a las actitudes pero, como las autoras destacan en la presentación y se puede comprobar al experimentarlas, están pensadas para fomentar los contenidos actitudinales.

Son numerosas las propuestas que se encuentran. Están recogidas y elaboradas –me atrevería a decir– todas aquellas que alguna vez, cuando las leí en algún libro o las descubrí de alguna forma, me parecieron interesantes y con posibilidades de llevar al aula. Casi todas las actividades tienen una sugerencia de ampliación que flexibiliza y amplía la forma de proponerlas a nuestros alumnos. Los recursos didácticos que se utilizan son variados y fomentan la investigación y la reflexión: calculadora, geoplano, tangram, juegos, plantillas, etc.

Cualquier bloque temático sería interesante analizarlo y ver su contenido, pero me voy a centrar sólo, y que sirva como referente, en el de «Cálculo mental». A los maestros y maestras nos preocupa este tema, buscamos métodos y recursos que faciliten su desarrollo en las aulas, pero es cierto que es muy escaso el material disponible. Cuando leí y estudié este apartado me recordó, gratamente, otra propuesta que alguna de las autoras hacía sobre el tratamiento del cálculo mental en las guías didácticas de una editorial catalana y por entonces me pareció novedosa y eficaz.

Las 60 sesiones que proponen para cada uno de los tres ciclos están divididas en tres apartados: numeración, operaciones y problemas mentales. En cada uno de estos apartados hay suficientes ejercicios para desarrollar las sesiones de forma completa y a lo largo de toda la primaria. En el apartado de numeración se tratan aspectos relacionados con el sistema de numeración decimal, lectura y escritura de números, orden, conteo, anterior y posterior, fracciones, números decimales, etc. Las secuencias de operaciones que se presentan en el apartado correspondiente permiten el descubrimiento de estrategias de cálculo mental. Por último aparecen cinco problemas para resolverlos mentalmente y así se potencia este tipo de cálculo que está muy olvidado en nuestras escuelas. Esta propuesta reúne todas las características que son necesarias para que el cálculo mental tenga el protagonismo que hasta ahora ha sido enmascarado por el cálculo escrito.

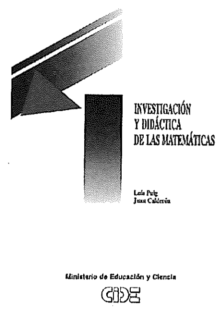
En los apartados dedicados a secuencia de contenidos por ciclos, programación y evaluación, se comentan y se proponen aspectos didácticos que teniéndolos en cuenta, son de gran ayuda para tratar de forma adecuada la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.

En el capítulo dedicado a la «Evaluación final», que se hace para cada uno de los ciclos, se proponen cuatro o cinco actividades, significativas e interesantes, con su correspondiente guía de observación. Si se reflexiona sobre ellas, se intuye qué tipo de tratamiento esperan las autoras que se debería dar a las matemáticas.

En los «Anexos» se pueden encontrar todas las plantillas y gráficos que son necesarios para desarrollar las actividades con los alumnos.

La edición en su conjunto permite un tratamiento completo del área de Matemáticas en la etapa de Educación Primaria. La organización y forma de presentar los temas facilita su comprensión, se podría haberse editado en otro formato, mediante hojas sueltas e individuales para cada actividad, que permitiría una reelaboración y utilización más fáciles. Son tres libros que los profesores de matemáticas deberían tener en cuenta al realizar sus programaciones de aula.

Jesús Antolín



INVESTIGACIÓN Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
Luis Puig y Juan Calderón (editores)
CIDE, Madrid, 1996
ISBN:84-369-2811-3
319 páginas

Esta publicación constituye las actas del seminario «Investigación y didáctica de las matemáticas» organizado por el CIDE y celebrado en Madrid el pasado septiembre.

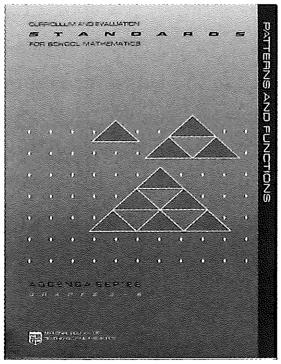
El objetivo fundamental de este seminario consistía en analizar las relaciones que existen, o que deben existir, entre investigación en educación matemática y práctica educativa. Como señalan los editores de las actas, Luis Puig y Juan Calderón, en la presentación de las mismas «... se constatan dos sensibilidades diferentes –como diferentes son, frecuentemente, los correspondientes objetivos profesionales, problemas planteados y metodologías de trabajo específicas– y, al mismo tiempo, simbióticas: por un lado, la investigación educativa necesita de la participación del profesor en ejercicio, de la práctica docente, para enfocar adecuadamente el objeto y el sujeto de la investigación; por otro, utilizar adecuadamente aquellos resultados de la investigación que puedan mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas requiere que el profesor que se dispone a aplicarlos tenga en cuenta los objetivos y fines que contextualizan tal investigación y que los interprete y adapte a su entorno pedagógico concreto».

La primera parte del libro, Textos de un encuentro, recoge las intervenciones de los ponentes del seminario. La sola enumeración de éstos, Guzmán, Niss, Kilpatrick, Sierpinska, Laborde, Rico, Puig, Díaz Godino, Hernán, Argüello, Esteban, de la Fuente, Muriel, Guerrero, Villarroya, García Cruz, Sánchez Vázquez y Calderón, constituye la mejor garantía del interés de lo que en él está escrito.

En una segunda parte se recogen los resúmenes de todas las investigaciones sobre didáctica de las matemáticas que han sido financiadas por el INCIE/CIDE durante el periodo 1981-94.

Emilio Palacián

PATTERNS AND FUNCTIONS
Elisabeth Phillips
Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics
Addenda Series, Grades 5-8
NCTM
ISBN:
páginas



En marzo de 1989 el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) publica los *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* que abarcan desde el jardín de infancia hasta el grado 12 en las escuelas norteamericanas. Para proporcionar a los profesores ideas para su práctica diaria en las clases, en consonancia con el espíritu del documento, se encarga a una serie de grupos de trabajo la producción de materiales. Así surgen los *Addenda*, de los que este libro forma parte, divididos en tres grupos: grados k-6, 5-8, 9-12. Algunos han sido publicados por la SAEM Thales y los demás, entre los que figura el que se comenta aquí, aparecerán en breve editados por el servicio de publicaciones de la FESPM en colaboración con dicha sociedad.

En estos libros se conciben las matemáticas como resolución de problemas, comunicación, razonamiento y se consideran las conexiones entre las diversas ramas de las matemáticas y con otras materias. Las actividades que se proponen tratan de unificar estos temas.

El libro que comentamos trata sobre modelos y funciones. El punto de partida es la importancia que la observación de pautas y regularidades tiene en las matemáticas. Se establece un paralelismo entre la actividad de los matemáticos –que observan modelos, conjeturan, prueban, discuten, verbalizan y generalizan esos modelos y a través de esos procesos construyen la comprensión de los conceptos y sus relaciones, desarrollan un lenguaje para hablar acerca del modelo, etc.– y la de los alumnos cuando se les plantea una tarea de este tipo.

Se parte de la hipótesis de que la investigación de modelos permite a los estudiantes:

- Resolver problemas.
- Desarrollar la comprensión de conceptos matemáticos y relaciones.
- Investigar las relaciones entre cantidades (variables) en un modelo.
- Generalizar usando palabras o variables.
- Ampliar y relacionar modelos.
- Construir el concepto de función.

El objeto de este libro es proporcionar ejemplos de cómo los modelos se pueden usar para desarrollar o profundizar en conceptos importantes sobre potencias, teoría de números, medida, geometría, probabilidad y funciones.

Cada capítulo consta de varias «investigaciones» con actividades de ampliación relacionadas. Cada investigación es un problema o experimento que se puede analizar mediante un modelo. En principio los problemas están diseñados para el ciclo medio pero pueden adaptarse según el tipo de alumnos, interés, edad o nivel.

Según el nivel de los alumnos, el estudio de los modelos llevará a distintos tipos de actividades. En el nivel más elemental, por ejemplo, los alumnos deberán ser capaces de continuar una serie; más adelante generalizarán mediante palabras o símbolos, lo representarán mediante tablas, gráficos etc. y, al final, proporcionará la oportunidad de analizar, hacer conjeturas, generalizar, etc. Aparece el álgebra, de modo natural, como un lenguaje para describir estos modelos.

El método de trabajo que propone es el planteamiento por parte del profesor de problemas abiertos o cerrados que presenten el estudio de las matemáticas como la obtención de la solución de problemas interesantes. La exploración puede hacerse en grupo o mediante una serie de preguntas y respuestas entre profesor y alumnos. Al final se resumen las soluciones, conjeturas, generalizaciones y extensiones del problema.

Cada investigación va seguida de notas para el profesor que comprenden:

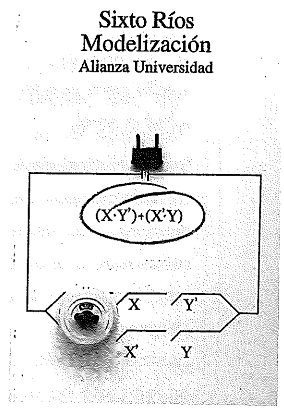
- Métodos para abordar el problema.
- Material necesario y tecnología aconsejada.
- Soluciones posibles que los alumnos podrían encontrar.
- Preguntas para animar la discusión, relacionar, etc.
- Sugerencias para generalizar la discusión.
- Posibles extensiones.
- Conexión con otros problemas o temas.
- Ampliación según los niveles de edad.
- Sugerencias para evaluar.

En muchos casos nos resulta difícil integrar en los problemas o las actividades que se plantean en clase los conocimientos o resultados de distintas partes de las matemáticas. Este libro puede ser de gran ayuda, ya que no sólo los problemas que propone, las actividades de ampliación o relacionadas que aparecen en cada uno de los capítulos se pueden adaptar sin mucha dificultad a nuestro entorno cultural o el nivel de nuestros alumnos, sino que nos abre una posibilidad de cambio en las actividades que nosotros planteamos y en la manera de abordar el tratamiento de algunos temas del currículo.

Considero que este libro resultará interesante en cualquier nivel de la enseñanza, no sólo por los temas que trata y el enfoque de los mismos, sino también porque esta forma de abordarlos «engancha» desde el primer momento y nos hace utilizar el «modelo» en otros temas y buscar todo lo que pueden dar de sí las actividades que planteamos a nuestros alumnos.

Rosa Pérez

MODELIZACIÓN
Sixto Rios
Alianza, Madrid, 1995
ISBN: 84-206-2822-0
331 páginas



En el prólogo el autor expresa claramente alguno de los objetivos que han motivado el libro. Se inicia con esta reflexión: «Un rasgo característico de la cultura actual es la amplia aplicación de los métodos matemáticos a las más diversas actividades humanas, que van de la ciencia y la tecnología a los aspectos organizativos y productivos de la vida moderna. Este proceso se refuerza hacia los años cincuenta coincidiendo, no por casualidad, con la aparición de los primeros ordenadores, y el matemático, que hasta entonces era una planta rara de la sociedad, pasa a jugar un papel importante, al convertirse en la mente rectora de los procesos de modelización matemática, que constituyen el núcleo fundamental de dichas aplicaciones».

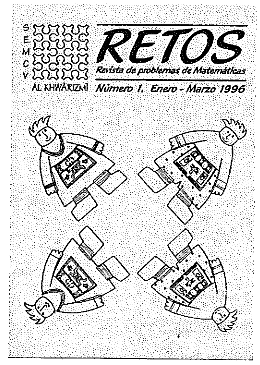
Cada capítulo está presentado a través de la imagen de un matemático y de unas ideas de un autor que nos resumen el contenido de lo que será expresado.

El capítulo primero se titula «Modelos y modelización». Hace una descripción didáctica de diferentes modelos (analógicos, cualitativos, matemáticos,...) que nos permiten introducirnos en esta conceptuación. Hay un esquema del proceso de planteamiento y modelización de problemas de la realidad que nos pone de manifiesto el breve campo de la matemática en el que trabajamos en la enseñanza. El capítulo segundo lo dedica al «Crecimiento y equilibrio» con el estudio de problemas biológicos. El tercero, titulado «Circuitos, lenguajes, conjuntos», se centra en el álgebra de Boole, álgebra de circuitos y álgebra de proposiciones. El capítulo cuarto versa sobre grafos, algoritmos, organización y comunicación. Dedica el capítulo quinto a los modelos probabilísticos, azar, incertidumbre y probabilidad y en el capítulo sexto estudia modelos de simulación y método Montecarlo. Desde aquí va haciendo el autor un recorrido de diferentes modelos: inferencia estadística, optimización, procesos de decisión, juegos de estrategia, astronómicos y sistemas dinámicos.

Cada uno de los capítulos va completado con una buena colección de ejercicios que nos ayudan a abrir la perspectiva de una buena colección de propuestas interesantes para nuestra propia metodología y práctica docente.

Considero, personalmente, que es un libro de interés y que nos apasiona conforme entramos en su lectura.

Guillermo Dorda



RETOS
Revista de problemas de Matemáticas
N.° 1. Enero-marzo 1996
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwärizmi
26 páginas

Tras L'Aula de Matemàtiques y Algorisme la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwärizmi pone en circulación una tercera publicación con el título Retos. Revista de problemas de Matemáticas.

Es bien sabido que el diseño curricular en el área de Matemáticas de dicha comunidad contempla la «Resolución de Problemas» (RP) como un bloque específico de contenidos. Ahí se indica que la RP considerada tradicionalmente como aplicación puede ser enfocada también desde otras vertientes:

- Como método para descubrir paso a paso el conocimiento matemático.
- Como contenido, propiciando que el alumno vaya tomando conciencia del proceso seguido en la resolución.

Retos abarcará la RP desde las tres perspectivas.

Son muchos los libros de problemas existentes en el mercado. No es éste el caso en cuanto a publicaciones periódicas. Retos quiere llenar este vacío. Va destinada especialmente al profesorado y alumnado de la ESO. No es una revista para leer, es una revista ágil y amena que obligará a actuar. Ofrece material listo para usar y totalmente adaptable a cualquier situación escolar. Presenta una amplia y escogida batería de problemas y actividades con el fin de provocar e incitar a la reflexión de forma continuada. Entre sus secciones figuran:

- *Olimpiadas matemáticas.* Recopilación de problemas propuestos en las diferentes fases de las olimpiadas que se celebran en distintas latitudes.
- *Grandes autores de problemas.* Selección de problemas de matemáticas recreativas de autores de todos los tiempos, desde los clásicos Sam Loyd, Henry E. Dudeney o Edouard Lucas, a los más recientes como Eric Emmet, Jean-Pierre Alem, Joseph S. Madachy, David Hall, Martin Gardner, Raymond Smullyam o lam Stewart.
- *Actividad central.* Doble página con una propuesta que facilita la comprensión de enunciados o el abordaje de un llamativo problema, que obliga a usar una determinada estrategia, que da luz a una noción matemática o que abre caminos para indagar variantes o nuevas posibilidades.
- *Retos matemáticos.* La sección principal de la revista, con problemas de una mayor dificultad y de contenido muy variado.
- *Geometría.* Sección que pretende ir introduciendo al alumno en el arte de la deducción: concatenar sencillas premisas para ir extrayendo unas conclusiones muy directas.
- *Papiroflexia matemática.* Actividades para facilitar el paso, en un sentido y otro, de la segunda a la tercera dimensión.
- *Juegos de estrategia.* Un solitario o un juego para dos personas, de reglas sencillas y con posibilidades para analizar.

Afrontar un problema exige organización, sistematicidad, concentración, tesón, perseverancia, creatividad, versatilidad, flexibilidad de pensamiento,...; pone en tela de juicio la impulsividad, osadía, superficialidad y rebuscamiento del alumno; requiere análisis y adaptabilidad; obliga a la revisión, a la reflexión y a la síntesis; provoca ansiedad, desaliento, incertidumbre, entusiasmo, incitación y disfrute.

El proceso de resolución de un problema supone, sin duda alguna, una vivencia rica y formativa, y ningún profesor debe renunciar a que sus alumnos pasen por ella. Retos pretende facilitar esa labor ardua y apasionante.

Antonio Ledesma
Redactor Jefe de Retos

DERIVADAS
Serie: El Universo mecánico
Productor: Annemberg, EEUU, 1985
Idioma: castellano
30 minutos

Este vídeo es el programa n.° 3 de la serie didáctica titulada «El Universo mecánico», la cual está compuesta por 52 títulos que abordan temas de física, aunque varios de ellos están dedicados a las herramientas matemáticas fundamentales en la física como son las derivadas, las integrales y los vectores.

El vídeo que comentamos presenta el concepto de derivada, algunas reglas de derivación y aplicaciones concretas al estudio de movimientos.

En el programa se van enlazando dramatizaciones de personajes de época (Galileo, Newton, Leibnitz y Fermat), imágenes reales, animación en 3D, gráficos, rótulos de refuerzo de las ideas fundamentales,... Respetando la unidad de la serie, los ejemplos que se presentan están muy relacionados con problemas físicos y situaciones de la vida cotidiana.

El vídeo comienza con unas imágenes de una clase del Dr. Goodstein que sitúa históricamente la relación entre el mundo físico y las matemáticas.

Se realiza una introducción histórica mediante el estudio de problemas de movimiento planteados por galileo y Fermat y del problema de la tangente a una curva en un punto. El desarrollo histórico del cálculo diferencial volverá a aparecer en diferentes momentos del programa, al revisar las contribuciones de Newton y Leibnitz.

A continuación se presentan unas aproximaciones intuitivas al concepto de derivada, relacionándolo con ejemplos tomados de la física y de la vida cotidiana, para pasar a la definición de pendiente de una recta con el apoyo de animaciones en 3D y gráficos, A partir del concepto de pendiente de una recta tangente a una curva y de la velocidad instantánea de un móvil se llega a la definición de derivada y al concepto de función derivada.

El vídeo nos introduce, de una manera amena, en la gramática de la derivación, utilizando la idea de máquina de derivar de una forma bastante atractiva y simpática.

Se presentan algunas reglas de derivación (suma y producto de funciones y regla de la cadena) comparando los procesos seguidos con ejemplos muy plásticos de la vida real. estas reglas se utilizan para hallar las derivadas de las funciones elementales.

La película termina con un resumen de imágenes del mismo, que evocan los conceptos anteriormente vistos, para volver a la clase del Dr. Goodstein que presenta un ejemplo de una función no derivable en un punto.

Esta serie, bastante conocida y utilizada por los profesores de Física, ha pasado desgraciadamente casi desapercibida para los de Matemáticas. Y es una pena.

La presentación de los conceptos matemáticos, tanto de este vídeo como de los de integrales, vectores o cónicas, se realiza de una forma muy atractiva para los alumnos y, a pesar de su enfoque fundamentalmente práctico, la referencia a situaciones físicas concretas los hacen especialmente recomendables para alumnos de 2.° y 3.° de BUP.

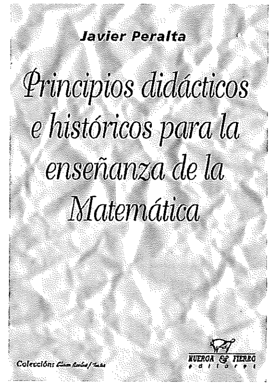
Este hecho, junto a la contextualización histórica de los descubrimientos matemáticos –tan ausentes de las clases de matemáticas–, y unido a un buen tratamiento audiovisual de temas matemáticos en apariencia muy abstractos o demasiado técnicos para ser tratados en imágenes atractivas convierten a este vídeo –y al de integrales– en una herramienta distinta y valiosa en las clases de matemáticas en el bachillerato.

Es aconsejable que cuando en 2.° de BUP se vaya a introducir el tema de derivadas, se recuerde que existe este vídeo, que se vea antes de usarlo y que se utilice con los alumnos. Algunos de ellos descubrirán que lo que van a estudiar tiene un sentido y unas aplicaciones prácticas que nunca hubiesen sospechado.

Pero quienes lo van a agradecer de forma efusiva serán los profesores de física, ya que contribuirá a dar un poco de sentido matemático a los cálculos de derivadas que realizan en sus clases, ¡habitualmente mucho antes de que el profesor de matemáticas haya llegado a este tema en el desarrollo de su programa!

En cualquier caso, de lo que no cabe duda, es que se trata de un buen instrumento para iniciar una coordinación didáctica más seria y estable de la que hoy se produce en los centros de enseñanza entre los departamentos de Matemáticas y de Física.

Antonio Pérez Sanz



PRINCIPIOS DIDÁCTICOS E HISTÓRICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
Javier Peralta
Huerga y Fierro, Madrid, 1995
ISBN: 84-88.564-50-3
229 páginas.

El objetivo declarado por el autor para este texto es proporcionar –a los profesores de matemáticas en ejercicio y a los futuros profesionales– un manual útil y práctico con el que acercarse en poco tiempo y con poco esfuerzo a la didáctica de nuestra disciplina.

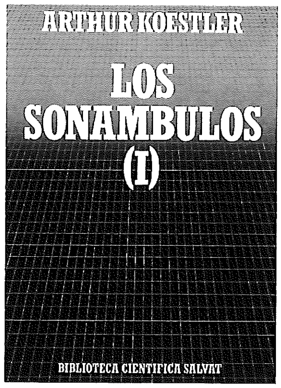
Consta de dos partes bien diferenciadas. En la primera se da un repaso a los principios didácticos más fundamentales para la enseñanza de las matemáticas, desde sus finalidades, el análisis de las diversas metodologías, la problemática del aprendizaje de las matemáticas, hasta el papel didáctico de la historia de la matemática.

La segunda parte aborda las didácticas específicas de la aritmética, álgebra, geometría, análisis, estadística y probabilidades. De manera clara y breve, presenta un bosquejo de la evolución histórica de estos tópicos, y de las didácticas específicas correspondientes de forma coordinada que permite apreciar la influencia de una en la otra. Se acompaña además de una colección de curiosidades y problemas seleccionados por su interés didáctico o histórico.

El libro puede ser muy bien una primera lectura para aquellos alumnos de licenciatura que estén pensando en un futuro profesional como profesores. También una fuente de ideas para los que se acaben de incorporar a la docencia, o un texto de apoyo para los que estén inmersos en un proceso de formación en ejercicio. Ahora bien, la brevedad con la que se toca una tan amplia variedad de temas hace que sea inevitable una posterior profundización.

Julio Sancho

LOS SONÁMBULOS
Arthur Koestler
Biblioteca Básica Salvat
2 volúmenes
Salvat, Barcelona, 1989
ISBN: 84-345-8246-5
167 y 176 páginas



Aprovechando la cercanía de las vacaciones de verano me voy a tomar la licencia de invitaros, a los que todavía no lo hayáis hecho, a leer este clásico de la historia de la cosmología, que no de la astronomía, como aclara su autor. Y digo clásico por su fama y porque la primera edición en lengua inglesa apareció en 1959. Más tarde, en 1987, Salvat lo incorporó a su «Biblioteca Científica» y lo volvió a reeditar en 1994.

«Más que un libro es una delicia» es la primera anotación que guardo de él tras la primera lectura. Sigo conservando esa misma opinión. Su lectura ágil lo aleja de un tratado frío de historia de la ciencia en que, en aras de una pretendida objetividad que vaya más allá de cualquier objeción, el autor tratara de ocultar su sentir personal a base de una redacción «light» y fría, por desapasionada. En este aspecto el libro constituye un lujo, arcaico si se quiere, en estos momentos en los que tener pensamientos propios es un pecado y mantener una actitud crítica constituye una lujuria herética propia del juego estético de algunos intelectuales trasnochados.

Es un libro escrito con apasionamiento, lo que no significa que esté exento de rigor científico. Y es tendencioso, como alguien me comentó una vez, porque apuesta por los acontecimientos al margen de las ideas preestablecidas sobre el tema. Es por tanto una obra de investigación, no un simple relato histórico. Se implica en los hechos, los analiza y los disecciona, como no podía ser de otro modo, bajo el prisma de sus planteamientos ideológicos, entendido el término en su más amplia acepción. Lo que no significa que esté carente de objetividad. De pretendida objetividad, si se admite que cualquier objetividad es una presunción.

Manifiesta un exquisito cuidado en delimitar la fundamentación documental en la que sustenta sus argumentaciones, que sabe controvertidas, a base de incluir al final del libro las citas y textos a los que hace referencia. Esta técnica, habitual en muchos ensayos, favorece la claridad, fluidez y amenidad de la lectura y evita convertir el libro en un prolijo y farragoso ensayo inescrutable para el profano. De este modo compagina la profundidad del trabajo de investigación histórica con un enfoque divulgativo (aunque el autor confiese haber huido expresamente de él). En cualquier caso la obra mantiene un marcado carácter dialéctico gracias a estas constantes referencias a los textos originales.

El libro trata de tender puentes entre la «filosofía natural», tal como el autor gusta seguir denominando a la ciencia, y las humanidades. Personalmente nunca entendí esa disociación, ni por qué la ciencia, no sólo su historia, se estudia al margen de la historia de la música, de la literatura, del arte, en definitiva de la historia de la humanidad. Como si esta última no se viera influida por la primera o viceversa, o como si su influencia fuera un hecho intranscendente, olvidando de paso la contribución de la revolución cosmológica de Copérnico y Kepler a la destrucción de la imagen medieval de un orden jerárquico instituido per se. La especialización en los estudios ha conseguido que los historiadores se sientan incapaces de indagar en los textos científicos y prefieran perseguir la influencia de la ciencia a través de versiones sesgadas y parciales de sus efectos, más tarde convertidos en referencias superficiales en los libros de historia y por ende en las aulas. Es cierto que el lenguaje matemático, soporte de muchos textos científicos, exige un esfuerzo de adaptación, pero ello no ha sido óbice para que Koestler o Butterfield escribieran sus obras.

Las nuevas enseñanzas deberían paliar este distanciamiento, pero lejos de conseguirlo parecen empeñadas en agrandar el abismo. Sin embargo el reto no parece interesar a nadie. Desde luego que no le interesa a la universidad garante principal de la especialización, empeñada en una enseñanza cada vez más segregatoria incluso entre sus propias ramas. Ni creo que haya un interés social por el tema, ni que las autoridades educativas sean sensibles a esta necesidad. Por otro lado el profesorado, fiel reflejo de su formación, no se siente capaz de tender puentes, ni cuenta entre sus filas con muchos transgresores de la rutina. Y en cualquier caso, si es necesario, no tiene empacho en tergiversar deliberada e impunemente los objetivos educativos con objeto de seguir perpetuando el mismo modelo segregacionista desde edades cada vez más tempranas de forma que las asignaturas puedan seguir siendo compartimentos estancos y los departamentos pequeños reinos de taifas desligados unos de otros.

Pese a ello no es posible obviar que la influencia de la ciencia en el pensamiento humano es comparable a la de la religión con la que ha mantenido una dura pugna durante siglos. No en vano la primera ha estado sometida a las ideas previas, a los prejuicios y a los dogmas de la segunda y ha precisado de muchos siglos, de pensadores clarividentes y de grandes dosis de pensamiento divergente para liberarse de su influencia y seguir avanzando. Y en ese avance condicionó y modificó esos mismos dogmas que la atenazaban y la estructura social que los sustentaba. Pues bien, el libro sabe recorrer ese fluir paralelo con exquisito detalle en lo que el autor denomina «los hilos gemelos de la ciencia y la religión».

Un aspecto que puede resultar especialmente interesante del libro en estos momentos y que a mi personalmente me ha obligado a releerlo es el análisis de corte sicológico que hace del descubrimiento y que es el que da título al libro.

Han pasado 11 años desde que oí a Schöenfeld por primera vez aportar sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas. Ahora hemos ido más lejos y algunos hablamos de una enseñanza basada en la resolución de problemas. Casi todas las editoriales parecen hacer referencia a ello pero sirve con echar una ojeada a sus textos para darse cuenta de la falacia. Pues bien, si alguien intenta «de verdad» una didáctica basada en la resolución de problemas, es decir, si habitualmente deja sobre la mesa de sus alumnos, sin explicación previa alguna, un problema para que sea resuelto, y analiza como llegan a la solución, verá que lejos de seguir un camino nítido avanzan guiados por la intuición como un ciego por su lazarillo. Se comportan como sonámbulos y precisan de una reflexión posterior, a veces larga, para entender lo que ellos mismos acaban de descubrir. Este es también el camino que ha seguido la ciencia y, en este sentido, resulta gratificante observar, una vez más, hasta qué punto se reproducen en clase los esquemas de comportamiento de una comunidad científica.

¿Cuál es la luz de la luciérnaga que guía sus mentes? Los objetos que rodean el camino se presentan confusos, imprecisos, y sin embargo, a veces, se agarran a ellos con desesperación. La oscuridad permanece a pesar del destello de luz del descubrimiento y no por quedar cegados precisamente. A veces precisan redescubrirlo para detectarlo, en muchos casos pasa a formar parte de la colección de sombras que rodean el camino y son incapaces de identificarlo cuando se topan con él a pesar de haberlo modelado con su propia mente.

Y se abren además algunos interrogantes sobre la importancia que tiene el pensamiento divergente en la creatividad, en los brotes de ingenio, sobre su trascendencia a la hora de resolver un problema «difícil». Sobre cómo se debe educar para que su ejercicio sea una actitud permanente. Sobre la importancia de saber hacer una síntesis de lo que se conoce y sobre la conveniencia de manejar simultáneamente más de tres conceptos distintos y múltiples vías de resolución, siendo capaces de acceder a ellos de forma aleatoria y no secuencial. Sobre la necesidad de que esos conceptos sean para el cerebro entes concretos, nítidos, precisos y no oscuros, indefinidos, vagos. Pero al mismo tiempo, sobre la posibilidad de avanzar en ausencia de estas hipótesis. Sobre el papel que juega la falsa generalización en el descubrimiento. De cómo la inducción se apoya en ella. De cómo educarla, en el sentido de domesticarla, para reconducirla y no anularla. De cómo introducir el rigor para que sea antídoto en los excesos, precaución en los procesos pero no sea un antibiótico que arrase la intuición y la creatividad. Y replantearse algunas cuestiones como, por ejemplo, que es insuficiente el redescubrir el concepto para que se produzca un aprendizaje significativo, aunque el hacerlo así se ha demostrado como un método eficaz para favorecerlo y para estimular una componente esencial de la motivación: la confianza en uno mismo. Que no es suficiente tampoco con el conflicto cognitivo para desterrar las ideas previas, aunque parece ser condición necesaria...

Seguramente sobre todo ello, alejados de cualquier tentación teorizadora, deberíamos estar discutiendo en estos momentos, aprovechando la incontable información que investigaciones, cuadernos y el contacto diario con los alumnos nos aporta. En este sentido la lectura del libro estimula la reflexión y puede ser de ayuda a la hora de tomar decisiones didácticas en el marco de la resolución de problemas.

En cualquier caso el que se acerque al libro sin pretensiones tiene garantizada una lectura placentera y algunos destellos de brillo que añadir a su patina personal en historia del pensamiento. Completan el placer una lectura sencilla y una visión apasionada de la historia, al tiempo que rigurosa, exigente, ingeniosa, lúcida, inteligente, cuidada y sopesada, producto de una actitud crítica, libre, divergente, inconformista y transgresora de quien supo mantener la coherencia con sus ideas hasta el momento cumbre de dar por terminada su vida. Esa misma coherencia que le hace ser impenitente con Galileo..., pero mejor será no desvelar los detalles... Felices vacaciones.

Carlos Usón

SUMA 22
junio 1996

Reunión de Didáctica del Cono Sur Preparación de las VIII JAEM Nueva Sociedad en Cantabria...

III Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur

Celebrada en la ciudad de Salto (República de Argentina) entre los días 31 de marzo y 3 de abril de 1996. Asistieron unos 500 profesores procedentes de Argentina, Paraguay, Uruguay, Bolivia, Chile, Brasil, además de invitados de Canadá y México. Por parte española participaron los profesores L. Blanco (Sociedad Extremeña) y L. Balbuena (Sociedad canaria) quien, además, representaba a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. La coordinación general estuvo a cargo de la profesora Ana T. Aragón.

En el curso de la reunión se celebró una reunión de representantes de sociedades de profesores.

El encuentro se desarrolló por medio de:

a) *Conferencias plenarias.*

- Horacio Rimoldi: «Evaluación del talento matemático a través de la resolución de problemas».
- Ricardo Cantoral: «Ingeniería didáctica: del círculo a la teoría de las funciones analíticas».
- Claude Gaulín: «La educación matemática en los inicios del año 2000: algunas conjeturas».
- Gregorio Klimosky: «Metodología de las ciencias formales».
- Alicia Villar: «Lenguaje común; lenguaje matemático».

b) *Paneles.*

- «Recuperación del pensamiento matemático».
- «Probabilidades y estadística, el auge del pensamiento probabilístico».
- «La formación docente y la enseñanza de las matemáticas a través de problemas».

CRÓNICAS

- «Innovaciones curriculares actuales en educación matemática».

c) *Cursos*. Se habían previsto 26 cursos y talleres de seis horas de duración. Se desarrollaron 23.

d) *Comunicaciones*. Se habían anunciado 70 aunque, por no asistir los autores correspondientes, se redujeron a 58.

e) *Poster*. Se presentaron 12.

Contó también con una exposición de «Fotografía y Matemáticas» cedida por la Olimpiada Matemática Argentina. Y por otra de «Filatelia» del profesor Edgardo Fernández de la Universidad Nacional del Sur-Bahía Blanca, quien ya había comunicado a la organización del ICME-8 su oferta de préstamo para ser exhibido durante el mismo en Sevilla. Aprovechando nuestra presencia allí, acordamos los términos del préstamo y después de clausurada nos fue entregada para el traslado a España.

Por parte de la organización se valoró muy positivamente en todo instante y de forma pública (sesiones de apertura y clausura) el apoyo que la FESPM había dado a este encuentro, agradeciendo la presencia institucional del Secretario General al que se le invitó a presidir los actos de apertura y clausura con el resto de las autoridades académicas presentes. En el primero de ellos, la Vicepresidenta del Comité Internacional de Programas de la Reunión, Alicia Villar, leyó íntegra la carta que había sido enviada por nuestro presidente Gonzalo Sánchez Vázquez. El el acto de clausura se designó al Secretario General miembro de honor de dicho Comité.

Por otra parte, es preciso señalar que en la información escrita que se entregaba a los participantes, la Federación figuraba como entidad auspiciadora del encuentro, como patrocinadora, y la Secretaría General como entidad colaboradora con la subcomisión de edición y redacción de los anuncios de la Reunión.

La Federación estuvo presente en la reunión de responsables de sociedades de profesores en la que se analizó el estado de los contactos mantenidos desde la última reunión celebrada en Santiago de Chile en agosto de 1995. Se valoró positivamente la propuesta de convenio de colaboración que había enviado nuestra junta de gobierno a todas las sociedades, anunciaron su firma, por el momento, las sociedades boliviana, paraguaya y venezolana.

Se informó ampliamente sobre el estado actual del ICME-8,explicando la iniciativa de la Federación y de las sociedades andaluza y canaria de ofrecer ayudas a profesores de este ámbito geográfico. Fue agradecida públicamente. Hubo numerosas consultas relacionadas tanto con el Congreso como con otras actividades de nuestra federación (revistas, estándares, encuentros,...).

Luis Balbuena

Primera sesión de preparación de las VIII JAEM

En Salamanca, durante los días 26 y 27 de abril, ha tenido lugar una reunión preparatoria para la organización de las VIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Además de varios miembros de la Sociedad Castellano-Leonesa, acudieron representantes de las sociedades de Extremadura, Aragón, Cataluña, Valencia y Madrid.

Una vez conocida la memoria de las anteriores jornadas presentada por las dos representantes de la Sociedad Emma Castelnuovo, se exponen las dificultades que tendrá una sección pequeña como la de Salamanca para afrontar el encargo de las próximas. No obstante, lo intentaría si toda la Sociedad Castellano-Leonesa presta su colaboración y asume la responsabilidad.

Si bien en principio las fechas deberían ser en septiembre de 1997, se consideran prematuras y se solicita a la Junta de la Federación que se estudie la posibilidad de retrasarlas hasta 1998, debido a la proximidad del ICME, la organización de las jornadas regionales y otras circunstancias.

Se propone también la creación de un Comité de Programas para las VIII JAEM formado por: tres miembros de la sociedad organizadora, dos personas que hubieran organizado jornadas anteriores, dos miembros de la Federación y tres expertos nombrados conjuntamente por la Federación y la Sociedad Castellano-Leonesa.

La composición es flexible y debería constituirse lo más pronto posible, con el fin de analizar y proponer temas y grupos de trabajo de las próximas JAEM.

Se propone que estas jornadas se estructuren alrededor de ponencias, grupos de discusión, exposiciones, comunicaciones y talleres. Algunos de los temas de trabajo enunciados serían:

- La gestión de la clase de Matemáticas.
- La formación del profesorado.
- Matemáticas en la vida cotidiana.
- Tratamiento de la diversidad.
- Evaluación.
- Multiculturalidad.

Luis F. Andrés

Nueva Sociedad en Cantabria

El pasado 17 de abril se constituyó formalmente la «Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria». Se hizo en un acto público al que fueron invitados Miguel de Guzmán, Presidente del ICMI y Antonio Aranda, Delegado Provincial de la SAEM Thales.

El primero hizo una breve descripción de la Comisión Internacional de Educación Matemática, y el segundo explicó las ventajas, para los miembros de la propia Sociedad y para el resto del profesorado español en esta materia, de constituir una asociación de este tipo y la necesidad de formar parte de la FESPM. Ambos animaron a esta sociedad cántabra, que tiene en la actualidad 21 socios, a trabajar en pro de la Educación Matemática organizando actividades y grupos de trabajo que mejoren la calidad de la enseñanza y motiven a los estudiantes en esta materia.

El día 23 de abril, se celebró una asamblea general en la que se eligió la junta directiva de la sociedad, que quedó compuesta como sigue:

- Ángela Núñez (Presidenta).
- Ángel García (Vicepresidente).
- Claudia Lázaro (Secretaria).
- Begoña Martínez (Tesorera).
- Amador Álvarez (Vocal).
- Mª Ángeles Casares (Vocal)
- Luis Sánchez (Vocal).

Esperamos formar parte, en breve, de la Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas y podamos leer en su revista SUMA algunas aportaciones de nuestros socios de interés para los objetivos que mueven a estas sociedades de profesores de matemáticas. A la vez que los profesores de Cantabria podamos aprovechar los frutos derivados de las otras sociedades españolas –con mayor experiencia en este tipo de asociacionismo profesional– en nuestra tarea de mejorar la calidad de la enseñanza de las Matemáticas.

Ángela Núñez

XXXII Olimpiada Matemática

Recientemente se ha celebrado en Tarragona la fase final de la XXXII Olimpiada Matemática, organizada por la Real Sociedad Matemática Española,y dirigida a estudiantes de COU, bachillerato o formación profesional, menores de 19 años. A continuación se enuncian los problemas puestos en esta fase final.

1. Los números naturales *a* y *b* son tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es entero.
Demostrar que el máximo común divisor de *a* y *b* no es mayor que la raíz cuadrada de (a + b).

2. Sea G el baricentro del triángulo ABC. Demostrar que si AB+GC = AC+GB, entonces ABC es isósceles.

3. En Port Aventura hay 16 agentes secretos. cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A. Además 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero,..., el décimo vigila al primero.
Demostrar que también se pueden enumerar de esa manera 11 agentes cualesquiera.

4. Discutir la existencia de soluciones reales *x* de la ecuación

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

según los valores reales del parámetro *p* y resolverla en aquellos casos que tenga solución.

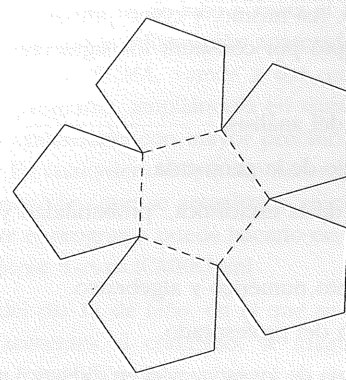
5. Considera $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = cx^2 + bx + a$ tales que

i) $|f(-1)| \leq 1$ ii) $|f(0)| \leq 1$ iii) $|f(1)| \leq 1$

Probar que si f cumple i), ii) y iii) entonces:

$|f(x)| \leq 5/4$ y $|g(x)| \leq 2$ para x: $-1 \leq x \leq 1$.

6. La figura adjunta se compone de seis pentágonos regulares de lado 1 m. Se dobla por la línea de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice. ¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?



Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

El pasado 12 de marzo de 1996 se constituyó la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) por parte de 35 profesores vinculados con la investigación en Educación Matemática y que realizan su trabajo en 20 universidades españolas.

Según sus estatutos, los principales objetivos de esta sociedad son:

- Mantener un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en Educación Matemática, donde plantear cuestiones, transmitir e intercambiar resultados, profundizar en las elaboraciones teóricas, mejorar y validar los diseños metodológicos.
- Promover la constitución de grupos de investigación estables en Educación Matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas.
- Promover el impulso a la Educación Matemática en los organismos e instituciones relacionados con la investigación. Promover la participación en las convocatorias de ayudas a la investigación, institucionales y privadas.
- Contribuir y participar en el desarrollo, evaluación y aplicación de investigaciones en Didáctica de la Matemática.
- Contribuir a la presentación de resultados de investigación en los foros, encuentros y revistas de Educación Matemática.
- Mantener contactos y promover la colaboración con grupos de investigación en Educación Matemática.
- Favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y docencia en todos los niveles educativos.
- Transmitir y divulgar institucionalmente la actividad de la Sociedad.

En esta sesión constituyente se procedió a elegir a la primera junta directiva que quedó formada por Luis Rico (Presidente), Eduardo Lacasta (Secretario), Modesto Sierra (Tesorero), Carmen Azcárate, Mª Victoria Sánchez y Luis Puig (Vocales). Así mismo, y como primera actuación de la SEIEM se optó por constituir los siguientes grupos de trabajo:

1. Didáctica del análisis.
2. Aprendizaje de la geometría.
3. Didáctica de la estadística,. probabilidad y combinatoria.
4. Pensamiento numérico y algebraico.
5. Formación del profesorado.
6. Metodología de investigación en didáctica de la matemática.

Tendencias, experiencias y perspectivas en Educación Matemática

Nuestra Federación ha colaborado, junto con otras instituciones, en el I Seminario-Taller «Tendencias, experiencias y perspectivas en Educación matemática», organizado por la Sociedad Peruana de Educación Matemática (SOPEMAT), y celebrado en Lima los días 1, 2 y 3 de febrero de 1996.

Como viene siendo habitual en este tipo de congresos, ha estado estructurado a partir de conferencias, talleres, paneles, grupos de trabajo y comunicaciones.

Las conferencias plenarias han estado a cargo de Holger Saavedra («La conquista de la ciencia por el espíritu de las matemáticas»), Luis Puig («Resolución de problemas y heurística matemática»), Martha Villavicencio («Currículo y evaluación para una educación matemática de calidad») y Sigfrid Carranza («Informática y educación matemática»).

SUMA

AVISO A SOCIOS DE LA FESPM

Los socios de alguna de las sociedades de la Federación que les falte algún número de SUMA, correspondiente al periodo en el que han estado asociados, lo comunique por escrito a la revista y se les enviará, siempre que haya ejemplares disponibles. Es importante que cuando un socio o socia cambie de dirección lo comunique a la correspondiente sociedad. (Es recomendable, hacerlo también a SUMA).

SUMA 22
junio 1996

ICME-8
VII Olimpiada Matemática Nacional
IV Seminario Castellano-Leonés

Cuando apenas faltan dos meses para la apertura de las sesiones del ICME-8 en la ciudad de Sevilla, el número de participantes inscritos se acerca a los 2.000, y el comite organizador trabaja con la hipótesis de que este número podría incrementarse en unos 500 en el tiempo que queda.

Los participantes provienen de 70 países, de momento, de los que el 44 por ciento son de habla hispana, y se distribuyen casi por igual entre los dos sexos (47 por ciento de mujeres y 53 por ciento de hombres).

A ese número hay que añadir los 176 becarios a los que el comité de becas, reunido en el mes de marzo según prevén las bases de la convocatoria, ha concedido el 10 por ciento de la cantidad ingresada por incripciones (que en esas fechas se estimaban en unas 2.200). Está previsto que el comité vuelva a reunirse para considerar las peticiones de becas que siguen llegando a la organización, para repartir el previsisble aumento de las cantidades consignadas para este fin.

Todos ellos estarán recibiendo estos días el tercer anuncio, que en realidad es un avance del programa de actividades que está previsto que se desarrollen durante el congreso, a partir del 14 de julio y hasta el 21 del mismo mes. Para completar la información aparecida en los anteriores números de SUMA, vamos a dar una breve descripción del programa, ampliándola en aquellos aspectos que se han concretado con mayor precisión en los últimos meses. En cualquier caso, quien desee acceder a una mayor información, que se actualiza y amplia periódicamente, sobre el programa puede hacerlo en W.W.W. en la URL: http//icme 8.us.es.ICME8.html

A lo largo del día 14 de julio, en el que se irán incorporando los asistentes al congreso, se inaugurarán, en el Casino de la Exposición, las exposiciones organizadas por la FESPM (ver cuadro 1) que podrán visitarse a lo largo

CONVOCATORIAS

CUADRO 1: Exposiciones no comerciales

Diferentes asociaciones, entidades y grupos de profesores expondrán sus materiales durante el congreso:

- *Cultural and Historical Perspectives of Mathematics Education in Japan.*
- *Colorado Mathematical Olympiad. Geombinatorics. Books. University of Colorado.*
- *The Freudenthal Institute of the University of Utrecht.*
- *ZDM: Fachinfornationszentrum Karlsruhe.*
- *IREM: Institute pour la Recherche sur l'Education Mathematique.*
- *ATM:Association of Teachers of Mathematics.*
- *Teaching in Context. University of Edinburgh.*
- *CIJM: Comite International des Jeux Mathematiques.*
- *The Mathematics Centre. University of Southampton.*
- *The Mathematical Association (UK).*
- *School of Education. University of Nottingham.*
- *MOIFEM: Mouvement International pour les Femmes et l'Enseigenement des Matematiques.*
- *Australia (ICTMA8): 8th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.*
- *ADA BYRON (OECOM): Organización Española para la Coeducación Matemática.*

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) presenta las siguientes exposiciones especiales:

- *Medidas tradicionales en España.*
- *Material didáctico del profesorado en sus aulas.*
- *Libros antiguos de matemáticas.*
- *Films y vídeos matemáticos.*
- *Fotototograffa y matemáticas.*
- *Escultura y matemáticas; Forma y Número.*
- *Filatelia y matemáticas.*
- *La medida del tiempo antes del reloj mecánico.*
- *Máquinas de calcular.*

El Prof. D. Guderian organiza una exposición sobre Arte y Matemáticas en la Galeria Juana de Aizpuru (calle Zaragoza, 26), patrocinada por el Institut fur Auslandsbeziehungen of Bonn/Stuttgart.

El grabador francés Patrice Jeener expondrá sus trabajos sobre cobre, de contenido matemático, durante todo el Congreso.

CUADRO 2: Seminarios del ICMI

Martes 16, de 17:00 a 18:30

Genero y Educación Matemática.

COORDINADORA: Gila Hanna.

Miércoles 17 de 19:00 a 21:00

Perspectivas de la Enseñanza de la Geometría en el siglo XXI.

COORDINADOR: Vinicio Villani.

Sábado 20, de 19:00 a 21:00

¿Qué es investigación en Educación Matemática y cuáles son sus resultados?

COORDINADOR:Jeremy Kilpatrick.

1 Jeremy Kilpatrick: Presentación del Seminario: Sus razones y objetivos. Los resultados del Congreso de Washington de 1994.

2 Anna Sierpinska: Presentación del libro relacionado con el Seminario. Temas principales y posicionamiento de sus autores.

3 Debate.

de la semana. Los organizadores esperan que las incorporaciones sigan produciendose hasta ese último momento, por lo que estará abierta la inscripción hasta la inaguración del ICME.

El programa científico se iniciará el lunes 15 con una ceremonia de apertura, las conferencias plenarias a cargo de Ana Sierpinska y Miguel de Guzmán*, y por la tarde, la mesa redonda internacional, moderada por Alan Bishop. Posteriormente, se acabará la jornada con un coctel de bienvenida y una gala cultural. Todas las actividades tendrán lugar en el Palacio de Congresos y Exposiciones de Sevilla.

La sede para las actividades de las jornadas centrales del congreso será el campus Reina Mercedes de la Universidad de Sevilla. Se comenzará temprano con las reuniones de los 26 Grupos de Trabajo, entre los que cada congresista ha escogido al formalizar su inscripción. En ellas se discutirán temas claves en educación matemática, a lo largo de sesiones de noventa minutos.

Tras un descanso, seguirá la primera tanda de conferencias ordinarias, entre las que habrá que escoger a cuál asistir entre las 10 que se impartirán en paralelo. Cada una de ellas consistirá en una charla seguida de un breve debate, abarcando las 60 previstas un amplio espectro de temas sobre la educación matemática.

El martes y miércoles, la sesión de la mañana terminará con otro bloque de conferencias ordinarias, mientras que el viernes y sábado, este tiempo quedará reservado para las reuniones de los 22 Grupos Temáticos. En las dos sesiones de 90 minutos, los ponentes presentarán el estadio de la cuestión en sus respectivos temas.

Por la tarde, el programa tiene una estructura más abierta, con sesiones de diferentes tipos, organizadas en dos bloques, separados por un descanso. En el primero de ellos, los congresistas podrán elegir entre asistir a alguno de los seminarios organizados por el ICMI (ver cuadro 2), conocer alguno de los

* Para todas las referencias a conferencias, tanto plenarias como ordinarias, asi como a los grupos de trabajo y grupos temáticos, puede consultarse las páginas 119 a 125 del n.º19 de SUMA.

20 proyectos que han sido seleccionados en cualquiera de sus dos modalidades (ver cuadro 3), o participar en alguno de los encuentros convocados por diferentes asociaciones, entidades y grupos de profesores (ver cuadro 4).

Dentro del segundo bloque de la tarde, figuran las sesiones organizadas por los cuatro grupos internacionales de estudio del ICMI: Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática (PME), Grupo Internacional de estudio de las relaciones entre la Pedagogía y la Historia de las Matemáticas (HPM), Organización Internacional para las mujeres y la enseñanza de las Matemáticas (IOWME) y, Federación Internacional de Competiciones Nacionales de Matemáticas (WFNMC).

También tienen su hueco los seminarios del ICMI y además, algunos países, (Hungría, Australia y España como país anfitrión), en representación del ICMI dispondrán de sesiones de una hora para dar una panorámica de los principales aspectos de la educación matemática en ellos.

Están previstas algunas sesiones especiales, en las que tocarán temas concretos como, una *sesión in memoriam del Prof. Richard R. Skemp*, *la proporción cordobesa* o *los matemáticos españoles del siglo XX*.

Por último, dentro de este bloque, los asistentes podrán participar en alguno de los 8 talleres que se desarrollarán a lo largo de dos sesiones (ver cuadro 5).

Buena muestra del interés despertado por el ICME 8 es el hecho de que el comité de selección ha aceptado un total de 650 comunicaciones breves, que se han clasificado de acuerdo con los temas de los grupos de trabajo y temáticos para facilitar su localización. Las comunicaciones se presentarán mediante carteles, vídeos y/o programas informáticos. Los poster serán instalados por los autores en el Campus Universitario a partir de la tarde del martes. La organización anunciará un horario concreto dentro del programa del Congreso, en el que los autores

CUADRO 3: Proyectos

1. Serán presentados oralmente:

Título	País
• *Matemática y diseño a nivel universitario.*	Argentina
• *Enseñanza de la Clencias y de las Matemáticas en el Nivel Medio en Iberoamérica.*	España
• *Utilización del Derive en la enseñanza de las Matemáticas.*	España
• *PRIME Project: The Empowerment of SchoolMathematics through a Network o Educatioal Institutions.*	Colombia
• *Multicultural Dynamic Geometry Project.*	Francia
• *Curso a distancia para Profesores de Nivel Elemental. Una experiencia altemativa en capacitación docente.*	Argentina
• *Curso de Especialización en Educación Matemática.*	Brasil
• *Understanding Teaching Implementing the NCTM Professional Standards for Teaching Mathematics.*	U.S.A.
• *Freedom spaces, convergence points and guiding lines.*	Suiza
• *Maths Centre for Primary Teachers. A Project in South Africa.*	South Africa

2. Permanecerán expuestos en el horario habitual para exposiciones no comerciales.

• *A New Elementary School Math Program Using Projects and Calculators.*	U.S.A.
• *Grupo deTrabajo de Investigación de la Asociación de Profesores de Matemáticas.*	Portugal
• *Centre for Teaching Mathematics.*	Reino Unido
• *Matemática y diseño a nivel universitario.*	Argentina
• *Elaboración de materiales instruccionales para Matemáticas I y II en la Universidad Nacional (UNA) Abierta de Venezuela.*	Venezuela
• *The California Math Show.*	U.S.A.
• *Investigación en Educación Matemática y Formación de Profesores.*	España
• *Project Display for the Balanced Assessment Project.*	Reino Unido
• *Research in the Graduate Program in Mathematics Education.*	Brasil
• *Project Australia.*	Australia

CUADRO 4: Sesiones especiales y reuniones

- Founding Meeting of the International Council for Computer Algebra in Mathematics Education (IC-CAME).
- Upliftment initiatives in South Africa: an INSET project (RUMEP).
- Encuentro conjunto del Comité Interamericano de Educación Matemática y del Comité Iberoamericano de Educación Matemática.
- Asamblea general del ICMI.
- International Baccalaureate: meeting of Mathematics Teachers.
- Forum for Officers of National Mathematics Organizations.
- Meeting of the Internaional Organization of Women and Mathemaics Education (IOWME).
- Encuentro de Editores de Revistas.
- Establishing a European Association of Researchers in Mathemaics Education (ERCME).
- Founding Meeting of a European Academy for Teaching Mathematics with Technology.
- Presentación de publicaciones de la Unione Matematica Italiana y del Seminario Nazionale in Ricerca in Didattica della Matematica.
- Presentation of the Society for the Advancement of Chicanos and Native Americans in Science (SACNAS).
- International Mathematics Toumament of Towns.
- Encuentro de responsables de Sociedades Iberoamericanas de Educación Matemática.
- Encuentro de la Sociedad Ada Byron.
- Encuentro de «Old Hands», en su 8.° ICME.
- Asamblea General de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática SA.E.M.«THALES».

CUADRO 5: Talleres

- *Using Pop-up Enginnering to teach Mathematics Concepts*
  Vivekenand Mohan-Ram, Australia
- *Salón de Juegos Matemáticos*
  Juan Antonio Hans, España
- *Papiroflexia y Matemáticas*
  Antonio Ledesma. España
- *Games in the Mathematics Classroom*
  Gillian Hatch, U.K.
- *Understanding undergraduate mathematics through special*
  Robert Bum, U.K.
- *Intuición Espacial*
  Floreal Gracia, España
- *Matemáticas con Mathematica*
  Victoriano Ramírez, España
- *Mathemaffcs of Chaos*
  Daphne Kerslake, U.K.
- *Taller de Calculadoras*
  CASIO Electronics Co. Ltd

estarán presentes para dialogar con los interesados en la comunicación. En cualquier caso, el viernes de 19:00 a 21:00 queda reservado exclusivamente para este tipo de comunicaciones.

Una tradición de anteriores convocatorias, que el ICME-8 desea conservar, son las «happy hours», en las que una vez finalizada la jornada de trabajo, se tendrá la oportunidad de saludar y conocer al resto de los participantes en un ambiente informal, con servicio de bebidas y comidas.

Además todos los participantes y acompañantes podrán particiapar en las excursiones ofrecidas para en jueves, día central del congreso, con diez destinos diferentes dentro de Andaluciá y Extremadura: Córdoba, Doñana, Granada, Jerez, Lugares Colombinos, Mérida, Pueblos Blancos, Sevilla, Úbeda-Baeza y Playas de la costa andaluza.

Paralelamente con las sesiones científicaas de ICME-8, tendrá lugar en el mismo Capus de Reina Mercedes, una exposción comercial donde se ofrecerá una importante muestra de material didáctico: libros, videos, programas informáticos, etc. hasta el momento han solicitado su participación un amplio número de editoriales y casas comerciales en general.

El ICME-8 finalizará el domingo 21 de julio, en el Palacio de Congresos y Exposiciones, con las dos últimas conferencias plenarias, a cargo de David Tall y Paulo Freire y la sesión de clausura.

Un acontecimiento de estas características no ser'ia posible sin contar con la colaboración material de distintas instituciones públicas y privadas y sin el trabajo de muchas personas, empezando en el Comité Ejecutivo del ICMI, el Comité Nacional, el Comité Internacional hasta el Comité Local sobre el que ha recaído la labor más ingrata de resolver los múltiples y variados problemas de organización que un evento de estas características lleva.

COMITÉ LOCAL

Comité Ejecutivo:
Antonio Pérez Jiménez, presidente.
José Mª Chacón Íñigo, secretario.

Área del Programa Científico:
Antonio Aranda Plata.

Área de Recursos Humanos:
Juan Núñez Valdés.

Área de Servicios Generales:
Concepción García Severón.
Fermín Novo Fernández.

Área de Promoción, Difusión y Medios Técnicos:
José Mª Álvarez Falcón.
José Muñoz Santonja.
Juan Rodríguez Cordobés.

Área de Administración:
Ladislao Navarro Peinado.
Juan A. Suárez Vázquez.

Secretaría Técnica:
Alicia Mateos Morillo.
Manuel Luis Salguero Sánchez.
Rocío Yllanes Suárez.

Vocales:
Rocío Alonso Gallego.
José Mª Ayerbe Toledano.
Trinidad Bando Casado.
Ricardo Barroso Campos.
Bernardo Bueno Beltrán.
Martín Cera López.
José Carmona Álvarez.
María Pilar Domínguez Abad.
Reyes Domínguez Abascal.
Jerónimo Ferrer Rodríguez.
José Ferrer Rodríguez.
Mª Carmen Flores Fernández.
Rosa Ana Gallardo Muñoz.
Mercedes García Blanco.
Mª Ángeles Greciano Martín.
José Gutiérrez.
Manuel Iglesias Cerezal.
Adolfo López Gómez.
Concepción Paralera Morales.
Águeda Porras Ruiz.
José A. Prados Tendero.
José F. Quesada Moreno.
Ismael Roldán Castro.
Mariano Salmerón Sánchez.
Mª Jesús Serván Tomás.
José Mª Vicente Carreto.
José L. Vicente Córdoba.
Jaime Yagüez Castrillo.

VII Olimpiada Matemática Nacional

Durante los días 24 a 29 de junio de 1996 se va a celebrar la fase nacional de la «VII Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas», organizada por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prosper, bajo el lema «Historia, cultura y matemáticas.'Mirar para observar'» y coordinada por José Macías Marín.

Esta nueva edición de la olimpiada, dirigida al alumnado de 8.° de EGB y 2.° curso del primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, tendrá como escenarios las ciudades de Valencia de Alcántara, Cáceres y Mérida, y se desarrollará el amplio e interesante programa de actividades que se reproduce en el cuadro adjunto.

Entre los objetivos fijados en esta ocasión figuran, entre otros, los siguientes:

- Potenciar la resolución de problemas como forma de mejorar el aprendizaje de las matemáticas desde el punto de vista de la creatividad y la diversidad.
- Favorecer la convivencia entre escolares de todas las Comunidades del Estado, mediante la participación en las diferentes fases en las que alternarán pruebas matemáticas y actividades lúdicas encaminadas a profundizar en el trabajo en equipo, la cooperación, la amistad entre alumnos y profesores y en el conocimiento de la geografía y cultura de Extremadura.
- Quitar miedos a la aventura matemática en la comunidad educativa de manera que permita situar a las matemáticas en sus justos términos de belleza y potencialidad.
- Ofrecer a los profesores y profesoras materiales y pautas metodológicas que favorezcan en los alumnos capacidades y habilidades no exclusivamente memorísticas y mecánicas, sino de razonamiento, intuición, ingenio, etc.

PROGRAMA DE ACTIVIDADES

24 de junio (lunes):

16 h: Recogidas de participantes.
20 h: Apertura, bienvenida y entrega de documentación.
21 h: Visita a la localidad.
23 h: Descanso.

25 de junio (martes):

10 h: Prueba individual. (Reunión de coordinadores).
13 h: Comida.
15 h: Sálida a Mérida.
17 h: Recepción Junta de Extremadura.
19 h: Visita a Mérida.
22 h: Cena en Mérida.
24 h: Descanso en Valencia de Alcántara.

26 de junio (miércoles):

10 h: Salida a Valle del Jerte.
14 h: Comida en Cáceres.
18 h: Prueba por equipos.
22 h: Cena en Valencia de Alcántara.
23 h: Descanso y corrección de pruebas.

27 de junio (jueves):

10 h: Circuito matemático en Valencia de Alcántara.
14 h: Comida.
18 h: Puesta en común del circuito matemático.
19 h: Charla matemática.
21 h: Cena.
22 h: Fiesta de convivencia.
24 h: Descanso.

28 de junio (viernes):

09 h: Visita a los Dólmenes.
10 h: Salida a Portugal.
14 h: Comida en Portugal (Castelo da Vide).
19 h: Tiempo libre en Valencia de Alcántara.
20 h: Cena. Clausura y entrega de premios.
22 h: Fiesta de despedida.
24 h: Descanso.

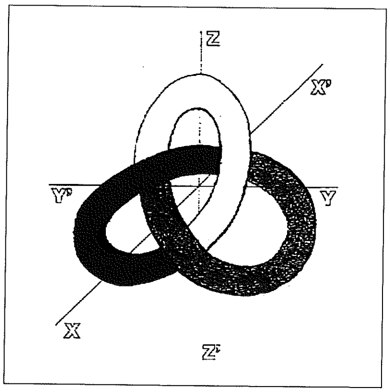
29 de junio (sábado)

11 h: Regreso a los lugares de origen.

IV Seminario Castellano-Leonés de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

La Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas organiza en Valladolid, durante los días 10, 11 y 12 de septiembre de 1996, el «IV Seminario Castellano-Leonés de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas».

Según se dice en la introducción del programa: «Esta actividad pretende canalizar las distintas corrientes e iniciativas surgidas en el seno de colectivos de profesores y profesoras de matemáticas de la región. Se considera imprescindible la investigación e innovación matemática desde la práctica y la coordinación entre los distintos niveles educativos del profesorado. Estos dos aspectos son, por tanto, prioritarios y, en consecuencia, han jugado un papel relevante a la hora de diseñar la actividad. Sin duda, o al menos eso esperamos, la variedad de puntos de vista presentados en las aportaciones tanto de los participantes como de los ponentes y responsables posibilitará ampliar y enriquecer las perspectivas propias del profesorado y, por tanto, la educación matemática de nuestra región.



Deseamos que este seminario sirva para hacer un alto en el quehacer diario y reflexionar sobre el estado de nuestra práctica docente».

El programa del Seminario incluye conferencias plenarias, mesas de trabajo, comunicaciones y paneles, mesas redondas y exposiciones de materiales.

Conferencias plenarias

1. *Cálculos Numéricos, ¿qué podemos aprender con ellos?* Jesús Sanz Sema (Universidad de Valladolid).
2. *Historia de la Matemática.* Santiago Fernández (COP de Santurce).
3. *Didáctica de la Matemática.* Mª Paz Bujanda (Universidad Complutense de Madrid).
4. *La evolución de la estadística y su incorporación a los currículos.* Enrique Cabañas Pérez (Universidad de Montevideo).

Mesas de trabajo

1. Los programas informáticos y su incidencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
2. Geometría y Topología: Mosaicos. Nudos. Grafos.
3. Historia de la Matemática y sus implicaciones didácticas.
4. Análisis de datos y azar en primaria.
5. Numeración y cálculo en primaria.
6. Tratamiento de la diversidad y evaluación en la ESO.
7. Análisis matemático. Precálculo y cálculo.

Mesas redondas

Las «Mesas redondas» tratarán de crear un puente de entendimiento entre los distintos niveles educativos.

- Relaciones entre Primaria y Secundaria.
- Relaciones entre Bachillerato y Universidad.

Comunicaciones

Las comunicaciones o experiencias se ajustarán al modelo:

1.- Fundamentación.

2.- Descripción.

3.- Debate y Conclusiones.

La fecha límite de recepción de comunicaciones es el 20 de junio de 1996.

Inscripciones

La asistencia al Seminario es gratuita, únicamente a efectos de poder recibir material y actas del encuentro se establecen las siguientes cuotas:

- Miembros de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas: 2.000 pta.
- Resto de profesores: 5.000 pts.

La fecha límite de inscripción es el 27 de junio de 1996.

Información

Para más información contactar con:

Asesoría de Matemáticas
CPR II de Valladolid.
c/. Soto, s/n.
47010-VALLADOLID.
Tfno.: 983-260650.
Fax: 983-260666.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS, o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ______________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.º:. . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM